Bydgoski bąbel matematyczny

O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE

BADANIA
UMIEJĘTNOŚCI
TRZECIOKLASISTÓW

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Bydgoski bąbel matematyczny

O wprowadzaniu zmian w nauczaniu matematyki w klasach I–III

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

IBE

BADANIA
UMIEJĘTNOŚCI
TRZECIOKLASISTÓW

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Autorzy:
Wiesława Binkowska-Wójcik, Izabela Boroń, Sylwia Brzyska, Mirosława Cikorska, Renata Fiertek, Dominika Giezek, Mirosława Glaza, Bożena Gruszewska, Ewa Kapczyńska, Agata Kazimierczak, Ewa Kilichowska, Barbara Kowal, Dorota Kubiak, Iwona Leśniewska, Violetta Majewicz, Dorota Preus, Katarzyna Szcząchor, Krystyna Tomecka, Hanna Wasilewska, Elżbieta Wiewióra

Konsultacje merytoryczne:
dr Mirosław Dąbrowski, Anna Pregler

Redakcja:
Anna Nowakowska, Margaryta Orzechowska, Dorota Sosulska, Małgorzata Zambrowska

Wydawca:
Instytut Badań Edukacyjnych
ul. Górczewska 8
01-180 Warszawa
tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl

ISBN 978-83-61693-76-5

Publikacja opracowana w ramach projektu systemowego: *Badania uwarunkowań zróżnicowania wyników egzaminów zewnętrznych*. Publikacja współfinansowana prze Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego – Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet III Wysoka jakość systemu oświaty, Działania 3.2 Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych.

Egzemplarz bezpłatny

Spis treści

Wstęp

Pomysł na opisywane w tej książce działanie *Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego* swój ostateczny kształt uzyskało w Instytucie Badań Edukacyjnych. Inicjatorem tych prac był dr Mirosław Dąbrowski, a tworzył je zespół specjalistów z różnych dziedzin. Byli wśród nich oczywiście dydaktycy matematyki, ale też socjolodzy, psycholodzy i pedagodzy.

Celem ogólnym rozpoczętego działania było uruchomienie zmiany w nauczaniu matematyki dzieci na I etapie edukacyjnym, przede wszystkim poprzez zmianę przekonań nauczycieli dotyczących celów ich pracy w tym zakresie oraz wzbogacenie ich szeroko rozumianego warsztatu zawodowego.

Cele nauczania matematyki opisane są w podstawie programowej. Kładą one silny nacisk na takie złożone umiejętności, jak rozumowanie, argumentacja, umiejętność znajdowania strategii rozwiązania problemu czy dobierania modelu matematycznego. Z badań nauczania matematyki wynika natomiast, że powszechnie stosowany w polskich szkołach sposób nauczania opiera się głównie na powielaniu przez uczniów gotowych algorytmów rozwiazywania typowych zadań matematycznych. Nauczania algorytmów matematycznych oczywiście nie należy zaniechać, ale ograniczenie matematyki wyłącznie do nich powoduje u wielu uczniów zanik śmiałości i zaradności matematycznej niezbędnych do użytecznego posługiwania się matematyką w przyszłości.

Zmiana tych złych nawyków metodycznych jest niezbędna zwłaszcza w początkowych klasach szkoły podstawowej, bo to wtedy kształtują się postawy uczniów wobec matematyki. Wady w nauczaniu matematyki na tym etapie mogą już być nie do naprawienia na etapach późniejszych.

Ale właśnie w klasach 1–3 najtrudniej jest dokonać takiej zmiany. Powodów tego jest wiele, poczynając od niepewności matematycznej samych nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, na brakach organizacji pracy szkoły kończąc.

W Instytucie Badań Edukacyjnych opracowana została kompleksowa metoda wprowadzania zmian w nauczaniu matematyki, zwana bąblem matematycznym[i]. Metoda ta nie jest wyłącznie teoretycznym opracowaniem. To sprawdzony w praktyce sposób wprowadzania zmian w nauczaniu matematyki. Opiera się m.in. na wypracowaniu w szkole i między szkołami metod współpracy i wzajemnego wsparcia nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej, a także ich współpracy z nauczycielami matematyki w klasach 4–6 oraz na rozwijaniu warsztatu metodycznego nauczycieli.

Od prawie trzech lat metoda bąbla matematycznego stosowana jest z powodzeniem w Bydgoszczy. W tej chwili wprowadzana jest już w niemal 80% szkół podstawowych.

Bąbel matematyczny nie jest prostym do zastosowania przepisem działań. Wymaga współpracy samorządu, dyrektorów szkół, nauczycieli i odpowiedniego zespołu ekspertów zewnętrznych. Wymaga też wysiłku organizacyjnego samorządu i pewnych nakładów finansowych. Przede wszystkim jednak potrzebna jest determinacja i chęć dokonania zmiany u samych nauczycieli. Nie da się metody bąbla matematycznego wprowadzić metodą zarządzeń administracyjnych. Nauczyciele muszą być do niej przekonani do tego stopnia, by po jakimś czasie z zaraźliwym entuzjazmem potrafili przekonać swoje koleżanki i kolegów ze swojej i innych szkół.

W tej książce zebrano kilkanaście tekstów napisanych przez bydgoskie nauczycielki, które jako pierwsze wprowadziły zmianę w sposobie nauczania matematyki metodą opracowaną w Instytucie Badań Edukacyjnych.

Mamy nadzieję, że teksty te zachęcą nauczycieli, dyrektorów szkół i samorządowców do dokładniejszego zapoznania się z tą metodą, a w konsekwencji do rozpoczęcia zmian w sposób przez nią proponowany.

Działanie *Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego* prowadzone było w ramach projektu systemowego *Badania uwarunkowań zróżnicowania wyników egzaminów zewnętrznych* finansowanego przez Unie Europjeksą ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego, realizowanego przez Instytut Badań Edukacyjnych.

[i] Jedną z inspiracji przy tworzeniu metody bąbla matematycznego IBE była teoria zmiany społecznej opisana przez prof. A. Nowaka, w której zaczynem zmiany jest niewielka grupa osób stanowiąca „bąbel nowego w morzu starego".

PRZEMYŚLENIA I REFLEKSJE KOORDYNATORKI BYDGOSKIEGO BĄBLA MATEMATYCZNEGO, CZYLI JAK PRZYSTĄPILIŚMY DO DZIAŁANIA „DZIECI MYŚLĄ"

Elżbieta Wiewióra

Powody do zmiany

W ostatnich latach w Polsce przeprowadzono cykl badań[1] umiejętności matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych. Prowadziła je Centralna Komisja Egzaminacyjna (2005–2011) oraz Instytut Badań Edukacyjnych (2012–2014). Polska wzięła także udział w międzynarodowych badaniach PISA (badanie piętnastolatków) oraz badaniach TIMSS (badanie uczniów w czwartym roku nauki). Zarówno wyniki polskich jak i międzynarodowych badań pokazują, że nasi uczniowie, niezależnie od etapu kształcenia, dobrze rozwiązują typowe zadania według wyuczonego i utrwalonego schematu postępowania, natomiast mają trudności, gdy należy zastosować posiadaną wiedzę matematyczną w nowej, nietypowej z ich punktu widzenia, sytuacji.

Aby poprawić efektywności edukacji w kujawsko-pomorskich szkołach, Kurator Oświaty we współpracy z ośrodkami doskonalenia nauczycieli, uczelniami wyższymi i Centralną Komisją Egzaminacyjną opracował w roku szkolnym 2007/2008 „Program poprawy jakości kształcenia w szkołach podstawowych i gimnazjach". W ramach tego programu zaplanowano m.in. badanie umiejętności językowych i matematycznych trzecioklasistów w 197 losowo wybranych klasach szkół podstawowych w województwie kujawsko-pomorskim. Opublikowano raport[2], który zawiera opis wyników uzyskanych przez reprezentatywną grupę uczniów w 2009 roku oraz zalecenia skierowane do wszystkich gremiów zaangażowanych w proces doskonalenia pracy szkoły. Zgodnie z sugestią autorów raportu mogą one stanowić inspirację do wprowadzenia zmian korzystnych dla rozwoju poznawczego dzieci.

Zalecenia dla nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej:

1. Stawianie uczniów w sytuacjach konieczności samodzielnego rozwiązywania problemów.
2. Dawanie uczniom swobody w samodzielnym poszukiwaniu rozwiązania problemu, zadania czy ćwiczenia.
3. Obdarzanie dzieci zaufaniem co do ich możliwości poznawczych, samodzielności, oryginalności myślenia i wypowiadania się.
4. Zawsze uważne słuchanie pytań dzieci i ich wypowiedzi.
5. Stwarzanie sytuacji edukacyjnych prowokujących dzieci do zadawania pytań, pracy w grupach, wspólnego poszukiwania informacji i odpowiedzi.
6. Wprowadzanie treści edukacyjnych interesujących dla dzieci, stanowiących wyzwanie intelektualne.
7. Wprowadzenie w klasie szkolnej kultury czytania poprzez codzienne czytanie przez nauczyciela i uczniów różnego rodzaju tekstów: literackich, popularnonaukowych, informacyjnych, matematycznych".

Zalecenia dla dyrektorów szkół:`

1. Tworzenie atmosfery współpracy nauczycieli nauczania zintegrowanego poprzez stwarzanie okazji do rozmawiania na temat różnych aspektów pracy z dziećmi.
2. Doskonalenie pracy dydaktycznej nauczycieli poprze organizowanie „lekcji otwartych", wspólne dyskutowanie o ich pracy i problemach, zachęcanie do podejmowania nowych rozwiązań edukacyjnych.
3. Wspieranie wszelkich inicjatyw nauczycieli zmierzających do doskonalenia własnych umiejętności zawodowych oraz wzbogacanie zasobów pomocy dydaktycznych szkoły.

---

[1] Dąbrowski M., Żytko M. (red.), Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych. CKE, Warszawa 2007, cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów. CKE, Warszawa 2008; Kalinowska A., Murawska B. (red.), Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego. Bydgoszcz 2009; Dąbrowski M. (red.), Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych 2010. CKE, Warszawa 2011; ; Pregler A., Wiatrak E. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2011. CKE, Warszawa 2011; Pregler A., Wiatrak E. (red.,) Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów Raport OBUT 2012. CKE , Warszawa 2012; Pregler A. (red.), Ogólnopolskie Badanie Umiejętności Trzecioklasistów. Raport OBUT 2013. IBE, Warszawa 2013

[2] Kalinowska A., Murawska B. (red.), Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego. Bydgoszcz 2009, s.172–174

4. Akceptowanie niekonwencjonalnych rozwiązań dydaktycznych i organizacyjnych stosowanych przez nauczycieli w pracy z dziećmi.
5. Poszukiwanie wraz z nauczycielami takich rozwiązań, które będą ograniczały pracę o charakterze sprawozdawczym, administracyjnym, na korzyść czasu poświęconego doskonaleniu pracy z dziećmi.
6. Promowanie nauczycieli wyróżniających się w pracy z dziećmi stawianiem na rozwój poznawczy oraz takich, którzy cały czas rozwijają własne umiejętności zawodowe.

Zalecenia dla przedstawicieli nadzoru pedagogicznego:

1. Przyjęcie postawy współpracy ze szkołą, manifestowanie gotowości pomocy i wsparcia w rozwiazywaniu problemów.
2. Traktowanie wyników ewaluacji pracy szkoły jako materiału do opracowania programu wsparcia, a nie jedynie oceny pracy szkoły i napiętnowanie jej złych efektów.
3. Dążenie do rozpoznawania rzeczywistych problemów, z jakimi nie radzi sobie szkoła; poprzez rozmowy z nauczycielami, rodzicami dzieci, samymi dziećmi oraz częste uczestniczenie w radach pedagogicznych, a nie poprzestanie jedynie na oglądzie sprawozdawczości szkolnej.
4. Akceptowanie wszelkich niekonwencjonalnych rozwiązań podejmowanych przez szkołę(np. w zakresie dydaktyki, organizacji pracy, działań na rzecz uczniów potrzebujących wsparcia oraz wybitnie zdolnych itp.)
5. Pokazywanie otwartości w interpretowaniu rozporządzeń wydawanych przez władze edukacyjne, a nie narzucanie szkołom i nauczycielom jednego dobrego rozwiązania, zwłaszcza gdy kłóci się ono z lokalnymi potrzebami/możliwościami instytucji.
6. Wspieranie szkoły w działaniach zmierzających do wiązania jej ze środowiskiem lokalnym.

Od czego się zaczęły zmiany?

Mało zadowalający poziom umiejętności matematycznych dzieci po pierwszym etapie edukacyjnym uruchomił potrzebę poszukiwania nowych rozwiązań. Takie działania rozpoczął wspomniany już „Program poprawy kształcenia w szkołach podstawowych i gimnazjach" z 2007 roku.

W latach 2009-2011 opracowano i wdrożono w 10 bydgoskich szkołach podstawowych projekt „Badam, poznaję, doświadczam…" w którym podstawową metodą pracy z dziećmi była metoda projektu badawczego. Przedsięwzięcie było współfinansowane ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego i powstało z udziałem ówczesnego Wydziału Strategii i Rozwoju Miasta Bydgoszczy oraz Wydziału Edukacji.

Kolejne doświadczenie, które miało znaczenie dla przyszłego działania „Dzieci myślą", to seminarium „Numicon i co dalej…" zorganizowane w 2009 roku przez CKE z udziałem polskich i zagranicznych ekspertów m.in. pomysłodawcy pomocy dydaktycznej – kształtów NUMICON - Tony Winga[3].

Zafascynowanie „Numiconem" zaowocowało kolejnym przedsięwzięciem pt. „Odkrywamy matematykę", który stało się integralną częścią projektu systemowego "Indywidualizacja procesu nauczania i wychowania uczniów klas I-III szkoły podstawowej w kontekście wdrażania nowej podstawy programowej kształcenia ogólnego" również współfinansowanego przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. W projekt związany z "odkrywaniem matematyki" zaangażowanych było kolejnych 10 bydgoskich szkół podstawowych. Podobnie, jak w przypadku projektu "Badam, poznaję, doświadczam...", odbyły się szkolenia dla nauczycieli, których celem było zachęcenie do refleksji, zapoznanie ze współczesnymi światowymi tendencjami w kształceniu kompetencji matematycznych dzieci i zainspirowanie nowymi pomysłami wzbogacającymi warsztat pracy o metody i formy pracy sprzyjające rozwijaniu myślenia matematycznego dzieci. Program warsztatów, prowadzonych przez Mirosława Dąbrowskiego dotyczył sposobów inicjowania i podtrzymywania aktywności uczniów tak, aby rozwijali swoje matematyczne umiejętności w zakresie:

- poszukiwania strategii rozwiązywania zadań tekstowych,
- sztuki rozwiązywania zadań tekstowych,
- strategii wykonywania obliczeń w pamięci,
- zaradności arytmetycznej,
- rozumienia systemu dziesiętnego,
- wyobraźni przestrzennej,
- budowania intuicji geometrycznych.

[3] Numicon to zestaw klocków/ kształtów, które m.in. ułatwiają uczniom zrozumienie struktury liczby. Badania prowadzone w Wielkiej Brytanii pokazują, że wykorzystywanie tej pomocy na etapie przedszkolnym i wczesnoszkolnym stwarza warunki do samodzielnego odkrywania i budowania przez uczniów struktury i własności liczb naturalnych, co przekłada się na ich zauważalnie wyższą arytmetyczną dojrzałość.

Warsztaty odbywały się w okresie od maja do sierpnia 2010 roku, a uczestniczyło w nich 130 nauczycielek.

W listopadzie 2010 roku Urząd Miasta Bydgoszczy we współpracy z UKW oraz Szkołą Podstawową nr 63 w Bydgoszczy zorganizował seminarium naukowo-metodyczne oraz kolejne warsztaty pod hasłem „Zrozumieć matematykę z Numiconem" z udziałem ekspertów z Wielkiej Brytanii. Do maja 2011 roku przeprowadzono także cykl spotkań „Numicon i co dalej…" w grupach nauczycieli uczących w klasach: I–III

Jak projekty przełożyły się na codzienną praktykę szkolną?

Odniosę się do wyżej opisanych działań z perspektywy dyrektora szkoły. W czasie, gdy trwały przynosiły korzystne rezultaty. Nauczyciele uczestniczący w szkoleniach, seminariach i warsztatach wykorzystali zdobytą wiedzę i doświadczenie. Stworzyli programy zajęć rozwijających zainteresowania uczniów szczególnie uzdolnionych matematycznie oraz zajęć dla dzieci z trudnościami w nabywaniu kompetencji matematycznych. Opracowany program, każdy nauczyciel wdrażał w ramach zajęć dodatkowych, w wymiarze 2 godzin tygodniowo przez pół roku. Był to projekt finansowany ze środków europejskich. Zajęcia cieszyły się dużą popularnością wśród dzieci i rodziców. Satysfakcję z prowadzonych działań odczuwali również nauczyciele.

Niestety, gdy projekt się zakończył, edukacja matematyczna podczas obowiązkowych zajęć znowu prowadzona była tradycyjnie. Nauczyciele realizowali wybrany program na ogół w sposób sztampowy, przerabiali materiał zawarty w podręcznikach i kartach pracy zgodnie z zaleceniami przewodników metodycznych. Poznane podczas projektów sposoby pracy, zadania nietypowe czy gry i zabawy matematyczne stosowali rzadko, jedynie dla urozmaicenia niektórych lekcji. Na pytanie, czemu nie wykorzystują ich na co dzień, odpowiadali, że przede wszystkim brakuje im czasu. Mówili też, że chcą uniknąć niezadowolenia rodziców z powodu niewypełnionych kart pracy podczas lekcji.

Byłam zaskoczona tak szybką rezygnacją z działań, które przecież przynosiły korzyści oraz satysfakcję zarówno uczniom, nauczycielom, jak i rodzicom. Może nauczyciele nie byli jednak w pełni przekonani do skuteczności tych nowych metod? Może traktowali je jako eksperyment dobry na zajęciach dodatkowych, ale ryzykowny na zwykłych lekcjach?

Przypomniałam sobie wtedy korespondencyjną wymianę zdań z profesorem Janem Potworowskim na temat założeń projektu „Odkrywamy matematykę" i zrozumiałam, co miał na myśli pisząc … *projekty mają strategię rozwoju krótko-, średnio- lub długofalową*. Nasza okazała się niestety krótkofalowa.

Do podjęcia kolejnej próby zachęciła mnie opowieść profesora o dwóch różnych strategiach stosowanych przez Józefa Poniatowskiego i Henryka Dąbrowskiego podczas działań wojennych. Są to strategie przeprawy bardzo dużą grupy żołnierzy na drugi brzeg rzeki. Strategia Józefa Poniatowskiego zaleca: wszyscy jednocześnie, ze sprzętem na plecach przepływamy na drugi brzeg rzeki. Strategia Henryka Dąbrowskiego zaś poleca w pierwszej kolejności rozpoznanie drugiego brzegu przez małą grupę zwiadowców. Sprawdzają oni, gdzie przejście jest łatwe, a gdzie trudne i następnie pomagają pozostałym członkom grupy bezpiecznie przeprawić się na drugą stronę rzeki. Pierwsza strategia zwykle kończy się ogromnymi stratami. Co najmniej połowa grupy tonie. Tak też się stało w przypadku naszego projektu matematycznego „Odkrywamy matematykę", do którego przystąpiło jednocześnie 130 nauczycieli z 10 szkół i ok. 3 tys. uczniów. Nauczyciele włączyli się do projektu bez względu na to, czy byli gotowi na wprowadzanie zmian, czy robili to siłą rozpędu, czy z ciekawości. W naszym projekcie zabrakło wystarczającej liczby ekspertów i tutorów. Można było liczyć na wsparcie tylko dwóch pracowników naukowych i trzech nauczycielek – entuzjastek zmiany.

W roku szkolnym 2012/2013 zdecydowaliśmy się na podjęcie kolejnej próby w poszukiwaniu nowych rozwiązań edukacyjnych. Skorzystaliśmy z możliwości wdrożenia strategii opracowanej w Instytucie Badań Edukacyjnych przez Mirosława Dąbrowskiego, Małgorzatę Zambrowską i zespół innych ekspertów różnych specjalności[4]. Ta koncepcja działania korzysta z metody wprowadzania zmiany społecznej opracowanej przez socjologa profesora Andrzeja Nowaka *Bąble nowego w morzu starego*. Metoda przypomina raczej strategię Henryka Dąbrowskiego (najpierw niewielka grupa zwiadowców).

W ramach pierwszego roku działania powstała międzyszkolna grupa samokształceniowa nazwana Bydgoskim bąblem matematycznym. Zgodnie z założeniem działania – na wstępnym etapie, tzw. etapie inicjacji i inkubacji, grupa miała być niezbyt liczna. W listopadzie 2012 roku 18 nauczycielek z 8 bydgoskich szkół podstawowych rozpoczęło współpracę w ramach działania: „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego" Działanie prowadzone było przez Instytut Badań Edukacyjnych we współpracy z Urzędem Miasta Bydgoszcz.

---

[4] Koncepcja działania „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego" w ramach projektu: **Badanie uwarunkowań zróżnicowania wyników egzaminów zewnętrznych.**

Elżbieta Wiewióra Przemyślenia i refleksje koordynatorki Bydgoskiego bąbla matematycznego, czyli jak przystąpiliśmy do działania „Dzieci myślą"

Celem działania „Dzieci myślą." jest uruchomienie procesu upowszechniania przez nauczycieli metodą tutoringu koleżeńskiego takiego podejścia do rozwijania umiejętności matematycznych dzieci, które nastawione jest na pobudzanie ich aktywności intelektualnej oraz organizowanie działań w ich tzw. strefie najbliższego rozwoju[5]. W okresie od listopada 2012 roku do lipca 2013 roku grupa samokształceniowa spotykała się regularnie (średnio raz na 2 tygodnie) i pod okiem ekspertów z Uniwersytetu Warszawskiego i Instytutu Badań Edukacyjnych doświadczała nowego spojrzenia na cele edukacji matematycznej, na własny styl własnej pracy i warsztat zawodowy. Działania Bydgoskiego bąbla matematycznego realizowane są we współpracy z władzami miasta Bydgoszcz. Szkoły zaangażowane w pilotaż otrzymały wsparcie organizacyjne i finansowe. Środki finansowe przyznane w ramach grantu na modernizację i wyposażenie wzbogaciły szkoły w pomoce dydaktyczne sprzyjające uczeniu się dzieci zgodnie z ich faktycznymi potrzebami rozwojowymi.

Od września 2013 roku projekt wkroczył w kolejny etap tzw.„pączkowania". Powstało osiem szkolnych grup samokształceniowych, których liderkami zostały członkinie pierwszego Bydgoskiego Bąbla Matematycznego. Sto dwadzieścia dwie nauczycielki, dzięki współpracy metodą tutoringu koleżeńskiego, rozpoczęły proces wprowadzania zmian metod pracy, który powinien przełożyć się na wyższy poziom matematycznych osiągnięć uczniów, zwłaszcza w obszarze myślenia matematycznego, czyli stosowania narzędzi matematycznych w różnych sytuacjach oraz prowadzenia rozumowań matematycznych[6].

Kolejny etap działania, to powstanie kolejnych grup samokształceniowych bydgoskich nauczycieli i tym samym podnoszenie poziomu umiejętności matematycznych oraz motywacji do uczenia się małych bydgoszczan. Na tym etapie działanie zostało wsparte przez Wydział Edukacji i Sportu, który współorganizuje konferencje i seminaria dla nauczycieli i jest otwarty na wsparcie kolejnych etapów działania „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego" jak i innych projektów podnoszących skuteczność nauczania i uczenia się uczniów.

Nauczycielki z Bydgoskiego bąbla matematycznego podsumowały swoje doświadczenia z pierwszego okresu uczestnictwa (listopad 2012–czerwiec 2013) w artykułach, które zawierają odniesienia i materiał ilustracyjny z codziennej pracy z uczniami i stanowią kolejne rozdziały tej publikacji. Są to unikalne opracowania, które pozwolą zrozumieć, na czym polega ta zmiana metod nauczania matematyki w klasach I–III . Jestem przekonana, że będą też inspiracją dla innych nauczycieli, entuzjastów edukacji.

Szczególne podziękowania należą się panu dr. hab. Michałowi Federowiczowi, dyrektorowi Instytutu Badań Edukacyjnych za umożliwienie realizacji pilotażu działania „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego" w Bydgoszczy. Dziękuję wszystkim pracownikom Pracowni Matematyki IBE za wsparcie, szczególnie pani Annie Pregler, która była moderatorem działań na etapie inicjacji i inkubacji Bydgoskiego bąbla oraz pani Małgorzacie Zambrowskiej i panu Marcinowi Karpińskiemu, którzy wspierali nas na etapie pączkowania i tworzenia kolejnych bydgoskich bąbli. Serdecznie dziękuję również doktorowi Mirosławowi Dąbrowskiemu z Uniwersytetu Warszawskiego, który był inicjatorem powstania Bydgoskiego bąbla matematycznego i jego mentorem.

---

[5] Strefa najbliższego rozwoju to pojęcie wprowadzone przez Lwa Wygotskiego. Według niego dziecko najlepiej zdobywa nową wiedzę, gdy stawia się przed nim zadania, których nie potrafi jeszcze wykonać samodzielnie, jednak jest już je w stanie wykonać przy niewielkiej pomocy, np. przy wsparciu radą. Strefa najbliższego rozwoju dziecka oczywiście ciągle się poszerza w miarę nabywania przez nie nowych umiejętności.

[6] Koncepcja działania „Dzieci myśl. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego" w ramach projektu: **Badanie uwarunkowań zróżnicowania wyników egzaminów zewnętrznych s.1**

BO WE MNIE JEST… LUZ

Bożena Gruszewska

Według słownika języka polskiego luz to m.in.: *wolna, niezajęta niczym przestrzeń, dużo miejsca; w budowie maszyn: wolna przestrzeń między ruchomymi współpracującymi częściami urządzenia; pełne odprężenie psychiczne, naturalność, spontaniczność, swoboda zachowania*.

Pracuję z dziećmi już ponad trzydzieści lat. Praca w szkole zawsze była i nadal jest moją pasją. Podobnie matematyka. Wielokrotnie miałam w klasie sporą grupę matematyków, którzy zdobywali medale i nagrody na różnego rodzaju konkursach matematycznych. Prowadziłam kółka zainteresowań, w tym również dla dzieci uzdolnionych matematycznie.

Pomagałam również uczniom z trudnościami w nauce i dochodziłam do wniosku, że mają oni duży potencjał. Czasami są to dzieci niezbyt śmiałe albo potrzebują więcej czasu na rozwiązanie jakiegoś problemu matematycznego.

No właśnie – CZAS.

Czas mierzony jednostką lekcyjną, bo nauczyciel musi opuścić salę, w której będzie uczyła się inna klasa, bo nauczyciel musi wypełnić swoje obowiązki jako nauczyciel dyżurujący na przerwie. Czas mierzony liczbą zagadnień i koniecznością wykazania się realizacją podstawy programowej.

To CZAS, który narzucałam dzieciom, wpływał często na motywację moich uczniów, na to, jak rozwiązywaliśmy zadania – twórczo czy odtwórczo, frontalnie, zespołowo czy indywidualnie, samodzielnie czy wspólnie.

CZAS SIĘ ZATRZYMAĆ!

Stwierdziłam, że warto dać dzieciom więcej czasu, aby aktywnością myślową mogła się wykazać większość. Gdy dzwonek przerywał nam pracę, to dzieci zaczęły decydować, czy będziemy nad danym problemem pracować dalej. A decyzja była zwykle jednoznaczna. Wracaliśmy do przerwanego zadania. Nawet po kilku dniach, kiedy niektórych „oświeciło". A może podzielili się tym problemem z domownikami i wspólnie szukali rozwiązania? A może po prostu nabrali dystansu i łatwiej było ogarnąć im jakiś problem? Już nie musiałam działać tylko z kilkoma uczniami, bo zaangażowana była niemalże cała klasa.

Nazwałabym to „luzem nauczycielskim". Jak to zadziałało na dzieci? Zaczęły się zmieniać. Chłopiec, który w przeszłości ciągle gadał, wykrzykiwał wyniki, nie czekając na innych i okazywał duże zniecierpliwienie podczas rozwiązywania zadań nietypowych, przeobraził się w lidera zespołu. Organizowanie pracy w parach i grupach dało mu szanse na wygadanie się i to na temat. Chłopiec nie przekrzykuje już swoich kolegów, skupia się na zadaniu, daje czas innym dzieciom na zastanowienie się. Nie podaje wyniku wprost, ale buduje i kieruje do rówieśników dodatkowe pytania, zagadki; cierpliwie czeka na rozwiązania innych dzieci. Sam narzucił sobie dyscyplinę, jest bardziej uważny. Chętnie zajmuje się zadaniami nietypowymi. Podobnie pozostali uczniowie.

Zawsze myślałam, że ludzie wyluzowani są mało odpowiedzialni, a luz to wręcz zaprzeczenie odpowiedzialności. Co roku, gdy zaczynały się wakacje, myślałam o następnym roku szkolnym, planowałam pracę. A przychodząc do szkoły we wrześniu, zaczynałam się stresować, czy aby ze wszystkim zdążę. Teraz jestem bardziej na luzie, ale nadal odpowiedzialna, choć już się nie stresuję, czy zdążę.

To dzieci wytyczają moje dalsze planowanie, w zależności od ich potrzeb. Wcześniej sądziłam, że w pełni wyluzować się można tylko wśród bliskich. Ale przecież szkolne dzieci to dla nas nauczycieli najprawdziwsi bliscy, jak rodzina. Spędzamy bardzo wiele czasu ze sobą, troszczymy się o siebie, zależy nam na sobie. My nauczyciele rzadko zbaczamy, nawet poza szkołą, z „tematów szkolnych", bo to one w dużej mierze wypełniają nasze życie i są dla nas ważne. A skoro w rodzinie czujemy się nieskrępowani, to wyluzowanym warto też umieć poczuć się w naszym drugim domu – w szkole – z korzyścią dla uczniów i dla nas samych.

Mam wrażenie, że my nauczyciele czasem działamy jak maszyny, w których nie ma wolnej przestrzeni między współpracującymi częściami (o której jest mowa w definicji słowa luz przytoczonej na wstępie). Często nie ma w nas wolności i spontaniczności. Nie mamy luzu lub mamy go za mało.

Czuję, że zaczynam mieć luz, a przynajmniej staram się go w sobie rozwijać. Coraz częściej wiem, że go mam i że jest on bardzo ważny. Czuję też duży powiew niczym nieskrępowanej wolność. A moi uczniowie:

- mają dużo więcej swobody w myśleniu, a ja wierzę, że rozwiążą różnorodne problemy matematyczne (nawet ci uczniowie, co do których ciągle miałam obawy, czy sobie poradzą bez mojej ingerencji);
- często rozwiązują zadania w dużo większym zakresie liczbowym niż wskazuje program, który realizuję, i naprawdę nie dzieje im się krzywda z tego powodu – wręcz przeciwnie, są bardziej zmotywowani do nauki;
- sami potrafią ocenić bezsensowność niektórych podręcznikowych poleceń czy zadań do wykonania według tzw. wzoru, który właściwie podaje gotowe rozwiązanie, więc jeśli dzieci nie „przerobią" tego typu zadań, to będzie to tylko z zyskiem dla nich i dla mnie;
- podejmują się modyfikowania zadań podręcznikowych tak, by trzeba było pomyśleć, a to jest dodatkowy powód mojego luzu, bo moi uczniowie rozwijają się, mimo że nie jesteśmy już bezgranicznie związani z pakietem edukacyjnym;
- mają dużo więcej możliwości badania, odkrywania, dostrzegania reguł i prawidłowości, wykorzystując bardzo proste pomoce dydaktyczne;
- badają i rozważają różne sposoby rozwiązania zadań, znajdując swoje własne strategie, które później prezentują innym, wyjaśniając ich skuteczność;
- mają możliwość budowania pozytywnych relacji między sobą opartych na wzajemnym szacunku, a to sprawia, że myślą i działają (nie tylko na matematyce), współpracując ze sobą coraz zgodniej, uczą się od siebie nawzajem, przekonują, argumentują, uzasadniają swoje zdanie;
- mają coraz większe poczucie własnej kompetencji, świadomości, że sobie poradzą nawet w trudniejszych sytuacjach zadaniowych, bo jak mówią „wystarczy pomyśleć";
- cokolwiek zrobią z własnym życiem w przyszłości, to po takiej matematyce, dzięki której mogą badać otaczającą je rzeczywistość, mogą dostrzegać prawidłowości, odkrywać reguły, wnioskować, szukać właściwych argumentów i przekonywać się nawzajem, ucząc się jednocześnie od siebie poprzez pełne zaangażowanie, współpracę i komunikowanie własnych przemyśleń, będą z całą pewnością robili wszystko lepiej (za Hugo Steinhausem – wybitnym polskim matematykiem). Moim szkolnym dzieciom nie funduję bezmyślnego wypełniania kart pracy czy ćwiczeń z podręcznika, co szczególnie „głośno" docenił uczeń, który po pierwszej klasie doszedł do nas z innej szkoły, stwierdzając, że „u nas jest lepiej, bo dużo rozmawiamy, myślimy i uczymy się, a w tamtej szkole to codziennie trzeba było zrobić po kilka kart pracy".

Z czasem zrozumiałam, jak ważne jest docenianie nawet najmniejszych sukcesów i postępów dzieci oraz prezentowanie ich odkrywczych pomysłów na tablicach klasowych czy szkolnych. Stwarzam uczniom możliwość prezentowania na forum klasy swoich rozwiązań i analizowania problemów matematycznych. Odgrywanie przez dzieci roli ekspertów przed innymi, stwarza możliwość świadomych wyborów i podejmowania własnych decyzji.

Nauczyciel, który dobrze przemyśli zajęcia, może mniej dawać, a zyskać od uczniów o wiele więcej (prof. Jan Potworowski).

Dobrze byłoby, aby nauczyciel po przeprowadzonych zajęciach umiał nakreślić cele i temat kolejnych (niekoniecznie kierując się pakietem edukacyjnym). Wtedy może odgrywać rolę obserwatora, a uczniowie będą się uczyli od siebie nawzajem i choć wyjdą z zajęć zmęczeni, to z pewnością z ogromną satysfakcją.

Stwarzajmy dzieciom okazję do badania, rozważania, poszukiwania, próbowania i analizowania błędów, czyli zwyczajnie pozwólmy dzieciom myśleć!

UCZNIOWIE I ICH RODZICE O EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASACH I–III

Mirosława Glaza

Matematyka budzi emocje. Gdy w rozmowie pojawiają się wspomnienia o szkole, często słyszę różne, wydawać by się mogło, żartobliwe wypowiedzi, ale odzwierciedlające jakże negatywne uczucia. Tak więc najczęstsze skojarzenia z matematyką to: *trudna, rozumiana przez nielicznych, źle uczona, znienawidzona, ważna, ale nielubiana, nudna,* … aż po: *Po co uczyć się matematyki, skoro są komputery, kalkulatory itp*. Tyle obiegowe opinie.

TNS OBOP w latach 2010–2011 przeprowadził badania „Nauka w polskiej szkole, badanie nauczycieli, dyrektorów i uczniów" (www.epodręcznik.ydp.com.pl/prezentacja wyników badania). Przeprowadzono 600 wywiadów, 1200 ankiet, 200 wywiadów telefonicznych, badając nauczanie matematyki w polskiej szkole, postawy nauczycielskie, prace domowe z matematyki itd. W podsumowaniu badań zauważono, że:

Nauczanie matematyki jest postrzegane przez wszystkie trzy badane grupy jako jeden z trudniejszych procesów. Uczniowie nie przepadają za matematyką, jest ona dla nich przedmiotem koniecznym do zaliczenia, jak również opanowania w stopniu pozwalającym zdać maturę. Jednakże postawa uczniów i nauczycieli jest silnie ze sobą powiązana i wiele zależy zarówno od relacji pomiędzy nimi, jak również wymagań, jakie kadra pedagogiczna stawia uczniom. Zaś zaangażowanie uczniów w naukę jest wprost proporcjonalne do zaangażowania nauczyciela. Podejście dyrektorów w dużej mierze koresponduje z postawą nauczycieli, z tym tylko, że dla nich ważniejsze są statystyki, wpływające na postrzeganie szkoły jako lepszej bądź gorszej w rankingach.

Trochę inaczej rzecz się ma, kiedy zaczynamy rozmawiać z uczniami klas I–III. Początek edukacji to dla większości z nich początek przygody. Ciekawe jest wszystko – od murów szkoły, przez nauczycieli, kolegów, do treści nauczania.

Chcąc poznać opinię uczniów klas I–III i ich rodziców na temat zajęć matematycznych, przeprowadziłam dwie serie indywidualnych wywiadów pogłębionych z 12 uczniami klas pierwszych, drugich i trzecich biorących udział w pilotażu działania „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego". Rozmawiałam także z rodzicami uczniów uczestniczących w projekcie oraz rodzicami uczniów niebiorących w nim udziału. Przedstawione dalej cytaty pochodzą z nagranych wypowiedzi moich rozmówców.

W rozmowach z uczniami interesowało mnie kilka zagadnień: co najczęściej robią na lekcjach matematyki, co najbardziej lubią na nich robić, ale także czego nie lubią, jak zachowują się, jeśli na zajęciach matematyki czegoś nie rozumieją, czy wymagają pomocy podczas odrabiania zadań domowych i kto wtedy im pomaga.

Rodziców zapytałam, czy ich dzieci lubią matematykę, czego nie lubią na tych zajęciach, na czym polegają zadania domowe z matematyki, czy pomagają dzieciom w ich rozwiązywaniu, czy wiedzą, że dzieci uczestniczą w projekcie oraz czy zauważyli jakąś zmianę w sposobie organizowania procesu nauczania przez nauczycielki.

Co sprawia, że dzieci chętnie i skutecznie uczą się matematyki, czyli kiedy zajęcia z matematyki są ciekawe?

Dzieci nauczycieli z Bąbla lubią matematykę. Podczas przeprowadzanych rozmów w wypowiedziach związanych z matematyką – niezależnie od tego, czy był to uczeń klasy pierwszej, drugiej czy trzeciej – pojawiały się entuzjazm i radość: …*Matma to jest dla mnie taki relaks, taki jakby masaż, ale nie prawdziwy* (masaż mózgu). Dzieci uważają zajęcia matematyczne za ciekawe wtedy, gdy stanowią dla nich wyzwanie. Na pytanie: **Co lubisz robić na matematyce?** odpowiadały: … *Najbardziej lubię mnożenie, żywe liczby i właściwie wszystko, tylko żeby nie było łatwe*… Jak wynika z wypowiedzi, tym dzieciom odpowiada sposób prowadzenia zajęć przez nauczycieli. Nauczycielki z Bąbla starają się proponować uczniom zadania, które są dopasowane do ich możliwości, ale jednocześnie są otwarte na potrzeby dzieci i chętnie modyfikują swoje propozycje, jeżeli dzieci sygnalizują taką potrzebę. Wyższy poziom trudności zadań nie zniechęca uczniów, a wręcz odwrotnie – mobilizuje i daje więcej satysfakcji. Ważnymi aspektami są tutaj wiedza i doświadczenie nauczycieli, gdyż od doboru zadań, ich stopnia trudności zależy stosunek dzieci do wykonywanej pracy. Jak zwykle skrajności: zadania zbyt trudne i zbyt łatwe, nie zapewnią sukcesu. Zajęcia prowadzone z zastosowaniem ciekawych metod i form poznawanych w czasie spotkań Bąblowiczek zostały docenione przez dzieci: … *Robimy bardzo fajne rzeczy, często robimy „bąblową matematykę", piszemy na planszach, rozwiązujemy zadania, są klocki, czasami się bawimy, robimy własne kalkulatory, gramy w gry matematyczne*…

Tym samym, dzieci potwierdziły dużą różnorodność metod i form pracy stosowanych przez nauczycielki: *Czasami mamy takie zabawy, że jesteśmy zaskoczeni, że to jest matma.* Choć powiedzenie „uczyć przez zabawę" jest znane od pokoleń, jak widać, w rozmowach ze mną dzieci potwierdziły fakt, że najlepiej i najciekawiej jest przyswajać wiedzę „przy okazji" np. zabawy. Opowiadały o tym z dużym zaangażowaniem, podając przykłady gier, ciekawych zadań z treścią i innych swoich działań. Opinie rodziców to potwierdzają: *…Lubią różne zabawy, zwłaszcza gry; gry matematyczne, klocki.*

Na uwagę zasługuje fakt, iż w opinii rodziców uczniów, którzy nie uczestniczą w Bąblu, ich dzieci lubią zupełnie co innego: *Lubią liczyć proste działania, układać ciągi np. liczby od największej do najmniejszej; Lubią zbiory, kolorowanie, przeliczanie.*

Większość dzieci z Bąbla lubi pracować w parach, na drugim miejscu stawiana jest praca w większym zespole: *Lubię pracować w zespole, bo wszyscy muszą rozmawiać i uzgodnić wyniki.* Jedynie czworo dzieci z klasy 2 stwierdziło, że woli pracować samodzielnie. Wypowiedzi uczniów wskazują, że nauczycielki skutecznie wprowadzają pracę w parach i w grupach. Potrafią tak zorganizować zajęcia, że dzieci uczą się współdziałania bez poczucia utraty swojej wyjątkowości, przekonane są o równych prawach wszystkich do wypowiedzi, ale też o prawie do błędu: *Zawsze można zapytać Panią, bo Pani zawsze chce nam pomóc (pyta, czy wszystko rozumiemy i się nie dziwi, jak czegoś nie wiemy).*

Można zatem stwierdzić, że czynnikami, które sprawiają, że dzieci chętnie uczestniczą w edukacji matematycznej, są: atrakcyjność zajęć, różnorodność stosowanych metod i form nauczania oraz akceptacja przez nauczyciela samodzielnego sposobu dochodzenia przez dziecko do rozwiązywania zadań. Z wypowiedzi dzieci wynika, że nauczycielki często stosują pracę w parach lub zespołach oraz że formy te cieszą się uznaniem dzieci. Atrakcyjność zajęć wzrasta, w opinii dzieci i rodziców, wówczas, gdy na lekcji stosowane są ciekawe pomoce dydaktyczne, zadania pobudzają do myślenia, a nauczyciel pozwala na kreatywność: *Najbardziej lubię, kiedy dobieramy się w pary i rozwiązujemy zadania, albo jak układamy klocki, ważymy, mierzymy. Klocki pomagają mi liczyć. Matematyka jest fajna lubię zajęcia z matematyki.*

Co przeszkadza w nauczaniu matematyki na pierwszym etapie edukacji, czyli czego dzieci nie lubią robić na matematyce?

Na zajęciach matematycznych dzieci lubią wszystko. Niemal wszystkie osoby uczestniczące w wywiadach, zarówno dzieci, jak i rodzice, w pierwszym odruchu stwierdzały, że nie ma takiej rzeczy, której dzieci na matematyce nie lubią. Dzieci: *Wszystko lubię, nie ma ani jednej takiej rzeczy,* rodzice: *Nigdy nie mówią, że coś jest nudne.* Wydało mi się to nie do końca wiarygodne i rzeczywiście, po chwili rozmowy, pojawiły się wypowiedzi na temat tego, co szkodzi nauczaniu matematyki.

Dzieci najczęściej wymieniały karty pracy: *Nie lubię kart pracy, bo są nudne.* To, co jest nudne, wywołuje niechęć: *Nudne też są grafy, jeden to jeszcze, ale 15! – to już jest okropnie nudne.* Nie lubią zatem np. wielokrotnego rozwiązywania podobnych przykładów na tych samych zajęciach. Uczniowie wskazali, że nie lubią zadań, których nie rozumieją lub nie potrafią rozwiązać: *Nie lubię, jak zadanie jest zbyt trudne i nie mogę go rozwiązać.*

Dzieci zdecydowanie nie lubią też pracy z podręcznikiem. Zadania tam umieszczone wydają im się zbyt łatwe, często odpowiedź jest widoczna na rysunku lub kolejne zadanie jest powtórzeniem z niewielką zmianą poprzedniego: *Nie lubię pracy w książce, bo zadania są za łatwe i wtedy jest nudno. Karty pracy z trudniejszymi zadaniami są fajne, ale te w książce nie.*

Rodzice nie mają w zasadzie żadnej wiedzy na temat tego, czego dzieci nie lubią na zajęciach matematycznych. Rodzice uczniów uczestniczących w projekcie wymienili tylko karty pracy: *Nie mówią, że coś jest trudne, tylko nudne, np. zadania w kartach pracy.* Także rodzice dzieci, które nie uczestniczą w projekcie, bardziej chyba zgadują, że są to zadania z treścią: *Zadania z treścią nie są lubiane, bo jest problem z czytaniem ze zrozumieniem, dzieci nie wiedzą, co czytają.*

Jednak, obserwując rodziców podczas wywiadu, muszę dodać, że wypowiedziom na ten temat towarzyszyło wahanie i brak pewności. Rodzice uczniów z klasy pierwszej nie zauważyli niczego, co byłoby nielubiane przez ich dzieci.

Zatem, w opinii rodziców właściwie nie ma rzeczy, których dzieci nie lubią na zajęciach matematycznych. Dzieci bardzo chętnie się angażują w zajęcia proponowane przez nauczycieli. Czynnikiem przeszkadzającym jest nuda. Dzieci nie lubią kart pracy, pracy z podręcznikiem, gdyż zawierają zbyt łatwe zadania.

Czynnikiem przeszkadzającym w nauczaniu matematyki w ocenie rodziców uczniów, których nauczyciele biorą udział w projekcie, jest podręcznik: *Podręcznik jest za prosty. Dzieci szybko liczą zadania, nie wymagają one czasu. Jest za dużo rzeczy zrobionych, połowa zadania jest wykonana.*

W ocenie podręcznika rodzice wykazują największe różnice. Rodzice dzieci z projektu uważają, że można właściwie uczyć bez podręcznika, że jest on źle skonstruowany, zadania są zbyt łatwe, podobne, nie wymagają myślenia od uczniów. Rodzice dzieci spoza projektu uważają, że podręcznik jest dobry, kolorowy, dostosowany do możliwości dzieci.

Na podstawie przeprowadzonych wywiadów mogę stwierdzić, że czynnikami, które przeszkadzają w nauczaniu matematyki, są: mała atrakcyjność zajęć, zbyt łatwe oraz zbyt trudne zadania, wielokrotne powtarzanie tych samych zadań, częste wykorzystywanie kart pracy. W opinii części rodziców czynnikiem takim jest również podręcznik. Jednocześnie mogę stwierdzić, że świadomość w zakresie czynników niesprzyjających uczeniu się matematyki jest zdecydowanie wyższa wśród rodziców uczniów, których nauczyciele uczestniczą w projekcie.

Co wpływa na rozwijanie umiejętności matematycznych u dzieci na pierwszym etapie kształcenia: kiedy zajęcia matematyczne są lubiane przez dzieci, a kiedy nie; co dzieci robią, jeżeli czegoś nie rozumieją na lekcji matematyki? Jaka jest opinia wśród uczniów i rodziców na temat zadań domowych?

Z przeprowadzonych rozmów wynika, że rozwijaniu umiejętności matematycznych sprzyja stawianie przed dziećmi wyzwań: *Lubię wymyślać różne rzeczy (np. reguły, pytania do zadań…); Lubię myśleć na lekcjach*. Uczniowie lubią zadania wymagające myślenia!

Innym czynnikiem służącym rozwijaniu umiejętności w zakresie matematyki jest pozytywne podejście dzieci do tych zajęć, nawet w sytuacji, gdy czegoś nie rozumieją. Dzieci nie wykazują strachu ani obaw związanych z faktem, że muszą nauczyciela prosić o dodatkowe wyjaśnienia. Zresztą, zdaniem dzieci, na zajęciach matematycznych przeważnie rozumieją poruszane zagadnienia oraz polecenia nauczyciela. Na pytanie: **co robisz na zajęciach matematycznych, jeżeli czegoś nie rozumiesz**, odpowiadały: *Ja raczej wszystko rozumiem*. Rzadko bywa z tym kłopot, a jeśli się pojawi, wtedy pytają nauczyciela – najczęściej indywidualnie proszą nauczycielkę o wyjaśnienia. To zawsze wystarcza: *Czasami proszę Panią o pomoc, Pani podchodzi i wyjaśnia, co mam zrobić*. W rozmowie dzieci nie wykazywały, że fakt, iż czegoś nie rozumieją, jest dla nich stresujący. Na uwagę zasługuje pełne zaufanie do nauczycieli: *Pytam Panią i ona mi tłumaczy jeszcze raz, a wtedy już jest wszystko dobrze; Mówię Pani, że nie rozumiem, a Pani mówi, co mam zrobić, podchodzi do mnie i po cichu tłumaczy, wtedy już wiem*. Dzieci nie mają oporów, aby – w razie potrzeby – zapytać nauczyciela o coś jeszcze raz, prosić o pomoc. Potwierdza to tezę, że na lekcjach prowadzonych przez nauczycielki z Bąbla błędy postrzegane są jako przyczynek do własnych poszukiwań, a nie okazja do napiętnowania ucznia i wykazania jego niewiedzy.

Czy zadania domowe sprzyjają kształtowaniu umiejętności matematycznych? W opinii badanych rodziców zdecydowanie tak. Są one odbierane bardzo pozytywnie przez rodziców, jako forma sprawdzenia w domu, czy dziecko zrozumiało treści poruszane na lekcji. Przy odrabianiu zadań domowych obecni są rodzice. Jeżeli trzeba, pomagają, zawsze sprawdzają, czy zadanie zostało zrobione prawidłowo.

Istnieją jednak wyraźne różnice pomiędzy klasami uczestniczącymi w projekcie i tymi nieobjętymi Bąblem. W przypadku klas nieobjętych programem dominują, zdaniem rodziców, zadania w formie wypełniania kart pracy i zadania z podręcznika: *To są najczęściej zadania w książce*. Rodzice jednej z klas pierwszych (nierealizującej projektu) twierdzili, że dzieci nie otrzymują zadań domowych i byli z tego powodu niezadowoleni: *Z jednej strony to dobrze, że oni są tacy chronieni, bo to sześciolatki, młodsi itd. Ale jak tak dalej pójdzie, to będzie dramat, bo oni nie są przyzwyczajani do systematycznej pracy, zadań domowych*. W klasach objętych Bąblem zadania domowe dzieci przeważnie odrabiają same (rodzice je sprawdzają), wiedzą, jak to robić, pomoc potrzebna jest niekiedy przy rozwiązywaniu zadań z treścią: *Na tym etapie nie potrzeba pomocy, Pani rewelacyjnie tłumaczy. Dzieci przychodzą do domu z wiedzą, co mają robić. W szkole jest to spokojnie wytłumaczone; Jeżeli są jakieś proste działania – sprawdzam. Pomagam przy zadaniach z treścią.*

Rodzice odczuwają potrzebę dodatkowej pracy z dziećmi w domu, nawet gdy nie ma zadania domowego: *Czasami, kiedy nie ma zadania domowego, sama coś zadaję córce*. W ten sposób upewniają się, że dzieci rozumieją zadania, w swojej ocenie utrwalają to, co robił nauczyciel: *Uważam, że wiadomości muszą być utrwalane, nie wolno uczyć za szybko.*

Czynnikami, które wpływają na rozwijanie umiejętności matematycznych w opinii dzieci i ich rodziców, są: sposób pracy nauczyciela pozwalający na samodzielne rozwiązywanie problemów przez uczniów, stworzenie takiej atmosfery na lekcjach, która sprzyja poszukiwaniu rozwiązań bez obawy odniesienia porażki. W ocenie rodziców ważnym czynnikiem są zadania domowe. Pozwalają one, zdaniem rodziców, utrwalić treści omawiane na lekcjach.

Z czego rodzice są zadowoleni, a z czego nie w edukacji matematycznej?

Rodzice, których dzieci uczestniczą w projekcie, bardzo wysoko oceniają pracę nauczycieli. Co prawda mieli kłopot w zauważeniu zmian w stylu pracy nauczycieli, ale widzą, że zajęcia są inaczej prowadzone niż w przypadku starszych dzieci. Rodzice doceniają fakt, że nauczycielki pozwalają na swobodny rozwój dzieci. Zwrócili również uwagę na to, że dzieci na lekcjach odważnie próbują rzeczy nowych, nieznanych. Zadowolenie rodziców budzą lekcje otwarte: *Byłam na lekcji, zobaczyłam, jak to się odbywa. Lekcja była* *o grach matematycznych, bardzo mi się podobało. Wiem teraz, o co chodzi, jak syn coś opowiada*. Nowe podejście stosowane przez nauczycielki budzi sympatię, rodzice chętnie się z nim zapoznają, wykazują zrozumienie. Lekcje otwarte sprawiają, że rodzice jeszcze bardziej ufają nauczycielom i stosowanym przez nich metodom nauczania. Zwrócono również uwagę na ocenianie uczniów. Rodzicom podoba się system nagradzania za myślenie. Uważają, że nagradzanie mobilizuje dzieci do wysiłku, zaspokaja potrzebę uznania dla ich kreatywności.

Rodzice uczniów nieuczestniczących w programie zauważają, że nauczyciele nie wykorzystują potencjału dzieci: *W podręczniku jest ograniczenie liczenia do 10. Mój syn liczy do 100, dodaje i odejmuje powyżej 100. Zwłaszcza, gdy liczy pieniądze.* **A wykorzystuje się to na lekcjach?** – *Jak widzę, to nie, ani na lekcjach, ani w podręczniku nie ma tabliczki mnożenia*. Jednak zdania rodziców są podzielone. Niektórzy uważają, że nie wolno wyprzedzać treści zawartych w programie: *Uważam, że wiadomości muszą być utrwalane, nie wolno uczyć za szybko, dzieci mają swoje tempo, powolutku też się wszystkiego nauczą.*

Rodzice uczniów realizujących projekt, poza krytyką podręcznika, nie wskazali niczego, co budziłoby ich niezadowolenie.

Podsumowując…

Dzieci bardzo chętnie uczestniczyły w wywiadach. Mówiły dużo, często robiąc dygresje. Z rozmów z nimi wynika, że lubią szkołę, nauczycieli i kolegów. Zajęcia matematyczne są postrzegane przez nie jako najciekawsze ze wszystkich. Uczniowie manifestowali swoistą dumę z faktu, iż mogą pochwalić się bardzo dobrymi osiągnięciami z matematyki, zapewniały, że niewiele jest sytuacji na matematyce, kiedy czegoś nie rozumieją. Równie chętnie rozmawiali rodzice. Jednak nie mają oni zbyt rozległej wiedzy na temat tego, co dzieci robią na lekcjach. Dzieci niechętnie rozmawiają o szkole, odpowiadają właściwie tylko na stawiane przez rodziców pytania.

Podsumowując, mogę stwierdzić, że uczniowie w klasach I–III lubią matematykę, nie odczuwają przed nią strachu. Zajęcia matematyczne mogą być ciekawe, kreatywne, pobudzać do myślenia. Takich zajęć oczekują dzieci, ale trochę obawiają się ich rodzice. Dlatego wyzwaniem stojącym przed szkołą jest niewątpliwie zmiana sposobu myślenia o nauczaniu matematyki nie tylko nauczycieli, ale również rodziców.

Mirosława Glaza
starsza specjalistka do spraw projektów w WE UM Bydgoszczy, w zawodzie 14 lat.

CO POTRAFI PIERWSZOKLASISTA? UCZNIOWIE NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASACH I–III

Izabela Boroń

Jestem wychowawczynią klasy I szkoły podstawowej w Bydgoszczy. W klasie liczącej dwudziestu ośmiu uczniów, troje z nich realizuje obowiązek szkolny jako sześciolatki. Uczestnicząc w programie „Dzieci myślą", miałam okazję do innego spojrzenia na matematyczne problemy edukacyjne i utwierdzenia się w przekonaniu, że moje działania mogą być efektywniejsze.

W październiku, w drugim miesiącu nauki szkolnej, przy okazji omawiania zwierząt domowych i opieki nad nimi uczniowie przynieśli maskotki. Jednym z zadań było przeliczenie przyniesionych zabawek. Uczniowie siedzieli w kręgu i przeliczali po cichu pluszaki leżące na wykładzinie. Następnie każdy głośno mówił, ile jest zabawek. Było dużo błędnych odpowiedzi, dlatego zaczęliśmy przeliczać je różnymi sposobami:

– Klaudia zaproponowała pogrupowanie maskotek *Psy do psów, koty do kotów, króliki do królików* itp.
– Mateusz ustawił maskotki w koło.
– Laura pogrupowała je według wielkości.
– Kacper ustawił maskotki w rzędach.
– Kilku uczniów zaproponowało ustawienie w pary.

Po wielokrotnym przeliczaniu podanymi sposobami uczniowie odkryli, że można ustawić maskotki po 3, po 4 i po 5.

Dzieci same odkryły, jak wiele jest sposobów przeliczania. Przekonały się, że jest ich bardzo dużo, a każdy może liczyć inaczej, w najwygodniejszy dla niego sposób. Dla każdego ucznia inna metoda liczenia może być skuteczna, prowadząca go do poprawnego wykonania zadania. Wnioski wyciągnięte na tej lekcji uczniowie wykorzystywali przy wielu okazjach.

Na jednej z listopadowych lekcji w czasie porównywania liczb nie poprzestałam tylko na samym porównywaniu[1], lecz rozpatrywaliśmy wiele możliwości na bazie wybranego porównania. Na początku lekcji uczniowie otrzymali kostki do gry i sznureczek. W parach rzucali kostkami, po czym porównywali wyrzucone liczby, układając ze sznureczka znak < lub >. Każda para przedstawiała swoje działanie. Wspólnie z dziećmi sprawdzaliśmy poprawność wykonanego zadania. Jeden z przykładów: 3 < 5 zapisałam na tablicy. Posłużył on nam do głębszej analizy.

– *Czy mogę zmienić liczbę 3 tak, aby znak i liczba 5 pozostały bez zmian?*
Oliwier: *Może być 2.*
– *Co się stało z liczbą 3?*
Oliwier: *Zmniejszyła się o 1, bo 3 – 1 = 2.*
– *Czy dalsza część zadania się zmieniła?*
Oliwier: *Nie, bo 2 < 5.*
– *Czy ktoś ma jeszcze inne pomysły? Czy są możliwe jeszcze inne zmiany?*
– *Co by było, gdybyśmy do każdej z liczb 3 i 5 dodali po 1?*
Zuzia: *Byłoby 4 i 6, bo 5 + 1 = 6 i 3 + 1 = 4.*
– *Czy znak by się zmienił?*
Uczniowie: *Nie.*
Zuzia: *4 < 6.*
Mateusz: *To są i tak te same liczby, bo tu dodaję 1 i tam dodaję 1.*
Zuzia: *Znak by się nie zmienił, bo by było o tyle samo więcej. Bo obie liczby zwiększyły się o tyle samo.*
– *Co by było, gdybyśmy od liczby 3 i od 5 odjęli po 1. Od każdej odjęli 1.*
Kacper: *Teraz by było 2 i 4, a 2.jest mniejsze od 4, 2 < 4.*
Uczniowie: *Znak by się nie zmienił, bo zmniejszyło się o tyle samo, tam o 1 i tam też o 1.*

Miałam obawy, że nie wystarczy mi pomysłów do pobudzania dzieci do szukania rozwiązań, rozmawiania o tym, co robią, przedstawiania swoich sposobów, wyjaśniania tego, co robią. Moje obawy były bezpodstawne, gdyż dzieci bardzo pozytywnie zaskakiwały mnie coraz częściej i to w momentach, kiedy najmniej się tego spodziewałam. Coraz odważniej podejmowałam działania, byłam otwarta na propozycje uczniów, uważnie słuchałam, analizowałam.

Grudzień, nudna lekcja wprowadzająca liczbę 9. Nie sądziłam, że wydarzy się coś niezwykłego. Jednak, kiedy zadałam pytanie, czy dzieci coś wiedzą o tej liczbie, to uczniowie od razu podjęli temat. Poszłam za dziećmi.
Patrycja: *Ja wiem, że liczba 9 jest nieparzysta.*
Artur: *Jak odwrócimy 9, to będzie 6.*

[1] Według pomysłu A. Kalinowskiej, Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, CKE, Warszawa 2010.

– *Co to znaczy: liczba nieparzysta?*
Mateusz: *Nieparzysta to znaczy, że nie ma pary.*
– *My już znamy liczby. Pomyślcie, czy ktoś z was wie, które z liczb są nieparzyste?*
Olimpia: *Jedynka.*
– *Jaka jeszcze?*
Klaudia: *Piątka.; Ala: Trójka.; Zuzia: Siedem.*
– *Sprawdźmy na koralach, która liczba jest parzysta, a która nie. Jak byście to sprawdzili?*
Zuzia: To *będzie tak: nieparzysta, parzysta, nieparzysta, parzysta (pokazuje na koralach).*
– *Zobaczcie, co zauważyła Zuzia – liczby są ułożone na przemian: nieparzysta i parzysta. Proszę mi powiedzieć, które liczby są parzyste.* (W tym momencie uświadomiłam sobie, że zamiast pozwolić dzieciom do końca wyjaśnić, odkryć, powtórzyłam po Zuzi.)
Ala: *Dwa i cztery.*
– *A kto wymieni inne?*
Klaudia: *Sześć, osiem.*
– *Powiedzmy po kolei liczby parzyste.*
Uczniowie: *2, 4, 6, 8.*
– *Pokażmy to na koralach. Po ile koralików będziemy przesuwać?*
Uczniowie: *Po dwa przesuwamy.*
– *Przesuwamy po dwa. Bierzemy na jedną stronę sznurka, przesuwamy po dwa i liczymy.*
Uczniowie: *2, 4, 6, 8, 10.*
– *Czy możemy liczyć dalej?*
Uczniowie: *12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30.*
– *A teraz liczymy nieparzyste. Przekładamy korale na początek. Liczymy.*
Uczniowie: *1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.*
– *Brawo, jak wiele się dzisiaj nauczyliśmy!*
Zosia: *A ja wiem, że liczb jest nieskończoność.*
Oskar Ł.: *A ja wiem, jak zapisać nieskończoność. To taka odwrócona ósemka* (zapisuje na tablicy).

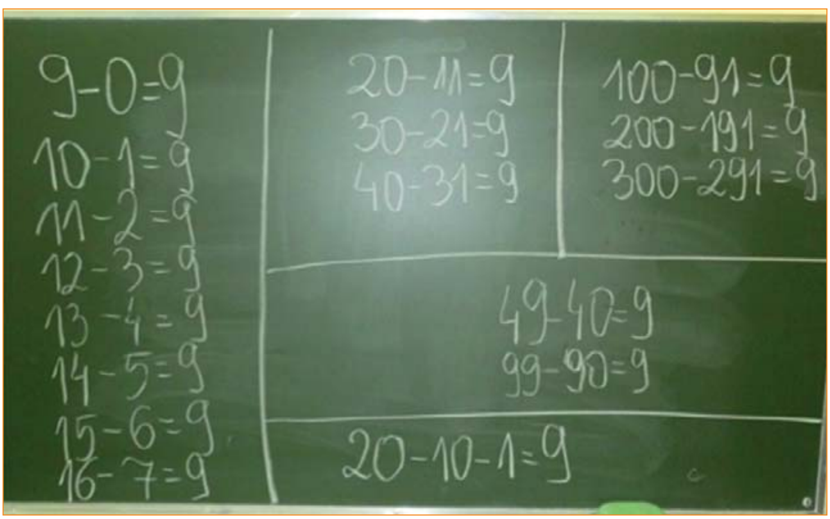
W czasie tej lekcji dzieci poznały liczby parzyste i nieparzyste oraz dowiedziały się, że liczb jest nieskończenie wiele. Wyszłam z lekcji bardzo zadowolona, bo pierwszoklasiści pokazali, jak wiele mają do powiedzenia.

Na kolejnej grudniowej lekcji dotyczącej rozkładu liczby 9 na składniki, po przedstawieniu na patyczkach różnych możliwości pokazania tej liczby, Mikołaj cichutko z odrobiną niepewności zapytał: *Czy można liczbę 9 przedstawić za pomocą odejmowania? 10 – 1 = 9.*

– *Mikołaj zaproponował nam bardzo ciekawe zadanie, czy można przedstawić liczbę 9 za pomocą odejmowania np. 10 – 1 = 9. Rozdam wam kartki. Spróbujcie to zrobić. Zapiszcie takie działania na odejmowanie, aby wynik był 9. Mikołaj już nam podał jedno działanie. Napiszcie inne.*

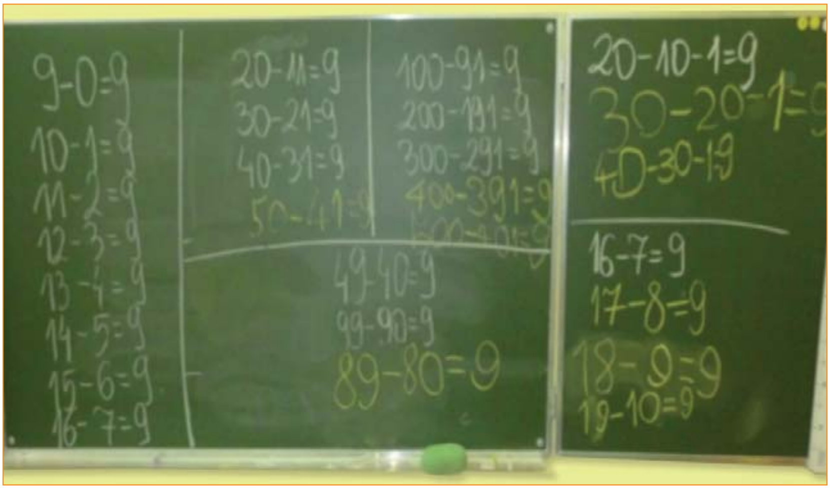
Uczniowie samodzielnie zapisywali inne działania na kartkach. Chętni czytali swoje propozycje. Zebrałam kartki. Wśród propozycji były działania z liczbami trzycyfrowymi, działania z innym wynikiem niż 9 oraz kilka działań z błędami.

Na kolejnej lekcji zapisałam zaproponowane przez uczniów przykłady działań.



– *Czy coś ciekawego zauważyliście?*

Dzieci zauważyły, że liczby są ułożone po kolei: 1, 2, 3, 4, 5, 6,…, a potem 10, 11, 12,…, tam są 20, 30, 40, a tam 100, 200, 300, i podkreślały, że można tak aż do nieskończoności.



Poprosiłam je o zapisanie bez liczenia pasujących dalszych działań. Zrobiły to z chęcią i bez trudności.

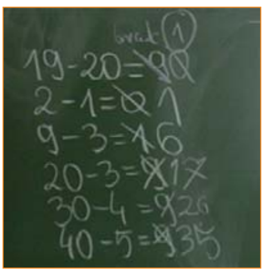
Na kolejnej lekcji zajęliśmy się działaniami, w których pojawiły się błędy. Zapisałam je na tablicy w „oryginalnej" wersji. Chętni uczniowie sami poprawiali błędy, licząc w pamięci lub na liczydle. W pierwszym działaniu 19 – 20 = 9 stwierdzili, że nie można tego obliczyć, gdyż jest za mało, brakuje 1.

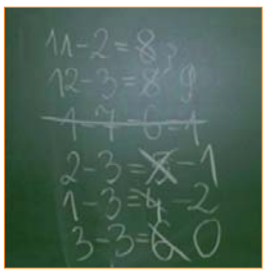
Kacper: *Od mniejszej liczby nie można odejmować większych.*

Jednak, gdy doszliśmy do działania 2 – 3, Artur (sześciolatek) powiedział, że wie, ile to jest i zapisał –1.

– Skąd wiesz, że to jest –1?

Artur: *Bo ja to wiem z gry komputerowej.*



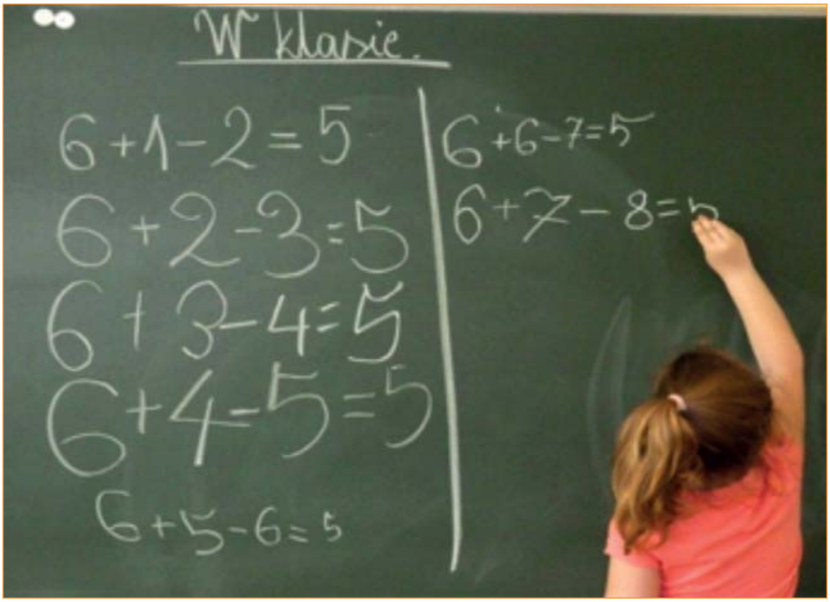


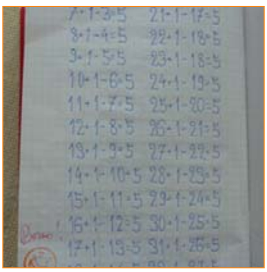
Po tej informacji również poprawa błędów w działaniach 1 – 3 = –2 i 9 – 11 = –2 nie sprawiła kłopotów. Jednak działania 9 – 12 i 9 – 13 oraz 1 – 7 – 6 okazały się na ten moment zbyt trudne.

Uczniowie przekonali się jednak, że również można odejmować od mniejszych liczb większe, a wynik będzie wówczas „na minusie", takich używali określeń. Po tych rozważaniach Kacper zmodyfikował swoje prawo: **„Najlepiej od liczby większej odejmować mniejszą, bo łatwiej można obliczyć wynik"**. Prawo to jako pierwsze pojawiło się na naszej gazetce klasowej. Uczniowie bardzo często przypominali je sobie w czasie rozwiązywania zadań, za każdym razem zaznaczali, że jest to prawo, które odkrył Kacper.

Po dwóch miesiącach, uczniowie w czasie wykonywania jednego z ćwiczeń, próbowali zapisać liczbę 5 w inny sposób. Zaproponowali zapis 05, a następnie zaczęli zapisywać działania. Rozdałam im wówczas kartki i poprosiłam, aby wszyscy zapisali znane im działania z wynikiem 5. Tym razem uczniowie proponowali nawet działania z liczbami pięciocyfrowymi. Kuba zaproponował 18 przykładów, w tym 13 działań wg zasady: 30 – 20 – 5 = 5, 40 – 30 – 5 = 5, aż do 150 – 140 – 5 = 5. Jedna z uczennic, która do niedawna popełniała wiele błędów, tym razem zaproponowała dziesięć poprawnych działań.

Po sprawdzeniu prac uczniów zajęłam się wspólną analizą najtrudniejszych dla dzieci przykładów. Okazało się, że najwięcej kłopotów sprawiło im obliczenie 6 + 1 – 2 = 5. Zapisałam zadanie na tablicy, a chętni uczniowie dopisywali ciąg dalszy. W tym czasie uczniowie z zeszytach prawie na wyścigi zapisywali kolejne działania. Na tablicy było kilka działań, a niektórzy w zeszytach mieli już ponad dwadzieścia kolejnych przykładów. Dla tego najtrudniejszego przykładu dzieci wymyśliły dwie kontynuacje: 6 + 1 – 2 = 5, 6 + 2 – 3 = 5 itd. oraz 6 + 1 – 2 = 5, 7 + 1 – 3 = 5 itd.





Gdyby lekcja trwała dłużej, innych zaproponowanych prawidłowości w tym działaniu zapewne byłoby więcej, gdyż spostrzegawczość i pomysłowość dzieci w odkrywaniu zasad jest ogromna.

W klasie były uczennice, które miały duże problemy z działaniami matematycznymi. Dziewczynki myliły liczby, nawet liczenie na patyczkach, koralach odbywało się bardzo wolno, nierzadko z błędami. Dwie żywo uczestniczyły w lekcji, poszukując zasady. Zgłaszały chęć zapisania dalszego ciągu działań, jednak były one nieprawidłowe. Jest to dla nich duży krok do przodu, gdyż do tej pory niechętnie się zgłaszały i odpowiadały na pytania.

Pod koniec stycznia rozpoczęłam pracę z sekwencjami. W tym czasie zadania podręcznikowe dotyczyły wykonywania obliczeń w zakresie 10. Zaczęłam od zadań z rytmami obrazkowymi. Najpierw na tablicy pojawił się rytm składający się z dwóch powtarzających się obrazków: lodów i motyla.

– *To jest szlaczek. Czy ktoś coś zauważył?*

Natalia: *Obrazki kojarzą mi się z latem, bo jest lód i są motyle, a jak jest upał to można jeść lody. Ten szlaczek się powtarza.*

Wiktoria: *Jest lód, motyl, lód, motyl, lód, motyl.*

– *A gdybyśmy chcieli go powtarzać, to jakby wyglądał dalej?*

Mateusz: *Lód, motyl i tak dalej.; Wiktoria: I tak do nieskończoności.*

– *Powtarza się co ile?*

Oliwier: *Co dwa.*

– *Proszę powiedzieć, na którym miejscu jest motyl.*

Bartek: *Na drugim, czwartym i szóstym.*

– *Czy ktoś by mógł mi powiedzieć bez układania szlaczka, na którym miejscu dalej będzie motyl?*

Oliwia: *Na 8 miejscu, 10, 12, 14, 16, 18, 20.*

– *Czy ktoś jeszcze może ten szlaczek przedłużyć? Czy mogę jeszcze dopisać jakąś liczbę?*

Kuba: *22, 24, 26, 28,;* Oskar K.: *30, 32, 34, 36.*

– *Co zauważyliście?*

Patrycja: *Wszystkie te liczby są parzyste.*

– *Sprawdźmy, na których miejscach są lody.*

Klaudia: *1, 3, 5, 7, 9.;* Martyna: *11, 13, 15, 17, 19.;* Zuzia: *21, 23, 25, 27, 29.;* Jagoda: *31, 33, 35.*

Uczniowie ustalili, że lody są w miejscu liczb nieparzystych, a motyle – parzystych.

– *Spróbujcie rozwiązać zagadkę. Jaki obrazek będzie na 54 miejscu?*

Artur: *Motyl.*

– Dlaczego?
Wiktoria: *Bo liczba 54 jest parzysta.*
– *Jaki obrazek będzie na 100 miejscu?*
Sonia: *Motyl, bo jest parzyste.*
– *A co będzie na 67 miejscu?*
Mikołaj: *Lody, bo to liczba nieparzysta.*
– *Co będzie na 153 miejscu?*
Kuba: *Lody.*
– *Skąd to wiecie, przecież te liczby nie są zapisane?*
Oliwia: *Bo nieparzyste, mają na końcu 3, po tym poznałam.*
Zuzia: *Po tych ostatnich liczbach można poznać.*
– *Jaki obrazek będzie na 232 miejscu?*
Ala: *Motyl, bo na końcu jest 2.*

Kolejny rytm składał się z pięciu obrazków: lód, jabłko, czapka, wiewiórka, motyl. Rytm był dwa razy powtórzony, trzeciej sekwencji był tylko fragment.
Oliwia: *Są dwa takie same szlaczki i kawałek.*
Klaudia: *One się powtarzają. Jest lód, jabłko, czapka, wiewiórka, motyl i tak dalej.*
Mateusz: *Powtarza się co 5.*

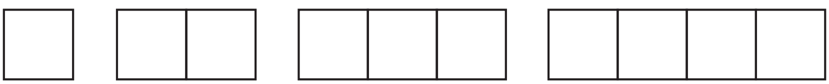
Na kolejnej części lekcji uczniowie ustalili, na którym miejscu jest:
- lód: 1, 6, 11, 16, 21, 26
- jabłko: 2, 7, 12, 17, 21, 27
- czapka: 3, 8, 13, 18, 23, 28
- wiewiórka: 4, 9, 14, 19, 24, 29
- motyl: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Bardzo szybko dzieci zauważyły, że z góry na dół liczby ułożone są po kolei, bez trudność ustaliły, jaki obrazek znajduje się na 57, 83, 100, 145, 181 miejscu.

Kolejne zadanie dotyczyło figur geometrycznych. Uczniowie pracowali w zespołach.

Polecenie brzmiało: ***Przyjrzyj się tym przykładom: Jak będzie wyglądać następna układanka z tej serii? Z ilu kwadratów będzie zbudowana? Ile patyczków będzie w jej wnętrzu? A ile będzie na obwodzie? Ilu łącznie patyczkóvw potrzeba do jej ułożenia? A ilu patyczków potrzeba do zbudowania układanki o numerze 8? A o numerze 11? Czy dostrzegasz jakieś prawidłowości dotyczące tych układanek? Zapisz je. Zastanów się, z czego one wynikają.***

1. 2. 3. 4.



Uczniowie w zespołach najpierw z patyczków układali piątą figurę. Na początku nie bardzo wiedzieli, jak to zrobić. Omówiliśmy to zadanie. Uczniowie stwierdzili, że są to kwadraty i następna figura też zbudowana jest z kwadratów. Nie wiedzieli, co to znaczy obwód. Wyjaśniłam, im więc, że są to patyczki otaczające figury na zewnątrz.

Dzieci przeliczały patyczki, aby odpowiedzieć na pytania. Samo przeliczanie nie było trudne. Następnie układali ósmą taką figurę. Szukając odpowiedzi na pytania, również przeliczali patyczki. Potem ułożyły jedenastą figurę.

Uczniowie stwierdzili, że figury składają się z połączonych kwadratów. Zauważyli również, że „jest jeden patyczek mniej niż jest kwadracików".

W lutym zadania dotyczyły serii działań[2]: Wpisz wyniki. Co łączy działania w każdej serii? A czym się one różnią? Dopisz następne pasujące obliczenia.

9 + 2=	6 + 1=	5 + 1=	6 + 2=	9 + 5=
8 + 2=	6 + 2=	6 + 2=	5 + 3=	8 + 4=
7 + 2=	6 + 3=	7 + 3=	4 + 4=	7 + 3=
6 + 2=	6 + 4=	8 + 4=	3 + 5=	6 + 2=
5 + 2=	6 + 5=	9 + 5=	2 + 6=	5 + 1=

Uczniowie pracowali w zespołach. Po skończonej pracy następowało omówienie wykonanych zadań, zauważonych prawidłowości, a następnie – po sprawdzeniu przeze mnie wykonanych działań – samodzielna poprawa błędów przez uczniów. Dzieci dopisały od jednego do sześciu działań według odkrytych zasad nad i pod podanymi działaniami. Omówiliśmy zauważone zasady w poszczególnych kolumnach:

Laura: *W pierwszej do kolejnych liczb dodajemy 2. Wyniki zmieniają się po kolei o 1. Od góry wyniki idą w dół.*

Mikołaj: *W drugiej też jest po kolei. Do 6 dodaje się kolejne liczby i wynik zmienia się o 1.*

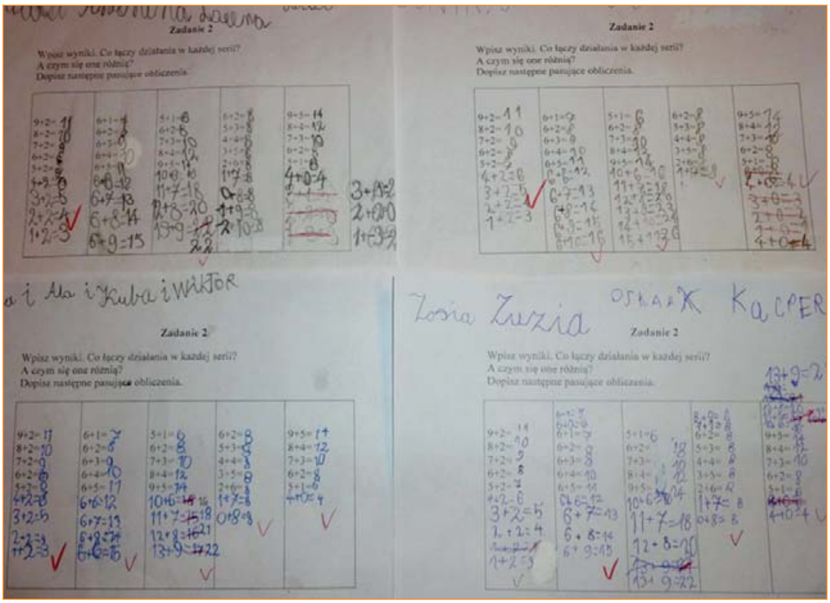
Natalia: *Liczby ułożone są po kolei od najmniejszej do coraz większej.*

Oskar Ł.: *W trzeciej kolumnie pierwszy rząd zaczyna się od 5, a drugi od 1. Liczby idą po kolei. Wynik zmienia się o 2.*

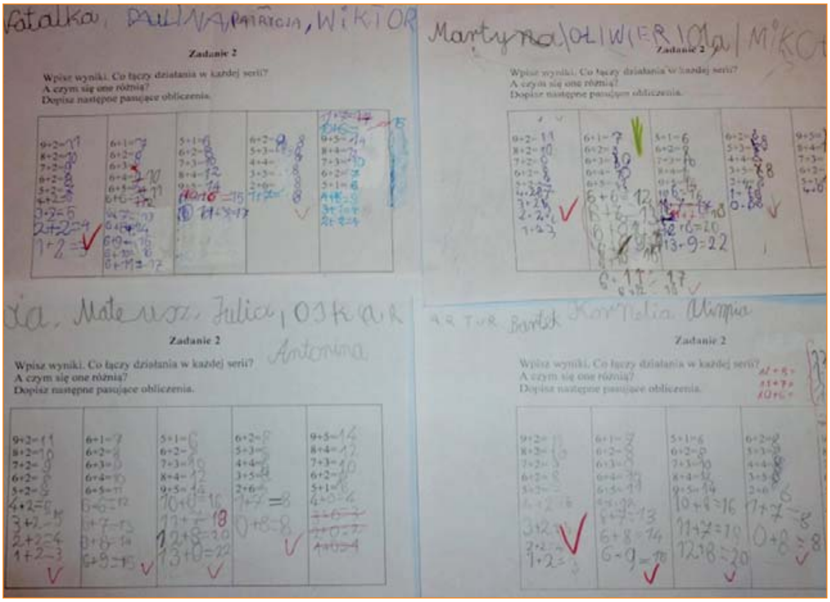
Ala: *W czwartej w pierwszym rzędzie liczby maleją o 1, a dodawane rosną o1 i wynik jest zawsze 8.*

Oliwier: *Tu też jest inna kolejność liczb, raz 5+3, a potem 3+5.*

Oskar Ł.: *W piątym słupku obie liczby idą w dół, zmieniają się o 1, a wynik zmienia się o 2.*



[2] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 149.



Zespół w składzie: Oliwia, Antonina, Laura, Julia w ostatnim słupku zapisał działania z liczbami ujemnymi. Laura była autorką działań 3 + –1 = 2; 2 + –2 = 0; 1+ –3 = 2. Jednak, pomimo odkrytej zasady, nie potrafiła poprawnie zapisać ostatniego działania. Wynik w działaniu 1+ –3 = –2 pomógł znaleźć Artur (sześciolatek, który rozpoczął w klasie zainteresowanie liczbami ujemnymi. To on znał wynik działania 1 – 2 = –1 i pokazał, że od mniejszych liczb można odejmować większe).

Sześcioletnia Zuzia przyglądając się tym działaniom, powiedziała: *Była liczba –1, może być –100, to odkąd zaczynają się liczby z minusem? To chyba od nieskończoności.*

Poniższe zdjęcia pokazują efekty pracy zespołów:

Kolejne zadanie dotyczyło słupków z odejmowaniem:

9 – 2 =	3 – 2 =	6 – 6 =	6 – 2 =	9 – 7 =
8 – 2 =	4 – 2 =	6 – 5 =	7 – 3 =	8 – 6 =
7 – 2 =	5 – 2 =	6 – 4 =	8 – 4 =	7 – 5 =
6 – 2 =	6 – 2 =	6 – 3 =	9 – 5 =	6 – 4 =
5 – 2 =	7 – 2 =	6 – 2 =	10 – 6 =	5 – 3 =

Uczniowie dopisywali pod i nad słupkami działania według odkrytych zasad. Zespół w składzie: Artur, Bartek, Olimpia, Kornelia w pierwszym słupku dopisał:

4 – 2 = 2 3 – 2 = 1 2 – 2 = 0 1 – 2 = –1 –1 – 2 = –3.

Zespół w składzie: Zosia, Kacper, Oskar, Zuzia dopisał w trzecim słupku kolejne działanie nad podanymi: 6 – 7 = 1. Po skreśleniu przeze mnie błędnego wyniku, po krótkiej naradzie poprawili błąd i napisali 6 – 7 = –1. Natomiast w czwartym słupku uczniowie dopisali:

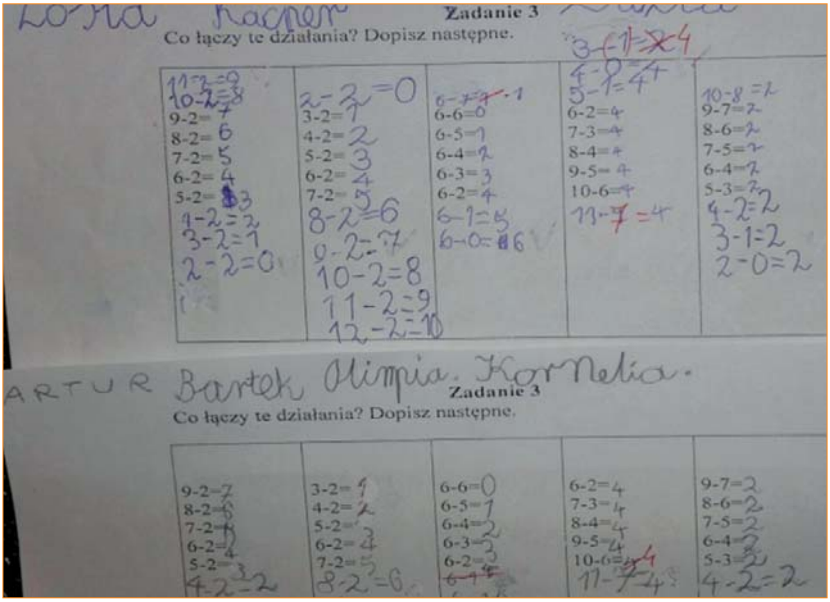
3 – –1 = 2 4 – 0 = 4 5 – 1 = 4.

Jak widać, w pierwszym działaniu pojawił się błąd. Uczniowie nie wiedzieli, jaki ma być wynik, pomimo odkrytej zasady, że wszystkie do tej pory działania z tej serii miały wynik 4. Z pomocą przyszedł Artur – ekspert od liczb ujemnych. Po chwili namysłu wyjaśnił: *Skoro jest minus i liczba na minusie, to nie można odjąć, tylko trzeba dodać 1, więc 3 – –1= 4.* To było kolejne prawo, które pojawiło się w gazetce.

Zespół w składzie: Oliwia, Mateusz, Julia, Oskar, Antonina zapisał działanie 1– 2 = –1. Artur podsumował: *Bo –1 jest mniejsza od zera.*

Tego typu działanie pojawiło się już na lekcji, jednak Julia nie zrozumiała, dlaczego 1– 2 = –1. Na moje pytanie: Czy ktoś mógłby wyjaśnić Julii, dlaczego tak jest? z pomocą ruszyła Zuzia. Z ochotą podeszła do tablicy, zamieniła odejmowaną dwójkę na dwie jedynki: 1 – 1 i 1 = –1, po czym skreśliła dwie pierwsze jedynki i wyjaśniła: *Jeden odjąć jeden i jeden zostaje, jedna jedynka z minusem, dlatego wynik jest –1.*

Na to Kuba powiedział: *Co to za ciekawa matematyka!*



Dokonując analizy zadań, uczniowie podsumowali słupki:
Artur: *Wszędzie jest zasada. W pierwszym słupku od każdej liczby trzeba odjąć 2. Wyniki zmieniają się o 1*
Zuzia: *W drugim od kolejnych liczb trzeba odjąć 2. Wyniki zmieniają się o 1.*
Mateusz: *W trzecim słupku pierwsze liczby są zawsze 6 i odejmujemy od największej do najmniejszej. Wyniki są od najmniejszego do największego, zmieniają się o 1*
– *Dlaczego tak się dzieje?*
Artur: *Zmienia się o jeden liczba środkowa, wynik zmienia się też o 1.*
Oliwia: *W czwartym słupku wszystkie wyniki są 4. Dlatego, że te działania tworzą takie liczby, że wynik jest 4.*
Kornelia: *W piątym słupku wyniki to same dwójki.*
Antosia: *Jak jest odjąć, to zabieramy.*
Oskar Ł: *Na ostatnim jest od 9 w dół i od 7 w dół. W parach różnią się o 2. To dlatego są same dwójki w wynikach.*

Według programu powinniśmy w tym czasie liczyć w zakresie10. Dlaczego jednak mamy trzymać się zakresu liczbowego, skoro dzieci same chętnie wykraczają poza 10, a nawet 100? Warto rozwiązywać zadania trudniejsze, nietypowe, bo one pozwalają na rozwijanie umiejętności matematycznych uczniów. Dzieci pracując tradycyjnie, mają niewiele możliwości odkrywania prawidłowości i zasad. Wielokrotnie uczniowie wychodzili z lekcji zadowoleni, uśmiechnięci, gdyż mogli doświadczyć czegoś nowego, zauważyć prawidłowości, odkryć prawo.

W marcu, na jednej z lekcji, rozdałam uczniom kafelki, na których narysowane były różne wzorki. Zanim skończyłam rozdawanie kopert, dzieci już zaczęły układać własne wzorki. Jak zawsze pomysłów było wiele.



Jednym z zadań było ułożenie przykładowego wzoru składającego się z trzech powtarzających się elementów.
– *Ile jest potrzebnych kafelków do ułożenia wzoru?*
Uczniowie: *12*

Natalia: *Liczyłam po kolei.*
Sonia: *Liczyłam po 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12.*
Zosia: *Liczyłam 6 i 6.*
Laura: *Liczyłam po 4: 4, 4 i 4 i to jest 12.*
– *Ile jest potrzebnych kafelków do ułożenia czterech takich figur?*
Oliwier: *16, bo 12 + 4 = 16.*
– *Ile jest potrzebnych kafelków do ułożenia siedmiu takich figur?*
Bartek: *28, liczyłem czwórkami: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.*
– *Ile jest potrzebnych kafelków do ułożenia dziesięciu takich figur?*
Oliwier: *4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.*
Ala: *Ja liczyłam po kolei (pokazywała na kafelki, gdy się skończyły, to liczyła od początku).*
Patrycja: *Są różne sposoby liczenia.*

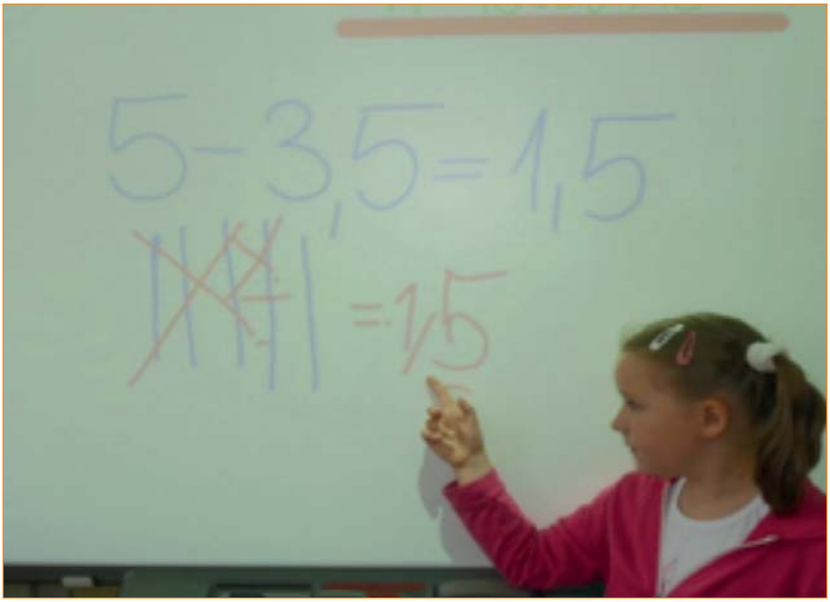
Uczniowie coraz chętniej dzielili się swoją wiedzą znacznie wykraczającą poza to, co proponowane jest w podręcznikach. Chcieli się czasami nią pochwalić, tym co dostrzegli, a nawet zaskoczyć innych swoimi pomysłami. Chętnie odkrywali to, co było do tej pory nieznane oraz nazywali i formułowali prawa matematyczne. Uczniowie, którzy na początku nie zawsze chcieli odpowiadać na pytania, coraz chętniej brali udział w lekcjach.

W czerwcu Bartek przyniósł wagę sprężynową o zakresie ważenia do 15 kg. Spakowaliśmy tornistry i zważyliśmy je. Każdy zapisywał wagę swojego tornistra na tablicy. Na moje pytanie: *Co możemy zrobić z tymi pomiarami?* uczniowie sformułowali następujące pytania:
Artur: *Ile ważą wszystkie tornistry razem? (Obliczyliśmy, że suma wynosi 84 kg.)*
Oliwier: *Ile ważą dwa tornistry?; Mikołaj: Ile ważą trzy tornistry?*
Wiktor: *Ile ważą cztery tornistry?; Zosia: Ile waży dziesięć tornistrów?*
Zuzia: *O ile więcej waży tornister najcięższy od najlżejszego?*
– Jak to obliczyć?
Artur: *Od 5 kg trzeba odjąć 3,5 kg i to jest 2,5 kg, nie, jednak będzie 1,5 kg.*
– *To jest bardzo trudne zadanie, jak to można sprawdzić, czy na pewno dobrze obliczyliśmy?*

Przez dłuższą chwilę czekałam cierpliwie na propozycje. Oczekiwałam raczej sprawdzenia za pomocą dodawania, a tymczasem Zuzia zaproponowała coś zupełnie innego. Podeszła do tablicy narysowała 5 kresek i zademonstrowała:
– To jest pięć kresek, czyli 5 kg, skreślam trzy kreski, czwartą dzielę na pół i skreślam jedną połówkę i zostaje jedna kreska nieskreślona i pół nieskreślonej, czyli 1,5.

Pomysłowość i prostota rozumowania dzieci wciąż mnie zadziwiają i zachwycają.

Pierwszoklasiści nadal sami odkrywali prawa matematyczne. W czasie dodawania kilku liczb Patrycja z Bartkiem ustalili prawo przemienności dodawania: *Można dodawać liczby w różnej kolejności, a wynik będzie ten sam: 4 + 3 + 1 = 8, 4 + 1 + 3 = 8, 1 + 4 + 3 = 8.* Prawo to, tak jak każde inne, zostało zamieszczone na tablicy w sali.



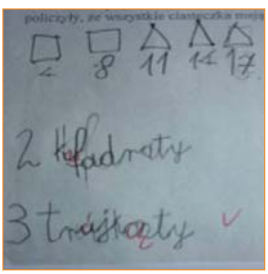
W maju zajmowaliśmy się ważeniem. Mieliśmy dwie wagi, odważniki i różne przedmioty przyniesione przez dzieci. Zadałam dzieciom pytanie: Co możemy zrobić? Uczniowie najpierw układali na szalkach wybrane przedmioty i obserwowali, który przedmiot jest cięższy, a który lżejszy. Następnie Oliwia zaproponowała zważenie przedmiotów za pomocą odważników (ponieważ mamy odważniki gramowe, więc wyniki przekraczały setkę).

Po zważeniu kilku rzeczy Zosia zaproponowała: *Ile to razem? Natomiast Mateusz: O ile jedna rzecz jest cięższa, od drugiej?*

Na kolejnej lekcji ważyliśmy między innymi paczkę kawy. Paczka ważyła 261g. Mateusz zauważył, że na paczce jest podana waga 250 g. Po krótkiej dyskusji Oskar powiedział, że musi to być waga samej kawy i w ten sposób doszliśmy do pojęć netto, brutto, tara. Te pojęcia na dobre zadomowiły się w klasie. Gdy sprawdzaliśmy, ile waży 1 litr wody, a nasze próby nie były zbyt dokładne, na moje pytanie: *Dlaczego musiałam dolewać lub odlewać trochę wody? Kuba od razu zauważył: Bo pani ważyła brutto, wodę razem z butelką.*

Po lekcjach z ważenia uczniowie ustalili kolejne prawa:

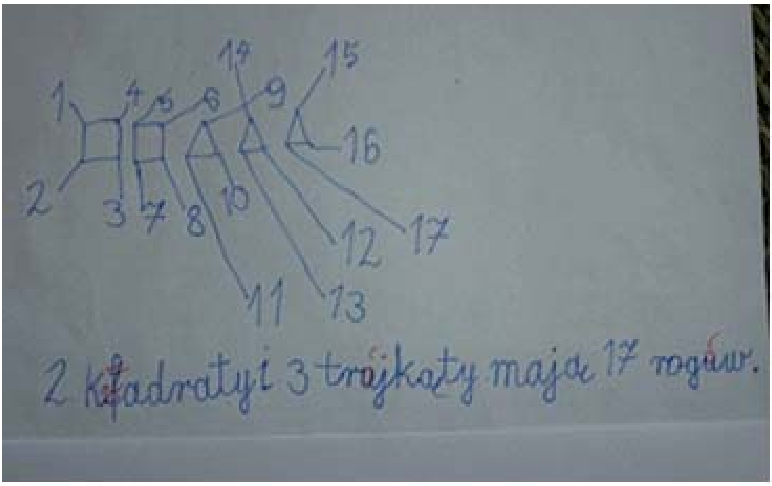
- prawa Artura „Jak ważymy rzeczy, gdy waga idzie na dół, to coś jest cięższe, a jak w górę, to jest lżejsze"; „Jeżeli coś jest lżejsze, to druga rzecz jest cięższa"
- prawo Kuby „Pół kilograma piszemy 0,5 kg".
- prawo Kuby, Natalii i Klaudii „Waga towaru to netto. Waga opakowania to tara. Waga towaru i opakowania to brutto".
- prawo Oskara Ł. „Odważniki są takie same jak monety 1 kg, 2 kg, 5 kg".
- prawo Zuzi „Bez zera nie byłoby 10, 20, 30 i nieskończoności".
- prawo Olimpii „Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nazywamy jednościami. Liczby w woreczkach po 10 nazywamy dziesiątkami".

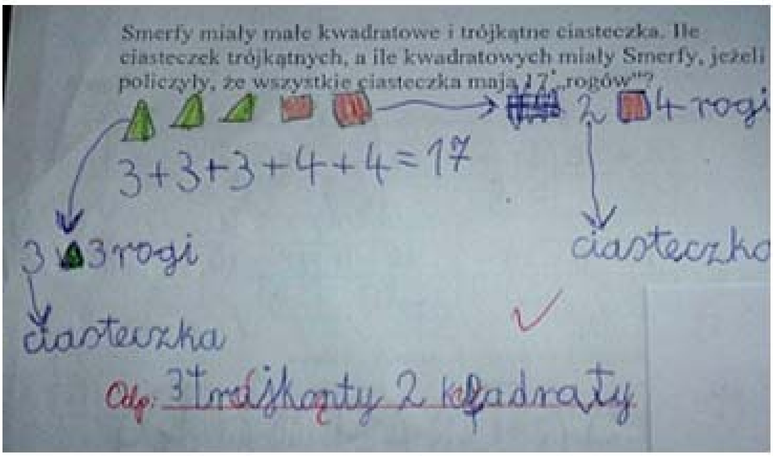


Rozwiązywaliśmy również zadania nietypowe[3]. Jedno z nich uczniowie rozwiązywali samodzielnie, mając do pomocy klocki Dienesa. Zadanie brzmiało: Smerfy miały kwadratowe i trójkątne ciasteczka. Ile ciasteczek trójkątnych, a ile kwadratowych miały Smerfy, jeżeli policzyły, że wszystkie ciasteczka mają 17 „rogów"? Uczniowie różnymi sposobami dochodzili do rozwiązania. Bardzo ucieszyłam się z faktu, że nawet uczniowie, którym rozwiązywanie zadań sprawia dużo kłopotów, podjęli próby rozwiązania tego zadania.

Po samodzielnym rozwiązaniu zadania, wspólnie sprawdzaliśmy za pomocą figur geometrycznych poprawność rozwiązania. Zanim skończyliśmy omawianie zadania, Mateusz z Oskarem ułożyli z ciasteczek „szlaczek", oczywiście reszta podjęła pomysł i powstały różne wzory:

[3] Iwona Leśniewska, Zadania na medal, http://zs27bydgoszcz.szkolnastrona.pl/sp.



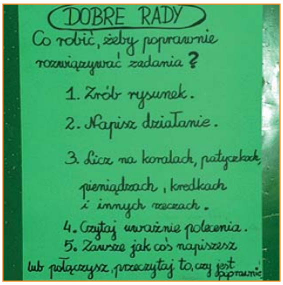


W maju po analizie sprawdzianów rocznych uczniowie zastanawiali się nad tym, co zrobić, aby dobrze rozwiązywać zadania. Powstała lista „Dobrych rad":

DOBRE RADY

1. Zrób rysunek. (Zuzia)
2. Napisz działanie. (Mikołaj)
3. Licz na koralach, patyczkach, pieniądzach, kredkach i innych rzeczach. (Zuzia, Artur, Mikołaj)
4. Czytaj uważnie polecenia. (Kuba)

5. Zawsze jak coś napiszesz lub połączysz, przeczytaj to, czy jest poprawnie. (Mateusz)
6. Sprawdź, czy nie masz błędów. (Zuzia)
7. Stosuj się do ustalonych praw. (Oliwia)



I tak minął pierwszy rok nauki, pełen zaskakujących i nieoczekiwanych sytuacji. Rok, w którym uczniowie mogli zmierzyć się z wieloma nietypowymi zadaniami, wykazać się pomysłowością, proponować swoje zadania i prawa, badać, sprawdzać, dzielić się swoimi spostrzeżeniami i wiedzą. W czasie lekcji bardzo często zadawałam pytania, które zachęcały uczniów do przemyśleń, dzielenia się własnymi doświadczeniami, do samodzielnego dochodzenia do rozwiązań, odkrywania praw. Ja natomiast cierpliwie czekałam, dając im szansę na odnalezienie własnej drogi. Pierwszoklasiści żywo uczestniczyli w lekcjach. Chętnie podejmowali wyzwania, z radością odkrywali nowe często nieznane im obszary. Uczniowie nieśmiali coraz śmielej odpowiadali na pytania i zgłaszali swoje propozycje. Uczniowie mający trudności, odważnie podejmowali samodzielne próby rozwiązywania zadań, a nawet z powodzeniem zaczęli odkrywać prawa. Sukcesy motywowały ich do podejmowania wysiłku. Zdolni nie tylko zdobywali wiedzę i umiejętności, ale swoją pomysłowością zarażali innych.

Na zmianie mojego stylu pracy skorzystali wszyscy – także ja sama.

Izabela Boroń
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 56 w Bydgoszczy, w zawodzie 28 lat.

DLACZEGO ZMIENIŁYŚMY SPOSÓB KSZTAŁTOWANIA UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNYCH UCZNIÓW W KLASACH I–III

Mirosława Cikorska

Podsumowanie po roku wspólnego „bąblowania"

Jestem nauczycielką edukacji wczesnoszkolnej. Od października 2012 roku uczestniczę w pracach grupy samokształceniowej „Bąbel Bydgoski", która powstała w wyniku pilotażu działania „Dzieci myślą. Jak skutecznie uczyć dzieci myślenia matematycznego", prowadzonego przez Instytut Badań Edukacyjnych. Celem nauczycieli biorących udział w programie było wypracowanie i wprowadzenie do swojej pracy z uczniami pierwszego etapu edukacyjnego nowego podejścia do rozwijania umiejętności matematycznych.

Trochę wspomnień …

Czerwiec 2011

Spotkanie z doktorem Mirosławem Dąbrowskim. Matematyka, którą kiedyś lubiłam. Nie! Matematykę lubię od zawsze. Klocki, pchełki, zabawy liczbowe, kostki, karty, gry planszowe, maszynki liczbowe, myśleć, myśleć, myśleć. Myślę i działam, działam i myślę, i zadaję sobie pytanie: Czy moi uczniowie na lekcjach matematyki myślą?!

Październik 2011

Spotkanie, na którym prezentowane są kształty Numicon i to, co można z nimi robić na lekcjach matematyki. Jeszcze jedno spotkanie, na którym chce się być, a czas mija za szybko. Czy moi uczniowie na lekcjach matematyki „chcą być"? Czy na moich lekcjach matematyki czas biegnie za szybko? Coraz więcej pytań, które zmuszają mnie do autorefleksji.

Wrzesień 2012, klasa III

Uczniowie z rocznika 2002. Nowa podstawa programowa. Tablica interaktywna. Nie zgadzam się z usłyszaną opinią, że jest niepotrzebna. Niepotrzebne są multibooki. Według mnie zabijają kreatywność i pomysłowość nauczycieli. Przyzwyczajamy się, że mamy w pakiecie wszystko, co jest nam potrzebne na lekcjach – na lekcjach prowadzonych według schematów. Jest multibook, są karty pracy i podręczniki, ćwiczenia uzupełniające i inne. Czy uda się zmienić przyzwyczajenie?

Kwiecień 2012, przygotowuję się do dyrektorskiej obserwacji

Klasa III. Wybieram oczywiście matematykę. Chcę pokazać biegłość uczniów w zakresie tabliczki mnożenia i dzielenia do 100. Tablica interaktywna pomaga mi uczynić uczniów współprowadzącymi lekcję. Przenosi nas z jednej aktywności w drugą. Mnożą i dzielą. Wykonują niezliczone ilości obliczeń. Co im na to pozwala? Kostki do gry, ćwiczenia interaktywne, karty. Zmieniłam nieco dla swoich potrzeb propozycję zabawy z wykorzystaniem zwykłych kart do gry, pozwalając uczniom, w zależności od ich poziomu umiejętności, na odnoszenie sukcesów. Każda z grup otrzymała talię kart z mniejszym lub większym zakresem liczbowym. W roli sędziów wystąpili uczniowie sprawni w rachunku pamięciowym. W czasie lekcji stopniowo wzmaga się hałas. Dzieciaki, które już dawno zapomniały o obecności pani dyrektor, coraz głośniej podają wyniki. Spierają się, kto zabiera karty, dyskutują z sędzią, uzasadniają swoje zdanie. Pani dyrektor wyraźnie mnie obserwuje. Nie każdy lubi hałas na lekcji. A ja? Jestem zadowolona. Nie ukrywam uśmiechu. Krążę między stolikami. Obserwuję, jak uczniowie działają i myślą .Wiem, że lubią lekcje matematyki. Zainteresowanym polecam przykłady gier z wykorzystaniem kart dostępne na stronie: www.trzecioklasista.edu.pl.

1 września 2012

Klasa pierwsza integracyjna, zaczynam nowy rok.

9–10 listopada 2012

Pierwsze spotkanie Bąbla Bydgoskiego.

Listopad 2012

Zmieniłam znaną dzieciom zabawę, którą stosuję od dawna. Dzieci poruszają się zgodnie z rytmem instrumentu perkusyjnego lub muzyki. W czasie pauzy tworzą koła po tyle osób, na ile wskazuje liczba na kartoniku. Następnie wybrany uczeń przelicza liczbę dzieci w każdym kole. Zmianę zaczęłam od tego, że każdy uczeń wybrał sobie maskotkę do zabawy i poruszał się zgodnie z podanym rytmem. Następnie dzieci dobierały tyle maskotek, ile im brakowało do danej liczby. Kolejnym zadaniem było tworzenie grup z liczbą maskotek odpowiadającą liczbie pokazanej na kartce.

Zabawę rozpoczęłam od liczby 1, a zakończyłam na liczbie 0. W tym momencie nastąpiło lekkie zawahanie się, po czym dzieci zaczęły odkładać maskotki do koszyka.

Październik–grudzień 2013

Z perspektywy czasu i doświadczenia, uważam, że zbyt dużo czasu straciłam na monografie liczb. Moc przyzwyczajenia okazała się wielka. Czułam się jednak mało komfortowo. Tłumaczyłam sobie, że jest to tylko nauka pisania cyfr. Zbyt kurczowo trzymałam się podręcznika, który z jednej strony dawał mi poczucie bezpieczeństwa, ale z drugiej strony przeszkadzał i blokował moje działania. Stopniowo udawało mi się odkładać podręcznik na półkę, ponieważ okazywał się zbyt łatwy. Wracałam do niego od czasu do czasu. Organizowanie pracy dzieci w oparciu o materiały według mojego pomysłu wymagało ode mnie przygotowywania się do każdej lekcji. W praktyce okazywało się, że kierunku aktywności moich uczniów i tak nie da się do końca przewidzieć. Wykorzystywałam także okazje matematyczne skłaniające dzieci do działania. Zaczęłam pozwalać dzieciom na stosowanie wybranych przez nie same zakresów liczbowych. Dostrzegłam, że większość uczniów nie tylko rozpoznaje, ale i potrafi pisać liczby dwu- i trzycyfrowe. Pozostała grupa doskonale przelicza i zapisuje liczby w zakresie 20.

Grudzień 2013

Skonstruowanie wagi na lekcji techniki (pomysł na wagę został zaczerpnięty z realizowanego w klasie pakietu edukacyjnego), stworzyło okazję do ważenia zabawek i maskotek. Szacowanie, co jest lżejsze, co cięższe. Sprawdzanie, co waży więcej, co mniej. Co jest lżejsze od…, co jest cięższe od…

Sposób umieszczenia woreczków i trzymania wagi przez Wiktorię stał się okazją do formułowania przez dzieci wskazówek stanowiących instrukcję wykonania i obsługi wagi. Sprawdziły one działanie pustej wagi i stwierdziły, że patyczek musi być prosty (tzn. ustawiony poziomo), a woreczki umieszczone na jego końcach. Patrycja, która ma duże trudności z koncentracją uwagi i z doprowadzeniem pracy do końca, była przez cały czas skupiona na swoich czynnościach i nie prosiła o pomoc. Tym razem odniosła sukces.

Dalsze lekcje związane były już z prawdziwą wagą. Uczniowie nie tylko działali i zapisywali wyniki (także za pomocą liczb dwucyfrowych), ale i wymieniali się spostrzeżeniami, poprawiali swoje błędy, porównywali wyniki, pracowali indywidualnie, w parach i grupach.

Stopniowo każdy wytwór pracy dzieci stawał się okazją do matematycznego działania: liczenia, przeliczania, porównywania, stosowania liczebników porządkowych, rozkładu liczb na składniki, układania zadań itp. Oto kilka przykładów:

„Karmienie kotków" i rozkład liczby 4:


„Karmienie" kotków i liczebniki porządkowe:


„Bociany wracają z ciepłych krajów" i używanie sformułowań: *tyle samo, więcej, mniej, o tyle więcej, o tyle mniej oraz układanie pytań „O ile więcej/mniej bocianów…?"*:


Matematyczna okazja, która otworzyła mi oczy, czyli jak postanowiłam zaufać uczniom

Styczeń 2013

Zbieramy nakrętki na wózek inwalidzki dla chorej dziewczynki. Mamy ich już sporo. Zadałam więc dzieciom, przy okazji zsypywania nakrętek do większego worka, następujące pytanie: *Zanim wrzucimy nakrętki do pojemnika w holu I piętra, co możemy z nimi zrobić?* Padły następujące propozycje: możemy je dodawać, odejmować, liczyć, układać z nich litery lub cyfry, mnożyć, zapisywać działania, segregować na kupki według koloru, kształtu (nakrętki były różnej wielkości, kształtu i koloru), budować piramidy. Moje pytanie miało ukryty cel. Chciałam, aby dzieci policzyły, ile zgromadziły nakrętek. To nie znaczy, że byłam do końca pewna, że im się to uda. Nadia, Patrycja, Lilka i Zosia postanowiły najpierw posegregować nakrętki według kolorów. Z tej rady skorzystały wszystkie dzieci.



Paweł, Szymon P., Filip i Oskar mieli więcej kapsli w różnych kolorach.
Co możemy dalej zrobić z nakrętkami? – zapytałam.
Paweł: *Policzyć i zastanowić się, gdzie jest więcej.*
Oskar: *Każdy może policzyć swój kolor.*
– *Ale jak się nie pomylić i co zrobić, żeby potem można było łatwo sprawdzić, ile jest nakrętek?* – dopytywałam.
Szymon P.: *Układać na piątki.*

Z pomysłu Szymona skorzystali wszyscy chłopcy z jego grupy, z wyjątkiem Oskara, który pogrupował nakrętki po 10.
Szymon T.: *Ja też o tym pomyślałem, żeby liczyć po 5 lub 10, bo u Patryka zauważyłem.*
Lilka: *A my nie możemy policzyć.*
Szymon P.: *Układajcie po 5 lub 10.*
Szymon T.: *Szybciej będzie układać po 10.*
Patryk: *A ja nie mam 10 (miał 9).*
Adrian: *To ułóż piątki.*
Ja: *Ile masz piątek?*
Patryk: *Jedną piątkę i jedną czwórkę. Razem mam 9.*
Adrian: *Żeby łatwo było sprawdzić, możemy zapisywać, ile mamy kapsli. Moich kapsli jest 57.*
Szymon T.: *Policzyłem nakrętki Adriana. Mówił, że ma 57, a ma 55.*
Adrian: *Szymon ma 89 nakrętek, a było 91. Powiedział o 2 za dużo.*
Paweł: *Ja zapisuję zielone nakrętki zielonym kolorem.*
Nadia: *Ja mam 62 niebieskie*

Dzieci bez kłopotu zapisywały liczby dwucyfrowe. Swobodnie je odczytywały w trakcie sprawdzania liczby nakrętek innych grup. Na koniec powstała tabela zbiorcza na tablicy i w zeszytach uczniów (rzędy oznaczone kolorami). Na dole zostały zapisane liczby zgodnie z poleceniami wymyślonymi przez dzieci (por. niżej).
Ja: *Co możemy zrobić dalej z tymi liczbami? O co się zapytać?*
Adrian: *Która liczba jest parzysta, a która nieparzysta?*
Paweł: *Wymieszać wszystkie liczby i układać od 11 do 89.*
Ja: *Dlaczego w taki sposób?*
Paweł: *Od najmniejszej do największej.*
Zadanie Pawła uczniowie wykonali w parach. Najpierw liczby zostały zapisane na karteczkach, a następnie ułożone w odpowiedniej kolejności. Nie obyło się bez błędów, które zostały wspólnie zweryfikowane.


Szymon P.: *Zacząć układać od największej do najmniejszej.*
Szymon T.: *Przemienić miejscem cyfry, żeby utworzyć nowe liczby.*
Wanessa: *Można wypisać liczby nieparzyste od największej.*
Adrian: *Wypisać liczby parzyste obojętnie jak i nieparzyste tak samo.*

Co mogłam zmienić? Zabrakło mi odwagi, żeby policzyć, ile mamy nakrętek razem. Zauważyłam natomiast, z wielkim zdziwieniem, że dzieci swobodnie posługiwały się liczbami dwucyfrowymi, zapisywały je i odczytywały, jedne jako np. sześćdziesiąt jeden, inne jako sześć jeden i wskazywały na 61. Postanowiłam zaufać swoim uczniom i pozwolić im na samodzielne dokonywanie wyboru zakresu liczbowego, w którym chcą działać, co może być dla mnie sporym wyzwaniem.

Własne strategie pierwszaków, czyli to, co nadaje sens wszelkim zmianom

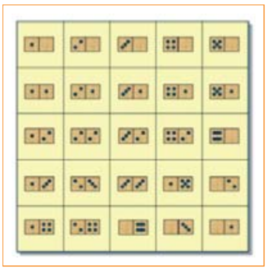
Samodzielność, własne pomysły i strategie. To jest to, na co się czeka. Na skalę indywidualnych możliwości, ale jakże cennych. Wywołują uśmiech i dodają sił.

Listopad 2013, uśmiech pierwszy – Adrian i Szymon rozmawiają o tym, kto wygrał

Gry planszowe dostępne na stronie: www. trzecioklasista.edu.pl pozwalają na naukę rachunku pamięciowego poprzez wspólną zabawę. Podczas gier nie mam trudności z nakłonieniem dzieci do liczenia, bo to nie to samo, co uzupełnianie nudnych ćwiczeń.

Liczba działań, które uczniowie wykonują, jest także większa. Gry uatrakcyjniają zajęcia. Uczą budowania strategii. Stwarzają możliwość odnoszenia sukcesów i jednocześnie uczą przegrywania. W trakcie trwania projektu nauczyłam się nowego podejścia do gier – gry nie służą tylko do grania…

Jedną z pierwszych była gra planszowa „Od 1 do 6" (plansza obok).



Co można było z nią zrobić?

Zanim dzieci zaczęły grę, dokładnie poznały planszę poprzez zabawy typu:

1. Poszukiwanie danej liczby na planszy.
2. Zakrywanie kartonikami z cyframi danego pola, np. kartonikiem z cyfrą 6 pola 4 i 2, 6 i 0, kropek itp.
3. Zapisywanie działań na dodawanie w zakresie 6.
4. Szukanie odpowiedzi na pytania typu „Jak są ułożone liczby na planszy?"
5. Samodzielne zadawanie pytań do gry.

Oskar i Filip kończą pierwsza rundę. Kto wygra? Oskarowi zadałam pytanie: *Ile oczek musisz wyrzucić na kostce, żeby zająć ostatnie pole?* Okazji do formułowania podobnych pytań skłaniających dzieci do myślenia w czasie trwania gry jest bardzo dużo.

Patrycja i Karina mają problem z dodawaniem. Ta gra pozwala im na dokonywanie obliczeń poprzez przeliczanie kropek na kościach domina. Są bardzo zaangażowane. Każda z nich ma możliwość odniesienia sukcesu.

1+0	2+0	3+0	4+0	5+0
1+1	2+1	3+1	4+1	5+1
1+2	2+2	3+2	4+2	6+0
1+3	2+3	3+3	1+5	0+2
1+4	2+4	0+6	0+3	0+1

Gra ma dwie wersje: łatwiejszą – z kamieniami domina i trudniejszą – z działaniami. Druga wersja gry, oprócz doskonalenia techniki rachunkowej, pozwoliła na badanie przez dzieci następujących zagadnień:

1. Ile jest pól z daną liczbą?
2. Których pól jest najwięcej, a których najmniej?
3. Jakie liczby występują w poszczególnych rzędach?
4. Kto najszybciej znajdzie pola z daną liczbą?
5. Szukanie odpowiedzi na pytania typu: Wyrzuciłam/-łem liczbę 5. Na jakim polu mogę stanąć?

Szymon T. i Adrian spróbowali sformułować zasadę określającą sposób ułożenia liczb na planszy.

Szymon: *Pól z wynikiem 6 jest 6, z wynikiem 5 jest 5, z wynikiem 4 jest 4 i tak dalej.*
Ja: *Jesteś pewien? Czy można to sprawdzić?*
Adrian: *Możemy policzyć po kolei.*
Prawdziwość twierdzenia Szymona sprawdzali wszyscy uczniowie. Po kolei przeliczali zajęte pionkami pola z liczbami 6, 5, 4, 3, 2 i 1. Jednocześnie jedno z dzieci pisało na tablicy:

6 – 6 pól, 5 – 5 pól, 4 – 4 pola, 3 – 4 pola, 2 – 3 pola, 1 – 2 pola.

Wniosek Szymona: *Na planszy liczba 6 ma 6 pól, liczba 5 – 5 pól, liczba 4 – 4 pola. Liczby 1, 2 i 3 mają o jedno pole od siebie więcej.*

Grę „Od 1 do 6" wygrywał zawodnik, który zajął najwięcej pól. Na zakończenie swojej gry Szymon i Adrian dokonali jeszcze jednego „odkrycia": Szymon po zakończeniu gry: *Wygrałem! Ale nie musimy liczyć swoich pionków na planszy.*
Ja: *To skąd wiesz, że wygrałeś?*
Szymon: *Bo mi zostały 2 pionki, a Adrianowi 3. Obaj mieliśmy na początku po 15. To znaczy, że ja położyłem na planszę więcej pionków.*
Ja: *Jeżeli zostały ci 2 pionki, to ile położyłeś na planszy?*
Szymon: *13.*
Ja: *A Ty Adrian?*
Adrian: *12 pionków.*

Spostrzeżenie chłopców wydaje się bardzo oczywiste! Dla mnie było bardzo ważne. Oznaczało, że dzieci zaczynały uważniej przyglądać się swoim działaniom i analizować je. Gra planszowa, o której opowiadali chłopcy, wymagała liczenia w zakresie 6. Jednak obaj, dokonując podsumowania, wykonywali działania w zakresie drugiej dziesiątki.

Marzec 2013, uśmiech drugi – Filip i sadzenie cebuli

C – jak cebula. Nauka pisania liter „c, C". Zakładamy w klasie hodowlę cebul. Każde z dzieci po kolei sadzi swoją cebulę w prostokątnej plastikowej doniczce. Następnie rozwiązujemy zadania o Celi, która też sadziła cebule. Zadania ułożyłam sama, wykonałam też odpowiednie karty pracy.

Strategia Filipa: *A ja sobie piszę tak po kolei:*
5 + 4, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 1.

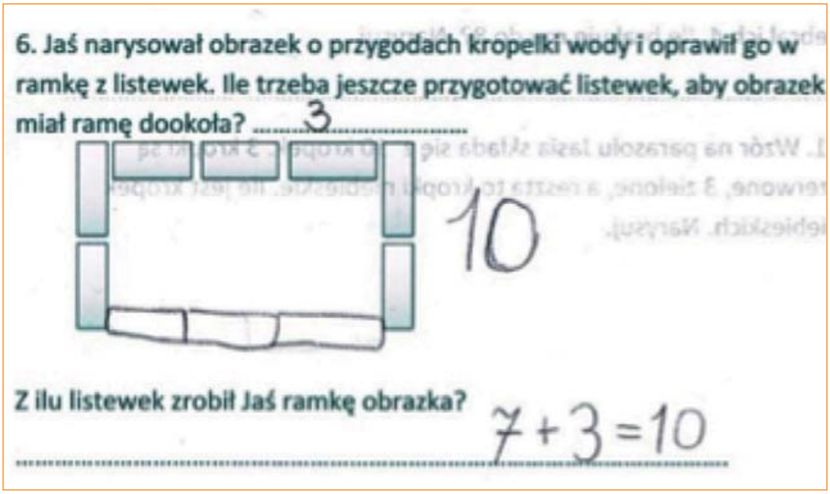
Dopiero dzisiaj zadałam sobie pytanie, dlaczego Filip rozpoczął od działania 5 + 4? Czemu wtedy go o to nie spytałam? Pozostali uczniowie nie zachowywali już podobnej kolejności. Rysowali najpierw pierwszą doniczkę z cebulami, a następnie rysowali drugą i dopełniali do 9. Występowały także różnice w zapisie, np. 9 = 4 + 5 lub 4 + 5 = 9.

Marzec 2013, uśmiech trzeci – Historyjka matematyczna „O kropelce wody, która bawiła się z Jasiem w chowanego"

Zaciekawiły mnie bajki matematyczne. Postanowiłam wykorzystać ten pomysł i układać historyjki matematyczne powiązane z danym blokiem tematycznym. Ich tytuły są związane z postaciami występującymi w pakiecie edukacyjnym realizowanym w klasie pierwszej lub pochodzą z tego pakietu. Powstały m.in. historyjki o Jasiu i kropelce wody, o królewnie Malince.

Jedno z zadań o Jasiu, który bawił się w chowanego z kropelką wody, dotyczyło oprawienia w ramki obrazka, który narysował chłopiec.

Zaciekawiły mnie różne pomysły dzieci na obliczenie liczby listewek potrzebnych do wykonania ramki. W efekcie powstały różne sposoby na obliczenie obwodu prostokąta.

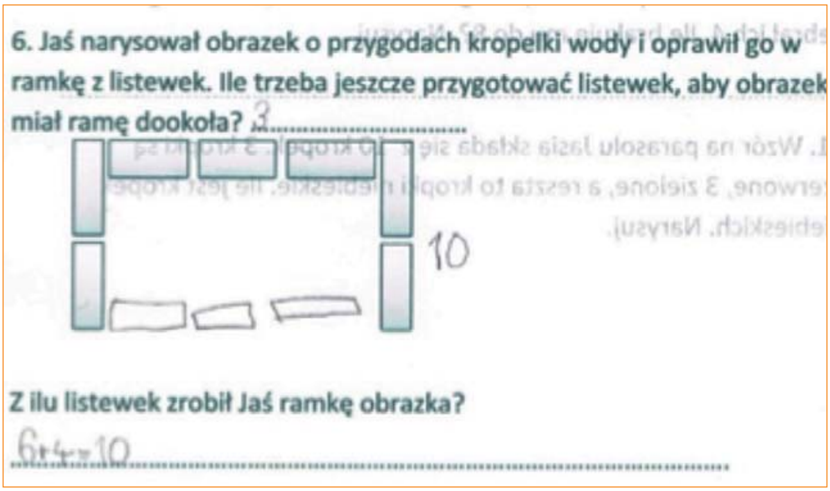

6. Jaś narysował obrazek o przygodach kropelki wody i oprawił go w ramkę z listewek. Ile trzeba jeszcze przygotować listewek, aby obrazek miał ramę dookoła? 3

10

Z ilu listewek zrobił Jaś ramkę obrazka?

7 + 3 = 10

Pomysł Lilki: *Do listewek, które były, dodałam to, co narysowałam.*

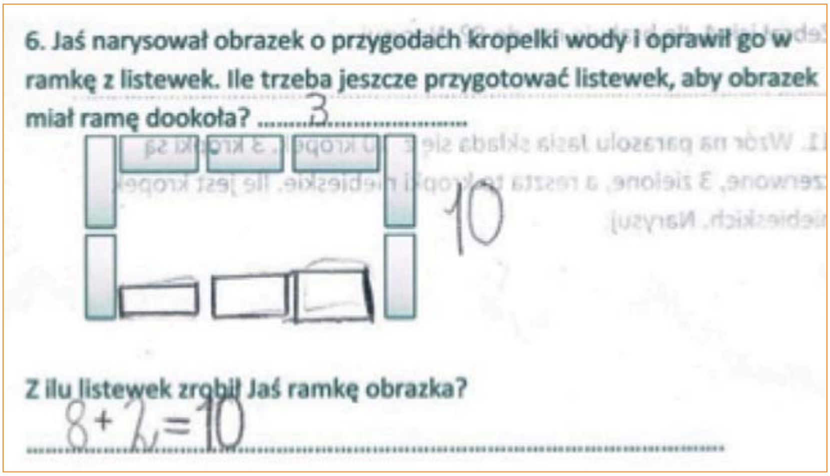

6. Jaś narysował obrazek o przygodach kropelki wody i oprawił go w ramkę z listewek. Ile trzeba jeszcze przygotować listewek, aby obrazek miał ramę dookoła? 3

10

Z ilu listewek zrobił Jaś ramkę obrazka?

6+4=10

Pomysł *Michała: Najpierw dodałem te (pokazuje listewki w poziomie), a potem te (pokazuje listewki w pionie).*



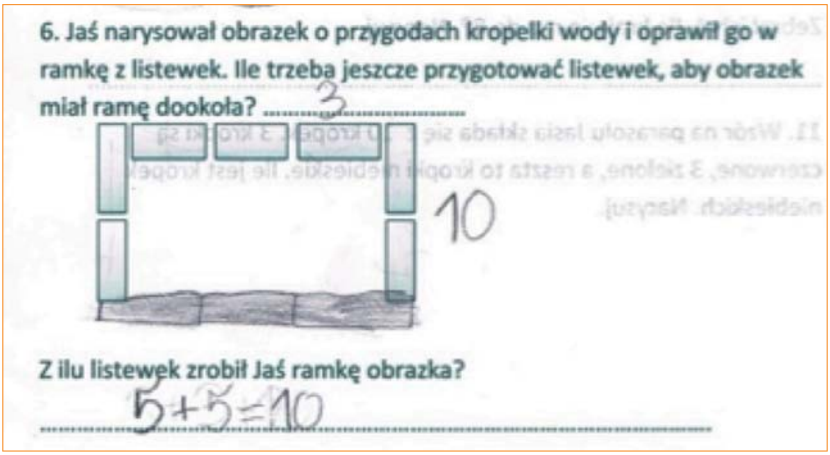
6. Jaś narysował obrazek o przygodach kropelki wody i oprawił go w ramkę z listewek. Ile trzeba jeszcze przygotować listewek, aby obrazek miał ramę dookoła? ....3........................

10

Z ilu listewek zrobił Jaś ramkę obrazka?

8+2=10

Pomysł Zosi: *Najpierw policzyłam te (pokazuje dwa boki poziome i jeden pionowy), a potem ten (pokazuje czwarty bok).*



6. Jaś narysował obrazek o przygodach kropelki wody i oprawił go w ramkę z listewek. Ile trzeba jeszcze przygotować listewek, aby obrazek miał ramę dookoła? ....3........................

10

Z ilu listewek zrobił Jaś ramkę obrazka?

5+5=10

Pomysł Nadii: *Najpierw policzyłam te listewki (pokazuje 2 listewki w pionie i 3 w poziomie), a potem te (pokazuje oba pozostałe boki).*

Kwiecień 2013, uśmiech czwarty – Adrian oblicza wartość swoich zakupów

Nasza przygoda z klasowym sklepem zaczęła się od wielkiego rozgardiaszu. Z przerażeniem patrzyłam na stos piętrzących się butelek, kartonów, kartoników, buteleczek, pojemników itp. Dzieci i rodzice bardzo rzetelnie potraktowali moją prośbę. Po „ocenzurowaniu" opakowań, rozpoczęliśmy urządzanie sklepu – czyli naklejanie cen (dzieci samodzielnie je ustalały) i ustawianie produktów. Długo trwały dyskusje na tematy cen towarów. Dzieci konfrontowały wpisywane wartości z własnymi doświadczeniami. Okazało się wtedy, że niektóre z nich same chodzą do sklepu lub aktywnie uczestniczą w zakupach rodziców i doskonale orientują się w cenach większości produktów spożywczych, szczególnie tych najbardziej ulubionych.

Na początku kasjerką byłam ja i koleżanka, z którą pracuję w klasie integracyjnej, potem funkcję tę przejęli uczniowie. Dzieci podchodziły do kasy ze swoimi zakupami i podawały ich wartość. Same obliczały, ile kosztują ich zakupy. Chciałam zwrócić ich uwagę na konieczność kontrolowania zakupów i szacowania ceny tego, co mamy w koszyku. Uczniowie dokonywali obliczeń pieniężnych na miarę swoich możliwości. Patrycja, która ma problemy z liczeniem, zawsze kupowała produkty po złotówce, np. 1 jabłko, 1cytrynę i 1 banana lub w jej torbie z zakupami znajdował się tylko jeden produkt. Przykładowe obliczenia Patrycji: 5 zł – 1 produkt, 4 zł – 4 warzywa po 1 zł, 2 zł – 2 produkty po 1 zł.

Z czasem większość uczniów zaczęła robić zakupy na coraz wyższe kwoty, np. Adrian – za 33 zł. Zwróciłam uwagę na jego sposób obliczania: na każdym zakupionym produkcie kładł kwotę odpowiadającą jego cenie, następnie grupował monety i banknoty, a na końcu je dodawał. Produkty kosztowały 17 zł, 3 zł, 1 zł, 2 zł, 7 zł, 2, zł, 1 zł. Razem 33 zł. Do kasy Adrian przyniósł banknoty i monety: 10 zł, 2 × 5 zł, 4 × 2 zł i 3 × 1 zł.

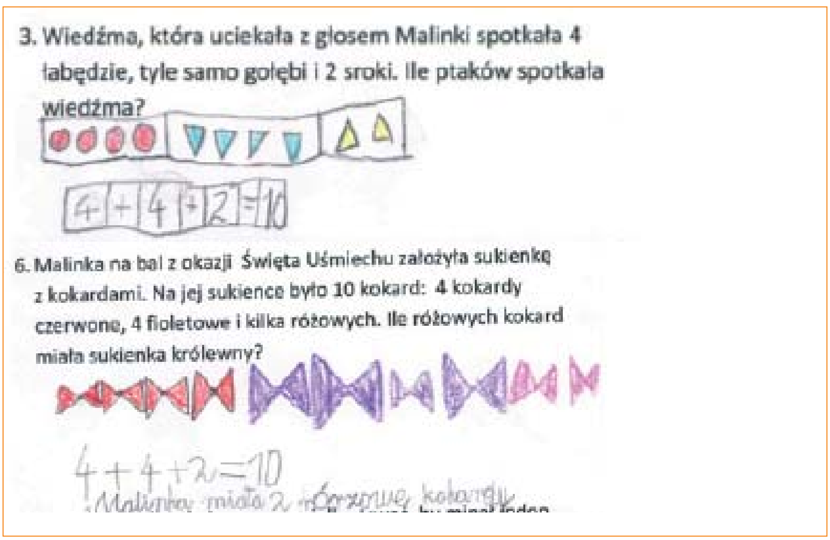
Takiej strategii nie zastosował żaden inny uczeń. Z czasem inne dzieci zaczęły korzystać z jego pomysłu. Różnica polegała na tym, że niektóre z nich przynosiły do kasy poprawnie odliczone pieniądze, ale nie potrafiły podać pełnej kwoty.

Maj 2013, uśmiech piąty – Zadania królewny Malinki i sposoby prezentowania rozwiązań

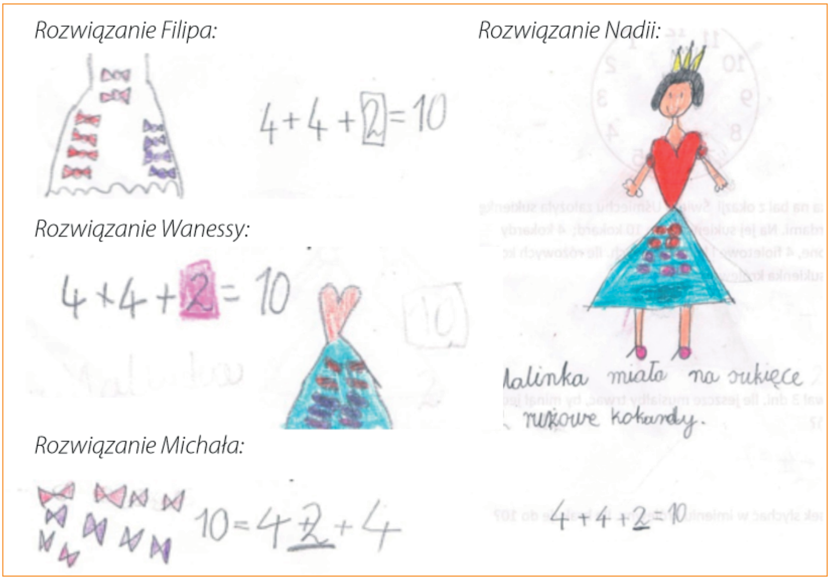
Rozwiązywanie zadań królewny Malinki rozpoczęliśmy od przypomnienia strategii postępowania. Zwróciliśmy uwagę na konieczność uważnego przeczytania treści każdego zadania – większość dzieci robiła to samodzielnie. Nadia, która lubi rysować, przypomniała o wykonaniu rysunku. W wielu przypadkach rysunek stał się sposobem zaprezentowania rozwiązania. Czasami towarzyszyło mu działanie, odpowiedź lub rysunek stał się tylko ilustracją do zadania. A czasami wcale nie był dziecku potrzebny.

Rysunek posłużył Lilce do ułożenia zapisu działania. Zastosowała także przemienność dodawania. Filip na rysunku dowcipnie, za pomocą flagi, oddzielił psy od kotów. Początkowo myślałam, że to błąd. Jednak obok Filip zapisał poprawną formułę matematyczną. Wanessa najpierw wykonała rysunek, a potem zapisała nad nim pasujące do niego działanie, ponieważ poniżej nie było już miejsca.

W przypadku zadania 1. rysunek pomagał dzieciom w szukaniu rozwiązania. Rysunki były konkretne i przedstawiały bohaterów zadania. W kolejnych zadaniach niektóre z dzieci zaczęły wprowadzać symbole i skróty. Np. w zadaniu 3. Wanessa zastosowała symbole geometryczne.



Większość dzieci rozwiązała zadanie 6. tak jak Filip, Nadia, Michał i Wanessa:



To zadanie przekonało dzieci, że rysunek bywa bardzo pomocny. Mnie samej zadania Malinki uświadomiły, że różne mogą być sposoby prezentowania rozwiązań. Dzieci je stosują realizując indywidualne pomysły i należy im to umożliwić. Myślę, że do końca nie przemyślałam treści tych zadań. Teraz sformułowałabym niektóre z nich jako zadania z niepotrzebnymi danymi. Mogłam także zwiększyć dane liczbowe dla poszczególnych dzieci. A może sformułować zadanie bez pytania i poprosić o to dzieci?

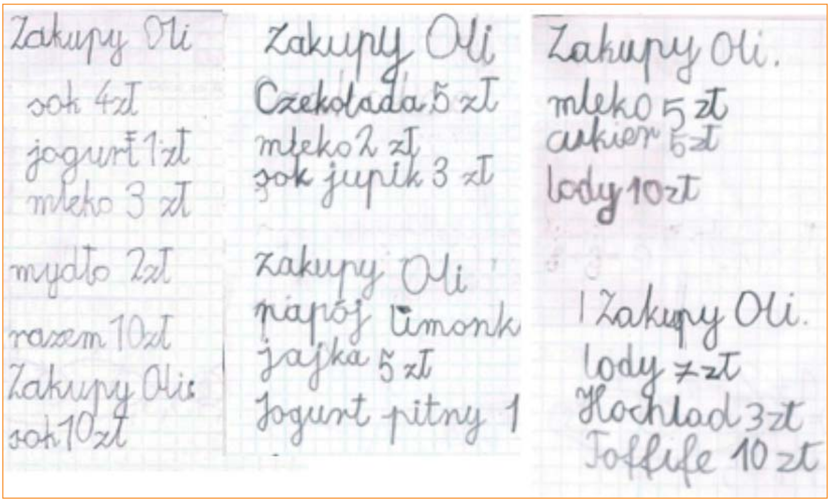
Czar zadań otwartych, czyli o zadaniach otwartych rozwiązywanych przez uczniów

Kwiecień – czerwiec

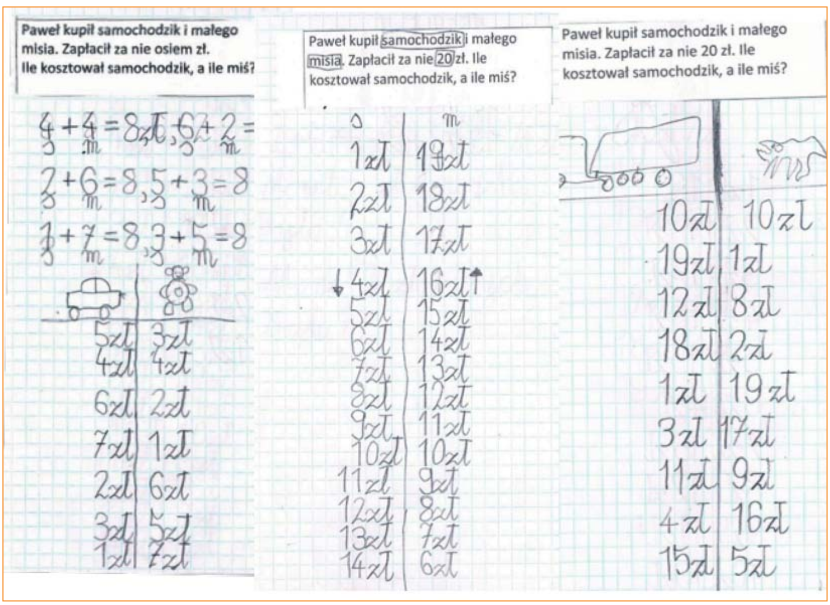
W ostatnim roku szkolnym odkryłam zadania otwarte. Muszę przyznać, że stosowałam je rzadko, np. od czasu do czasu na kółku matematycznym, a w czasie lekcji – tylko, gdy były w podręczniku. Zaczęło się od zabawy w sklep. Kolejnym krokiem było rozwiązywanie lub układanie zadań tekstowych najchętniej do określonej sytuacji lub czynności. Przykłady zadań zaczerpnęłam z zestawów bąblowych lub wymyślałam sama. Dodam jeszcze, że to samo zadanie wykorzystywałam w zależności od możliwości dzieci, tworząc problemy o adekwatnej dla każdego ucznia trudności.

Jednym z zadań było dokonywanie przez dzieci zakupów w imieniu Oli za kwotę 10 zł lub 20 zł. Uczniowie w zeszycie zapisywali listę produktów dostosowaną do warunku zadania.

Filip kupił kilka produktów za 10 zł lub tylko sok za 10 zł. Lilka dwukrotnie dokonała zakupów za 10 zł, za każdym razem po 3 sztuki, za pierwszym razem do 5 zł dodała 3 zł i 2 zł, a za drugim 4 zł i 1 zł. Nadia robiła zakupy za 20 zł. Za każdym razem kupiła po trzy produkty. Jeden z produktów kosztował 10 zł. Potem dopełniała do 20 zł.



Innym razem uczniowie rozwiązywali po kolei dwie wersje zadania otwartego o (liczbowo) zróżnicowanym stopniu trudności. Zadanie: Paweł kupił samochodzik i misia za 8 (lub 20) złotych. Ile kosztował samochodzik, a ile miś? Filip w pierwszej wersji zadania od razu podał wiele rozwiązań, zapisując je w formie działań i oznaczając samochodzik literą „s", a misia literą „m". Tabelka jest moją propozycją, jednak chłopiec uzupełnił ją samodzielnie. Drugą wersję zadania rozwiązał, podając wszystkie możliwe odpowiedzi w złotówkach. Napisał je kolejno i za pomocą strzałek pokazał, jak zmieniają się poszczególne wartości liczb. Michał, podobnie jak pozostałe dzieci, użył tabeli. Jednak podawał ceny samochodu i misia w sposób dowolny, stosując, od czasu do czasu intuicyjnie, przemienność dodawania.

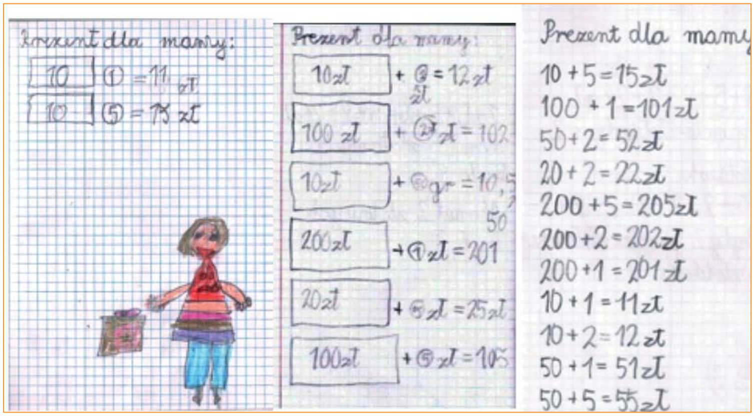


Żałuję, że nie wprowadziłam zadania zwiększającego zakres liczbowy np. do 100 zł. Jakże ciekawe i zaskakujące mogły być rozwiązania dzieci…

Chciałabym jednak przedstawić zadanie, w którym wypłynęłam na szerokie wody i stworzyłam pierwszakom możliwość zaprezentowania rozwiązań o szerokiej skali liczbowej w zależności od „finansowego" doświadczenia.

Zadanie brzmiało tak: ***Nadia kupiła prezent dla mamy. Zapłaciła banknotem i monetami. Ile kosztował prezent dla mamy?***

Patrycja narysowała piękny rysunek mamy, prezent dla niej i określiła jego wartość zgodnie z warunkami zadania. Karinka postąpiła podobnie, jednak podała dwie możliwości rozwiązania tego zadania. Filip rozwiązał zadanie, podając kilka możliwości. Nadia rozwiązała zadanie, układając działania i dokonując obliczeń.



Patrycja i Filip posłużyli się kształtem banknotu i monety. Filip użył nawet monety 50 gr, dokonując zapisu z przecinkiem. W trakcie rozwiązywania uczniowie mogli korzystać w swobodny sposób z monet i banknotów z klasowej skarbonki. Z tej możliwości skorzystały Patrycja i Karinka. Filip i Nadia pracowali bez żadnej pomocy. Wykonując to zadanie, dzieci dokonywały obliczeń pieniężnych, działając na liczbach znacznie wykraczających poza zakres liczbowy określony w podstawie programowej klasy I, a nawet klas I–III. Patrycja i Karinka z dumą prezentowały swoje rozwiązania przed całą klasą. Wszystkie dzieci chętnie angażowały się w szukanie własnego rozwiązania.

W grupie dochodzimy do wiedzy, czyli rzecz o liczbach parzystych i nieparzystych

Kwiecień 2013

Nazwy *liczby parzyste i liczby nieparzyste* wprowadziły same dzieci przy okazji układania kolejnych liczb z klocków Numicon. Mniej więcej w środku zajęć matematycznych odbył się następujący dialog:
Lilka: *Ta liczba jest nieparzysta.*
Ja: *Skąd wiesz?*
Lilka: *Powiedziała mi siostra, kiedy robiła zadanie domowe (siostra uczy się w klasie III).*
Zosia: *A liczba 14 jest parzysta.*
Ja: *Skąd wiesz? Zosia: Brat mi mówił.*
Uznałam, że taką okazję należy wykorzystać. Zaczęliśmy „bawić się" w rozpoznawanie liczb parzystych i nieparzystych. Zadałam pytanie: *Jak rozpoznać liczby parzyste i nieparzyste?*
Oskar: *W liczbie nieparzystej wystaje dzióbek.*
Ja: *Jaki dzióbek? Filip: Wystaje jedynka.*
Oskar: *Tu jest 400. Ja: Skąd wiesz, że 400?*
Oskar: *Bo tu jest 100, 100, 100 i 100.*
Ja: *Jaką liczbą jest 400? Parzystą czy nieparzystą?*
Oskar: *Parzystą, bo nie ma dzióbka.*

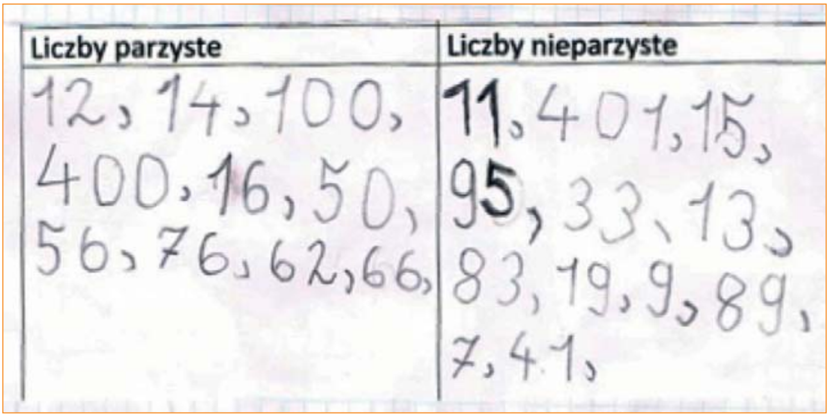
Dzieci układały liczby od 1 do 10 lub od 10 do 20 i jeszcze znacznie większe. Czynności manipulacyjne na kształtach Numicon doprowadziły do sformułowania przez Szymona T. następujących twierdzeń:

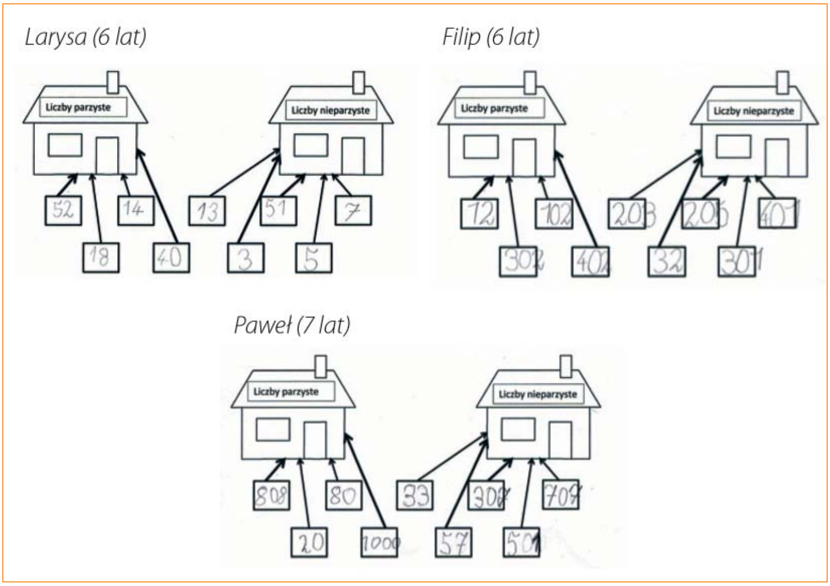
***Twierdzenie 1.:** Liczby parzyste i nieparzyste układają się na zmianę: nieparzysta, parzysta, nieparzysta, parzysta itd.*
***Twierdzenie 2.:** Liczby parzyste rosną o 2, bo jest 2, 4, 6, 8, 10… Liczby nieparzyste też rosną o 2, bo jest 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.*



Na kolejnej lekcji poprosiłam dzieci, aby ułożyły z kształtów Numicon dowolną liczbę i zapisały ją na karteczce. Na koniec wypisaliśmy niektóre z tych liczb na tablicy.

Następnie poprosiłam, aby dzieci zaprowadziły liczby do swoich domków, zgodnie z ich adresem. Oto kilka prac ukazujących, jakimi liczbami posługiwali się uczniowie klasy I.





Paweł popełnił jeden błąd, ale każdy błąd uczniowski jest okazją do rozmowy, wyjaśniania i dalszego uczenia się.

Wreszcie przyszedł czas na pracę w grupach i szukanie odpowiedzi na pytania: *Jakie liczby otrzymamy, kiedy dodamy do liczby… liczbę…?, kiedy odejmiemy od liczby... liczbę…?*

Oto przykłady sum wymyślone przez poszczególne zespoły:

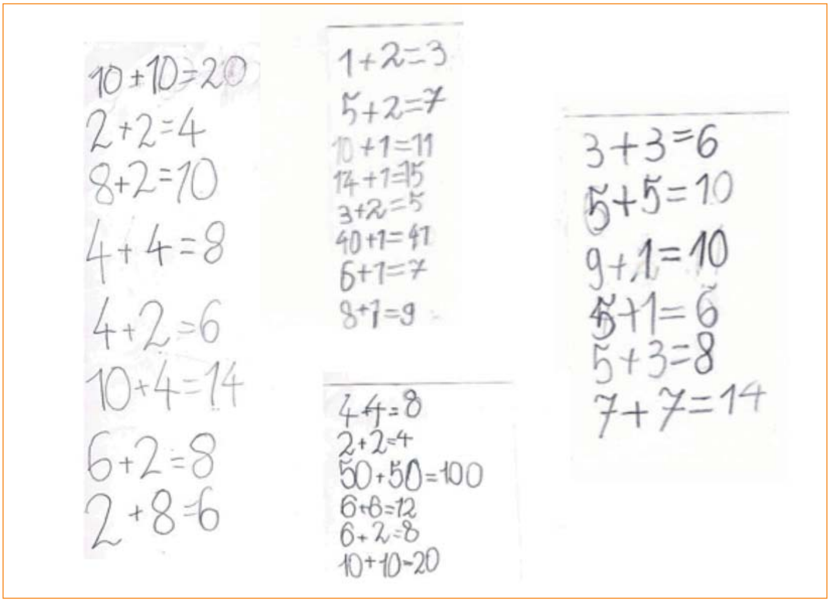
Każdy z zespołów zaprezentował swoje działania i sformułowane twierdzenia:

***Twierdzenie Pawła:* Jeżeli do liczby parzystej dodam liczbę parzystą, to otrzymam liczbę parzystą.**

***Twierdzenie Filipa:* Jeżeli do liczby nieparzystej dodam liczbę nieparzystą, to otrzymam liczbę parzystą.**

***Twierdzenie Szymona:* Jeżeli dodam liczbę parzystą i nieparzystą, to otrzymam liczbę nieparzystą.**

Swoje umiejętności w rozpoznawaniu liczb uczniowie mieli okazję zweryfikować i doskonalić w grze „Parzyste i nieparzyste I" zaczerpniętej ze strony www.trzecioklasista.edu.pl. lub w zabawach z „żywymi liczbami".



Maj 2013

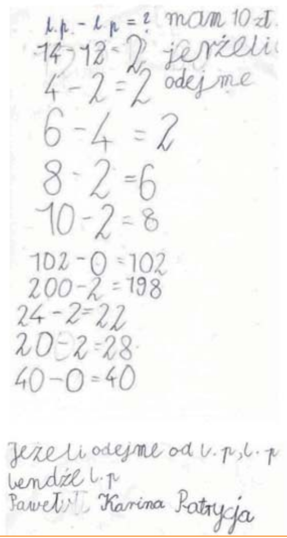
Po miesiącu dzieci badały (także w zespołach), jaką liczbę otrzymamy w przypadku odejmowania liczb – parzystą, czy nieparzystą? W czasie wspólnej rozmowy padały ze strony uczniów następujące propozycje:

- *od liczby parzystej możemy odjąć parzystą,*
- od parzystej możemy odjąć nieparzystą,
- od nieparzystej odejmiemy nieparzystą,
- od nieparzystej odejmiemy parzystą.

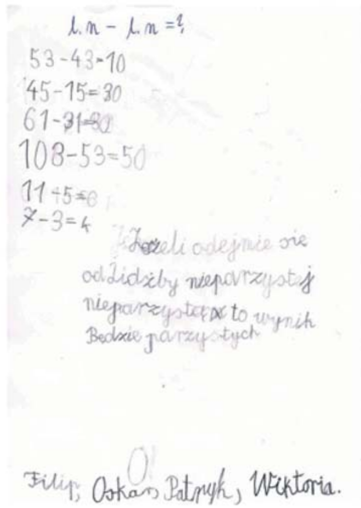
Pozwoliłam sobie na zanotowanie tych wypowiedzi na tablicy w formie skrótów:
l. p. – l. p = ?, l. p. – l. n. = ?, l. n. – l. n. = ?, l. n. – l. p. = ?

Dzieci bez kłopotu wyjaśniły mi, co oznaczają te skróty. Byłam bardzo zadowolona, Oto prace poszczególnych grup oraz dokonane przez uczniów uogólnienia:

Grupa 1.: Paweł, Karina, Patrycja; Grupa

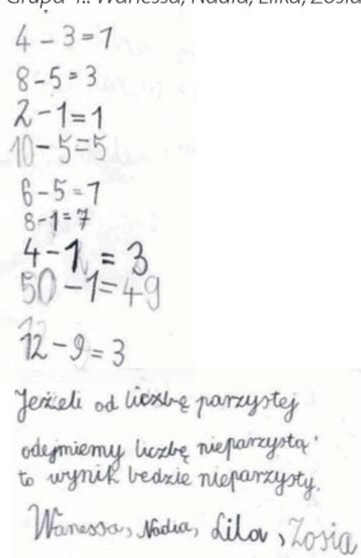


Grupa 2.: Filip, Oskar, Wiktoria, Patryk



Grupa 3.: Adrian, Szymon i Michał

Grupa 4.: Wanessa, Nadia, Lilka, Zosia



Zawsze, kiedy uczniowie piszą w taki sposób, jak pokazany w powyższych pracach, mam ochotę poprawiać ich błędy ortograficzne. Jednak zgodnie z zasadą oceniania kształtującego, umawiam się z nimi, że nie zwracam uwagi na popełnione błędy. Chcę, aby skupiły się na treści. Oczywiście na końcu zajęć staram się wygospodarować czas na pokaz poprawnego pisania wyrazów, w których występowało najwięcej błędów. Tym razem utrwaliliśmy pisownię wyrazów: „liczba", „parzysta" i „nieparzysta".

Portret uczniów, czyli przyszedł czas na pierwsze podsumowanie

Portret ucznia klasy I a. Zastanawiam się, jak go przedstawić. Co mogłabym napisać wokół sylwetki uśmiechniętego ucznia? Może TO:

- nie boję się wyzwań,
- podejmuję się rozwiązania coraz trudniejszych zadań,
- jestem aktywny przez cały czas zajęć,
- wiem, że zadanie tekstowe może mieć więcej niż jedno rozwiązanie,
- dokonuję wyboru zakresu liczbowego, w jakim chcę działać,
- wiem, że mogę się mylić i popełniać błędy,
- mogę popełniać błędy i nie boję się krytyki,
- prowadzę rozmowy na tematy związane z matematyką,
- prezentuję swoje przykłady rozwiązań,
- działam i dokonuję obserwacji,
- coraz lepiej pracuję w grupie,
- stosuję własne strategie,
- lubię gry planszowe,
- formułuję własne twierdzenia,
- dzielę się wiedzą z innymi,
- lubię pracować w grupie.

Oczywiście jest to portret zbiorowy. Dla każdego mojego ucznia mogłabym dobrać z tej listy po kilka stwierdzeń.

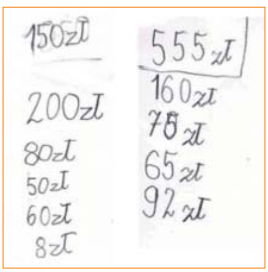
Koniec roku szkolnego i klasy I – rzecz o luzie nauczycielskim

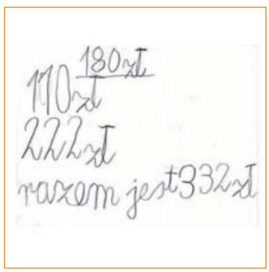
Przyszedł czas na porządki. Zebraliśmy wszystkie nasze klasowe pieniądze. *A może policzymy, ile ich jest?* – zaproponowałam. *Jak myślicie?*

Nastąpiło szacowanie i zapis przypuszczeń na tablicy: 1200, 1002, 1500, 1006, 1600, 1000, 999, 1008, 1016, 1017, 1555

Ja: *W jaki sposób przeliczymy tyle pieniędzy?* Dzieci zaproponowały pracę w grupach i podział pieniędzy na monety po 1 zł, 2 zł i po 5 zł i banknoty na kupki. Następnie grupowanie każdego nominału po dziesięć. Zadałam wtedy uczniom pytanie: *A jeśli pieniędzy będzie tak dużo, że będziecie mieli kłopot z policzeniem?* Wtedy dzieci odpowiedziały, że można policzyć pieniądze w mniejszych kupkach i potem je połączyć.

Oto efekty pracy poszczególnych grup. U góry kartki znajdują się ich początkowe szacunki.





Tak swoje pieniądze liczyli Filip i Michał:
Filip: *Liczyłem dziesiątkami, a potem było 200, potem 80, a potem dodałem 50.*
Ja: *A wiesz, ile to jest 280 i 50?*
Filip: *330.*
Ja: *Jak to policzyłeś?*
Filip (Cisza… wzruszenie ramionami i zdziwiona buzia): *Policzyłem w głowie.*
Michał policzył dalej: *330 i 60 to 390 i 8 to 398.*
Kolejnym krokiem było zestawienie kwot i wypisanie ich na tablicy:

- *Po czym poznacie, że grupy mają więcej lub mniej pieniędzy niż szacowały?* – zapytałam.

Michał: *Bo tu jest już 200, a oni pisali 150.*
Paweł: *Tu jest 222. To więcej niż 180.*

Szymon: *333 to mniej niż 555* (kwota 211 zł była do zweryfikowania).
Ja: *Zapisaliśmy bardzo duże liczby. Czy potrafimy policzyć, ile to jest razem?* Zapadła cisza.
Ja: *Czy coś może nam w tym pomóc?* Wtedy padła propozycja z klasy: *Kalkulator?!*

Praca z kalkulatorem odbyła się w ten sposób, że jedno z dzieci czytało, a drugie dodawało kolejną kwotę i tak do końca. Nie miało znaczenia, że nie są do liczby do 20, jak przewiduje program klasy pierwszej, który wybrałam. Na koniec roku fascynacja dzieci liczbami udzieliła się i mnie, a co będzie dalej? Wspólnej zabawy matematyką ciąg dalszy w klasie drugiej.

Co mogę powiedzieć o sobie w czerwcu 2013 roku? Podsumowanie drugie

Minął rok. Jak mogłabym opisać zmianę w moim stylu nauczania matematyki? Miałam motywację do zmiany i pomoc. Choć wciąż tkwią we mnie stare przyzwyczajenia, to najważniejsze, że mogę uczniom zaproponować o wiele więcej niż podręcznik i karty pracy. Częściej stosuję gry planszowe. Sama układam, przekształcam lub szukam ciekawych zadań tekstowych i nie są to tylko zadania typowe. Doceniam zadania otwarte i coraz częściej sięgam do zadań nietypowych. Daję moim uczniom czas na rozwiązanie. Pozwalam im na dokonanie wyboru swojego sposobu rozwiązania. Wystarczy mi, że rozwiążą w czasie lekcji jedno, odpowiednio dobrane zadanie tekstowe. Kiedyś uważałam, że im więcej zadań rozwiążą, tym lepiej. matematyką

Co jeszcze? Stosuję zasadę samodzielnego„dochodzenia" uczniów do wiedzy. Czekam z niecierpliwością na uczniowskie pytania, które traktuję jako kolejną matematyczną okazję. Częściej i odważniej stosuję pracę w zespołach. Wykorzystuję różnorodne, nawet nietypowe, pomoce dydaktyczne. Rozmawiam z dziećmi.

Mam pewność, że mogę dokonać dalszych zmian w sposobie kształtowania umiejętności matematycznych u dzieci i chętnie podzielę się nimi z innymi nauczycielami.

Mirosława Cikorska
28 lat w zawodzie, SP 13 Bydgoszcz

O PRACY W PARACH I W GRUPACH NA ZAJĘCIACH EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASACH I–III

Renata Fiertek

Podstawa programowa zakłada, że celem kształcenia ogólnego w szkole podstawowej jest, *kształtowanie u uczniów postaw warunkujących sprawne i odpowiedzialne funkcjonowanie we współczesnym świecie*, a do najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia podstawa zalicza, *umiejętność pracy zespołowej.* Warunki do nabywania tej umiejętności *zobowiązani są stworzyć nauczyciele wszystkich szczebli kształcenia i wszystkich specjalności, ale zadanie zainicjowania procesu jej kształtowania przypada pedagogom pracującym z dziećmi w wieku wczesnoszkolnym*[1].

Przedstawię kilka wybranych fragmentów zajęć, gier i zabaw, które organizowałam uczniom na lekcjach matematyki, by uruchomić proces rozwijania umiejętności współpracy z innymi.

Zaczęłam od pracy parami i lubianych przez dzieci zabaw klockami. Moim zamiarem było nie tylko stworzenie możliwości współpracy, ale również eksperymentowanie na liczbach, odkrywanie ich własności, porównywanie i przeliczanie. Chciałam też sprawdzić, w jakim zakresie liczbowym przeliczają uczniowie, którzy dopiero rozpoczynają swoją edukację w szkole.

„Liczby w kolorach" posłużyły mi do jednego z pierwszych ćwiczeń. Dzieci pracowały w parach. Zadanie polegało na zbudowaniu z klocków wspólnej budowli. Na tablicy przyczepiłam kartoniki z pełnymi dziesiątkami (od 10 do 100). Pierwsza wspólna decyzja to liczba klocków, następna – rodzaj budowli.

Julianna i Marta (poznały się dopiero w klasie pierwszej) przeliczyły wybrane klocki, po czym wspólnie zbudowały piramidę.

Oliwier i Mikołaj (chłopcy znali się już z zerówki), zachowali się nieco inaczej. Każdy z nich zbudował swoje „dzieło". Kiedy zapytałam, czy to jest ta wspólna budowla, odpowiedzieli, że tak, bo to jest na jednym osiedlu. Odpowiedź bardzo mi się spodobała. Musieli ją uzgodnić, zatem rozmawiali ze sobą, a na tym właśnie mi zależało, bo komunikowanie się to jedna z zasad dobrej pracy w grupie. Każdy z chłopców wykonał zadanie samodzielnie, pewnie żaden z nich nie potrzebował pomocy kolegi. Gdy lepiej ich poznałam, wiedziałam, że obaj świetnie sprawdzają się w pracy w parach, ale nie z sobą, a z innymi kolegami czy koleżankami.

Na kolejnych zajęciach zajmowaliśmy się układaniem kloców od najkrótszego do najdłuższego, sprawdzaniem, ile jednych kloców można ułożyć wzdłuż innego (np. ile najkrótszych klocków zmieści się w najdłuższym itp.) czy ustalaniem, jaki klocek dołożyć do piątki, by razem były równe szóstce. Dzięki dobrej zabawie w parach, rozmowie między sobą, uczniowie „przerobili" liczby w zakresie dziesięciu. Dla niektórych było to zupełnie oczywiste, że klocki, którymi się bawią, zastępują liczby, a inni dowiedzieli się tego od swoich kolegów. Oczywiście miałam pewne obawy, czy nie za wcześnie na takie ćwiczenia. Nie opracowałam z dziećmi jeszcze monografii liczb. Ale wystarczyło pozwolić im manipulować przedmiotami, rozmawiać ze sobą, a wszystkie odkrywały liczby jedną po drugiej. Ja ograniczyłam się tylko do kontrolowania pracy par, ewentualnie łagodzenia sporów (najczęściej chodziło o to, że któraś z osób ciągle chciała układać klocki). Była to wskazówka dla mnie, by porozmawiać z dziećmi o zasadach pracy w parach.

Warunkiem dobrej współpracy jest nie tylko rozmowa, komunikowanie się między pracującymi, ale również przestrzeganie reguł. Dlatego w następnym ćwiczeniu na początku umówiliśmy się, że pracujemy na zmianę. Najpierw jedna osoba z pary układa na szalce wybrany klocek **(klocki Numicon)**, druga go równoważy według własnego uznania. Wspólnie sprawdzamy, czy jest równowaga. Dzieci eksperymentowały, bawiąc się, rozkładały liczby na składniki. Nie było już kłopotu, że ktoś częściej układa klocki, bo musiały zachować ustaloną kolejność. Dodatkowo, po zważeniu klocków, pary podawały swoje przykłady liczb ułożonych na wadze. Głos zabierała ta osoba, która równoważyła klocki.

[1] Praca w grupach w edukacji wczesnoszkolnej, http://www.ibuk.pl.

Oczywiście, niektóre dzieci zauważyły od razu, że na każdej szalce musi być ta sama „wartość" klocków, by była równowaga. Oczekiwałam, że to dostrzegą. Ale ważne było dla mnie również to, iż pamiętały o ustalonych regułach, ponieważ ułatwiło im to pracę. Same zresztą też to zauważyły, kiedy podsumowywaliśmy zajęcia.

Dla par można przygotowywać sporo ćwiczeń czy zadań. Na początku nauki współpracy skupiłam się jednak na takich, przy których uczniowie nie musieli wykazywać się umiejętnościami rachunkowymi albo rozumieniem treści zadań tekstowych. Do kolejnych ćwiczeń wybrałam **tangram**. Rozpoczęłam od klasyfikowania jego części według kształtu oraz liczby boków. Na tym etapie każdy pracował indywidualnie. Niektóre z dzieci miały do czynienia z tangramem po raz pierwszy. Chciałam sprawdzić, czy wszystkie rozpoznają podstawowe figury geometryczne. Potem uczniowie pracowali parami. Dlaczego? Poziom wyobraźni przestrzennej w tym wieku jest różny. Niektóre dzieci potrafią w pamięci przesuwać, przystawiać figury, by dostrzec, co powstanie po takich czynnościach. Są też i takie, które muszą jeszcze sporo doświadczyć, by znaleźć się na takim etapie myślenia. Dlatego uznałam, że pracując parami, poprzez podpatrywanie, odwzorowywanie czy wręcz pomoc kolegi, poczują się pewniej i chętniej będą pracowały. Uczniowie odkrywali nowe figury przez łączenie elementów układanki, sprawdzali, z ilu trójkątów uda się ułożyć kwadrat, z jakich figur powstanie prostokąt. Tak jak na początku zabawy z tangramem, pracowali samodzielnie, ale obok siebie, by w razie potrzeby podpatrzeć, co robi sąsiad. Potem dzieci układały figury z obydwu kompletów. Dopiero po takich ćwiczeniach układały wzory przygotowane na kartach. Zachęcałam uczniów do wzajemnego pomagania sobie. Na zdjęciach doskonale widać, że dzieci ze sobą współpracują, pomagają sobie, tłumaczą, gdzie najlepiej ułożyć kolejny klocek. Czasami była to praca w większym zespole niż para, ale właśnie do tego cały czas dążyłam.

Następnym etapem pracy parami były **gry dydaktyczne**. Pozwalają one na wprowadzenie nowego materiału, utrwalenie go, wyrobienie pewnych umiejętności. Dla mnie ważne było też to, że uczą przestrzegania reguł, że grający musi uważać nie tylko na to, co robi sam, ale powinien też zwracać uwagę na kolegę. Chęć wygrania sprawia, że dziecko podejmuje wysiłek, stara się podołać zadaniu i wytrwać do końca gry. Nie wszystkie jednak dzieci na początku klasy pierwszej radzą sobie z przegraną. Mając to na uwadze, celowo wybrałam gry z kostką i karty matematyczne[2]. Wygrana w nich nie w pełni zależała od dziecka. Drugim powodem wyboru tego typu gier było to, że stosowane do tej pory przeze mnie zabawy typu „Milczek", „Łańcuszek", „Pociąg", które miały doskonalić technikę rachunkową, stresują dzieci, którym liczenie, nawet na palcach, sprawia jeszcze problem. W wymienionych zabawach każdy musiał liczyć tylko na siebie. Jeśli nie zdążył wykonać działania, nie znał odpowiedzi, denerwował się, czy przypadkiem pani go nie poprosi o podanie wyniku. Nauczyciel nie miał możliwości kontrolowania wszystkich. Mógł błędnie ocenić ucznia, który albo nie zdążył, albo nie usłyszał podawanych liczb. W efekcie nauczyciel pracował tylko z wybranymi uczniami.

A oto kolejne przykłady pracy w parach.

***(przykład 1.)* Każda para otrzymała kartkę podzieloną na dwanaście ponumerowanych pól. Do tego kartoniki w dwóch kolorach (dla każdego gracza inny) oraz kostkę. Wygrywała ta osoba, która pierwsza zakryła swoimi kartonikami pola z liczbami, wykonując działania na liczbach wyrzuconych na kostce.**

[2] Ze zwykłej talii kart wybieramy karty od 2 do 10 oraz dodatkowo asy, które mają wartość 1. W efekcie powstaje zestaw 40 liczb: od 1 do 10, każda w czterech egzemplarzach.

(przykład 2.) ***Każdy miał dwie kostki w kubeczku. Po rzucie należało obliczyć sumę kostek oraz zapisać działanie i wynik na kartce (kartka podzielona na pół). Wygrywała ta osoba, która miała najwięcej sum równych bądź wyższych niż dziesięć.***

Z przyjemnością patrzyłam, jak wszyscy uczniowie jednocześnie przeliczają, kontrolują się nawzajem, pomagają sobie w liczeniu. Nabywanie i usprawnianie umiejętności dodawania i odejmowania w zakresie dziesięciu (w tych grach do dwunastu) było na pewno ciekawsze i łatwiejsze dla uczniów. Wszystkie odnosiły sukces, były zaangażowane i bardzo aktywne.

Podobnie wyglądały zajęcia, w czasie których dzieci grały w karty. Tak samo aktywnie pracowały i doskonaliły technikę rachunkową. Ale nie było to moim jedynym celem. Wdrażając uczniów do współpracy, zależało mi na tym, by zwrócić ich uwagę na fakt, że praca indywidualna w konsekwencji prowadzi do sukcesu zespołu. W „Układance do 13" wymyśliłam takie reguły, dzięki którym uczniowie mieli się o tym przekonać.

Każdy miał swoją talię kart. Wykładał ich dowolną liczbę tak, by uzyskać sumę trzynaście. Następnie należało zapisać liczby, które spełniały ten warunek (wyższe sumy nie były brane pod uwagę). Grę wygrywała ta para, której udało się zapisać najwięcej działań dających w wyniku trzynaście.

Dzieci pracowały wytrwale na wspólny sukces. Ponieważ czas przeznaczony na grę był ograniczony, widziałam, jak jedno wyręcza drugie w zapisywaniu działań czy nawet pomaga w liczeniu. Współpraca rozwijała się doskonale.

Od czasu do czasu dzieci grywały w „Wojnę". Gra wymagała umiejętności porównywania liczb, bo wyższa liczba na karcie zabierała niższą. Do „wojny" dochodziło wtedy, gdy na stole pojawiły się karty o tej samej wartości. Wówczas trzeba było położyć na swoją kartę drugą zakrytą, a następnie kolejną odkrytą – wyższa zabierała wszystko. Wygrywała ta osoba, która po zakończeniu rozgrywki miała więcej kart.

Gra emocjonująca, bardzo lubiana przez dzieci, w której same dobierały się w pary. Nie musiałam brać tutaj pod uwagę tego, czy któremuś z uczniów potrzebna jest pomoc drugiej osoby. W poprzednich zadaniach było to dla mnie istotne. Z czasem starałam się dobierać osoby tak, by jedna z nich potrafiła wspierać drugą. Grą zachęcałam dzieci do wspólnej zabawy, uczenia się od siebie. Wdrażałam do przestrzegania zasad i radzenia sobie z przegraną, co jest trudne dla małych dzieci. W tej grze zwycięstwo nie zależało od dziecka, gdyż nie widziało wykładanych kart, łatwiej więc radzili sobie z przegraną.

Wykorzystywałam też na lekcjach gotowe gry planszowe dostępne w pakiecie podręczników, z którymi pracowałam. Były przeznaczone dla dwóch lub większej liczby graczy. Doskonaliłam jeszcze pracę w parach, więc grały dwie osoby. Posłużyłam się też nimi po to, aby zwrócić uwagę dzieci, że każda gra oprócz reguł ma swoją tematykę. Po „wprawkach" na gotowych grach, uczniowie mieli za zadanie konstruować własne.

Musieli wykazać się pomysłowością i – co dla mnie ważne – umiejętnością współpracy. Obydwie osoby musiały przedyskutować i ustalić temat gry oraz opracować jej zasady. Takie były moje założenia. Brzmi to bardzo poważnie, ale po doświadczeniach z wcześniejszej pracy z tą grupą dzieci, nie miałam już obaw (jak na początku roku szkolnego), że sobie nie poradzą. Przekonałam się, że wystarczy dać uczniom możliwość, a pokażą, że wiedzą i potrafią więcej niż nam się wydaje. Oczywiście nie wszyscy potrafią doskonale współpracować. Myślę jednak, że takie osoby potrzebują więcej czasu niż pozostałe, by nauczyć się takiej formy pracy.

Gra **,,Wyspa"** zawierała pola z premiami i karami. Jeżeli pionek zatrzymał się na moście, czekał na pomoc, więc gracz tracił kolejkę. Jeśli doszedł do pola z rzeką, było to niebezpieczne (żyły tam krokodyle), musiał cofnąć się o dwa pola. Ale gdy znalazł się na wulkanie, to wraz z lawą spływał o trzy pola dalej.

W grze **„Głębia morska"**: też były pola z nagrodami i pułapkami – postojami – lub cofaniem się z danego pola.

Dzieci sprostały zadaniu. Skonstruowały gry – opowiadania. Wszystkie pięknie pracowały. Zaangażował się nawet chłopiec, dla którego większość zadań do tej pory była „nudna i głupia". Potem każda para zagrała w swoją grę. Następnie pary zamieniały się grami.

Dlaczego dzieci przygotowywały gry na luźnych kartonikach? Otóż moim zamiarem było wprowadzenie elementu pracy w grupie większej niż dwie osoby. Zatem kolejnym zadaniem była próba połączenia gier w jedna większą, składającą się z dwóch, może trzech gier. Z niektórymi ten zabieg się udał. Wkrótce dzieci same zauważyły, że gra nie może być zbyt długa (chodziło im o liczbę kartoników), trzeba zrezygnować z powtarzających się numerów kartoników i niektórych nie można połączyć, bo tematycznie nie pasują do siebie. Niemniej pary łączyły się w większe zespoły i wspólnie opracowywały inną wersję swoich gier. Współpraca zmierzała we właściwym kierunku. Dzieci dyskutowały ze sobą, decydując, w którym miejscu ułożyć ilustracje, rezygnując z ponumerowanych kartoników albo zwiększając ich liczbę.

Postanowiłam już wcześniej, że stopniowo będę wprowadzać elementy pracy w większej grupie. Starałam się przygotowywać różne zadania, które miały dzieciom w tym pomóc.

Odkrywaniem i uzupełnianiem sekwencji zajęły się pary. Łatwiej będzie we dwójkę dostrzec szczegóły, upewnić się, czy nie popełnia się błędu. Uczniowie najpierw uzgadniali, w jaki sposób powtarzają się wzory i dorysowywali kolejne elementy według odkrytej zasady.

Kolejne zadanie polegało na ustaleniu, jaki owoc będzie na zapisanym na tablicy miejscu (np. 13, 15, 20). Dzieci miały przed sobą obrazek, na podstawie, którego pracowały. Teraz przydała się w niektórych parach pomoc kolegi. Pomógł on policzyć i pokazał na palcach, jak szybko można to zrobić.

Nad przygotowywaniem zagadek – sekwencji pracowały po dwie osoby, potem następowała zmiana miejsc i kolejna para uzupełniała, zgodnie z odkrytą regułą, następne elementy.

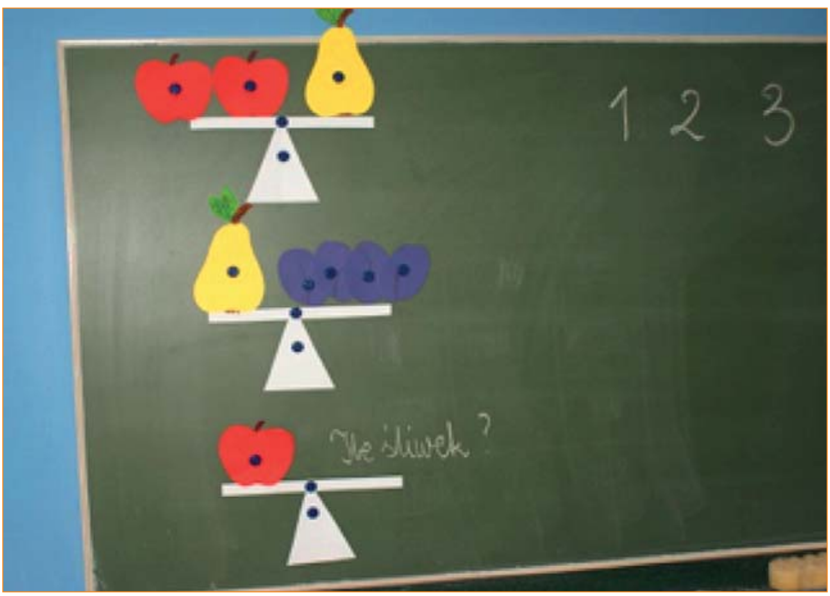
Karty pracy przygotowałam tak, by czworo dzieci miało te same przykłady.




W uzupełnianiu sekwencji, a na zakończenie w ocenianiu kart pracy wystąpiły elementy pracy w większym zespole. Zgodnie z teorią, działanie w zespole powinno polegać na komunikowaniu się, wysłuchiwaniu zdania innych osób, wspólnej decyzji co do ostatecznego rozwiązania. W tym przypadku ocenianie zadań kolegów wywołało zbyt wiele emocji. Dzieci nie potrafiły jeszcze prowadzić konstruktywnych rozmów i dochodziło do sprzeczek co do poprawności odpowiedzi. Wówczas rozmawialiśmy o zaistniałej sytuacji. Nie zniechęciła mnie ona – nadal doskonaliłam pracę w parach. Zachęcałam uczniów do dyskusji, ponieważ jest ona niezbędna w pracy grupowej.

W celu doskonalenia współpracy przygotowywałam również zadania tekstowe typowe i nietypowe, bo właśnie one stanowią, w mojej ocenie, wyzwanie dla dzieci. Mogą wówczas wykazać się swoimi umiejętnościami matematycznymi, podzielić się nimi z innymi, rozmawiać ze sobą, uczyć się od siebie.

Treść zadania przyczepiłam na tablicy. Uczniowie mieli na ławkach przygotowane żetony w dwóch kolorach i patyczki, które mogły wykorzystywać do rozwiązania zadania.



Obserwowałam pracujące pary. Niektóre wykorzystywały przygotowane pomoce, by nimi manipulować. Inne rysowały sobie rozwiązanie na kartkach albo analizowały ilustrację na tablicy. Większość par poprawnie rozwiązała zadanie. Nawet te dzieci, które na widok zadania stwierdziły, że go nie rozwiążą. Stało się to możliwe dzięki wzajemnej pomocy, np. Emilka wyjaśniła Julce: *Czerwone kółka to jabłka, niebieskie to śliwki, gruszka to patyczek. Jak zamienisz gruszkę na jabłko, to ile śliwek przypada na jedno jabłko?* Koniec wyjaśnień, bo Julka już znała odpowiedź.

Kacper i Igor wspólnie rozwiązują zadania z bajki matematycznej. Przygotowałam ją po obejrzeniu przez dzieci baletu „Królewna Śnieżka i…". Każda z par miała zadania przygotowane na kartkach. Treść każdego zadania czytałam głośno i dawałam czas na obliczenia. Potem porównywaliśmy rozwiązania.

Wśród zadań były dwa z pojęciami *dwóch części i połowy*. Do tej pory nie rozwiązywałam z uczniami tego typu zadań. Zamierzałam sprawdzić, czy uczniowie wyjaśnią sobie pojęcia. W zadaniu, w którym trzeba było podzielić jabłko na dwie części, dzieci narysowały kreskę wzdłuż owocu, były też jabłka z kreską w poprzek.

W drugim zadaniu rysowały drogę krasnali do domu *trzy długości patyczka w prawo, jedna długość patyczka w dół i pół długości patyczka w lewo.* Mikołaj z Marcinem zmierzyli patyczek linijką, po czym podzielili jego długość na pół (długość 2 cm 2 mm). Olek z Jaśkiem próbowali „na oko" zaznaczyć połowę patyczka i odrysować ją. Kacper i Martyna zauważyli pasek papieru (przygotowałam je wcześniej i położyłam na każdej ławce). Zmierzyli nim długość patyczka, złożyli kartkę na pół i odrysowali jej długość. Według mnie zadania tekstowe są dobrym środkiem, by zachęcać uczniów do współpracy i uczenia się od siebie.

Z całą klasą i jednocześnie w parach organizowałam zabawy rozwijające orientację przestrzenną. Proces ten wymaga czasu i aktywności dziecka. Ważny jest ruch ciała, gesty i obserwacja skutków przemieszczania się w przestrzeni. Najłatwiej dziecku jest rozróżnić kierunki w stosunku do własnego ciała: w górę, dół, do przodu, do tyłu. Znacznie trudniej odróżnić stronę lewą od prawej. W czasie zabaw oznaczyłam prawe ręce dzieci żółtymi strzałkami, jako punkt odniesienia, względem którego wykonywały ćwiczenia typu: prawa ręka w górę, trzy kroki w lewo itp. Uczniowie, którym kierunki prawo – lewo myliły się, mogli podglądać sąsiada stojącego obok. Nie czuli się wówczas zagubieni i zdezorientowani.

Ustawienie klasy w kole – parami – pozwoliło też na ćwiczenia zmierzające do określania kierunków względem innej osoby.

Kolejne zdjęcie pokazuje siedzące naprzeciwko siebie dzieci układające odliczone makaroniki po stronie wskazanej przez nauczyciela. Dzięki temu, że siedziały w taki sposób, dostrzegły to, co istotne. Strony człowieka się nie zmieniają – jak stwierdziła jedna z uczennic – ale, jeśli siedzimy buzią do siebie, to ona ma prawą rękę po drugiej stronie. Pojawiły się też inne spostrzeżenia co do osób siedzących po obu stronach czy tych po przeciwnej stronie koła. Poza tym, w takiej gromadce, jeśli nawet ktoś się pomylił, poprawił swój błąd i nie został on od razu przez wszystkich zauważony.

Moja praca na lekcjach matematyki nie ograniczała się tylko do organizowania pracy w parach. Po całorocznej pracy z tą klasą mogę jednak stwierdzić z całą odpowiedzialnością, że warto pracować parami. Dzieci naprawdę uczą się od siebie. Czują się pewniej, jeśli wiedzą, że mogą w każdej chwili poprosić kolegę o podpowiedź. Chętniej podejmują się rozwiązywania zadań różnego typu, bo nawet, jeśli odpowiedź będzie błędna, to odpowiedzialność ponoszą dwie osoby, a nie jednostka. Na pewno ta forma pracy sprzyja uczniom nieśmiałym, mniej pewnym swoich umiejętności.

Dla dzieci, które uczyłam, stała się ona tak oczywista i naturalna, że nawet w czasie sprawdzianu jeden z chłopców, gdy nie mógł sobie poradzić z rozwiązaniem zadania, poprosił o pomoc drugiego. Może dlatego, że dorośli czasami zbyt zawile wyjaśniają problem, a dzieci wcale tego nie potrzebują. Pamiętam, jak Olek tłumaczył Kubie rozwiązanie zadania: Ile potrzeba litrów wody, by napełnić 10 półlitrowych butelek? Ja poradziłabym narysowanie butelek, zaznaczenia ich pojemności. Zadawałabym pytania typu: Pół litra i drugie pół to ile razem i tak dalej. A Olek pokazał Kubie obydwie dłonie i wyjaśnił: Jeden palec to pół litra. Dotykając palcami jednej dłoni do palców drugiej, pokazał, że mały palec jednej ręki i mały palec drugiej ręki to litr, i tak samo z kolejnymi ich parami. Kuba już wiedział, ile litrów wody potrzeba.

Prowadzenie zajęć, podczas których dominowała praca parami, nie przysporzyło mi wielu problemów, ani organizacyjnych, ani z zachowaniem dyscypliny. Może było trochę głośniej. Często zmieniałam skład par, po to, by zaobserwować, który z uczniów potrzebuje wsparcia, nie jest pewny swoich umiejętności, a który odwrotnie, potrafi się podzielić swoją wiedzą i pomóc drugiemu. Takie pary były idealne, ale nie zawsze tak się udało. Dzieci w klasie są różne. Jedni indywidualiści, inni otwarci wobec drugich. Warto jednak próbować, bo praca parami ma ogromne plusy. Czy przygotowała do pracy w większej grupie?

Próby pracy w większych grupach na lekcjach matematyki rozpoczęłam już w początkowych miesiącach roku szkolnego, ale prowadziłam je rzadziej niż parami .Ze względu na liczebność klasy oraz szybką organizację przestrzeni sali lekcyjnej, tworzyłam grupy cztero- i pięcioosobowe. Uczniowie pracowali też w zespołach trzyosobowych. Zaczęłam, podobnie jak w zespołach dwuosobowych, od gier.

Gra **„O jeden więcej, o jeden mniej"**. Talię kart rozdajemy między grających. Cztery odkryte karty każdy kładzie na stoliku, pozostałe trzyma przy sobie. Na ustalone hasło gracze jednocześnie rozkladają swoje karty na odkrytych według reguły: kładziona karta musi być o jeden większa bądź mniejsza od przykrywanej. Wygrywa ta osoba, która pierwsza pozbędzie się wszystkich kart. W grze udział brały trzy osoby, które rywalizując ze sobą, doskonaliły spostrzegawczość, kontrolowały się nawzajem, ale też uczyły się współpracować. Musiały ustalić, która z osób rozda karty, która będzie rozpoczynała grę i która odpowiada za uporządkowanie miejsca zabawy. Przydział zadań osobom pracującym w grupie jest istotny i potrzebny, dlatego starałam się przygotowywać moich uczniów do tego już od pierwszych ćwiczeń.

Gra **„Trzy kostki"**. Trójka graczy rzuca po kolei jednocześnie trzema kostkami. Następnie rzucający,według własnego uznania,dodaje dwie wyrzucone liczby, a trzecią odejmuje. Wynik należało zapisać na przygotowanych kartkach. Wygrywała ta osoba, u której najczęściej pojawiał się wynik 8.

Gra doskonali umiejętności dodawania i odejmowania oraz pozwala wdrażać grupę do przestrzegania zasad, sprawdzania poprawności wykonywanych działań, ewentualnej pomocy przy liczeniu. Uczy też przydzielania ról w zespole, bo wymaga wyznaczenia osoby zapisującej wyniki. Dzieci uznały, że to bardzo ważna rola. Proponowałam wówczas, by każdy po kolei uzupełniał tabelę wyników. Każdy chce być wyróżniony i pełnić odpowiedzialną funkcję w grupie. Ponieważ są to uczniowie pierwszej klasy, tym trudniej niektórym z nich grać rolę drugoplanową. Myślę, że z czasem takich sytuacji będzie mniej, bo uczniowie nauczą się rozmawiać ze sobą i dzielić zadaniami. Organizowałam więc kolejne zajęcia, na których dominowała praca w zespołach.

Przygotowałam na przykład zabawę grę **„Kolorowe kółka"**, która wymagała odkrycia i zastosowania strategii, dzięki której uda się nakryć kartonikami pola tak, by w każdym szeregu i rzędzie pozostały dwa kółka w różnych kolorach. Gra ta zmuszała do dyskusji, wysłuchania propozycji współgrających, sprawdzenia i skorygowania ich, podjęcia ostatecznej decyzji, gdzie położyć kartonik – sporo elementów zmierzających do dobrej współpracy w grupie.

Grze towarzyszyła bardzo ożywiona dyskusja. Różnymi sposobami dzieci dochodziły do wyznaczonego celu. Niektórzy zauważyli, że w jednym rzędzie i jednym szeregu jest tylko jedno kółko danego koloru i nie należy go zakrywać. Inni rozwiązali zadanie, próbując na różne sposoby zakrywać pola z kółkami. Nie wszystkim udało się poprawnie ułożyć kartoniki, niektórzy potrzebowali więcej czasu i pomocy kolegów. Bardzo podobała mi się współpraca dzieci przy tej grze: rozmawiały ze sobą, nie zostawiły rozwiązania jednej osobie, nie sprzeczały się, kto ma układać kartoniki. Napawało mnie to optymizmem. Ale kiedy okazało się, że niektórzy uczniowie zapamiętali miejsce niezakrytych kółek, zrezygnowałam z tej gry na długi czas. Kontynuowałam jednak z pracę w zespołach.

Jak już wspominałam, zadania z treścią są wspaniałym wyzwaniem dla dzieci. Postanowiłam więc sprawdzić, czy rozwiązując je w grupie, uczniowie będą się od siebie uczyć, czy zaangażują się w pracę uczniowie słabsi. Jak będzie wyglądało komunikowanie się w zespole, czy przydzielą sobie role, które wpłyną na dobrą i efektywną pracę.

Przygotowywałam dla każdej grupy (4 lub 5 osób, klasa liczy 25 uczniów) te same zadania. Każda z nich otrzymała pakiet zadań (w specjalnych zeszytach albo na kartkach). Do dyspozycji były klocki, żetony, korale.Za każdą poprawną odpowiedź drużyna otrzymywała punkty, które na koniec zajęć były podliczane, a wkład i zaangażowanie całej grupy oceniane. Punkty-klocki przyznawałam po sprawdzeniu rozwiązania, gdy grupa zgłosiła gotowość.

Czasami dzieci po podziale na grupy same organizowały sobie miejsce pracy. Mogły łączyć stoły, a gdy chciały, pracowały na podłodze.

Różnie wyglądała wspólna praca zespołów. Niektóre doskonale potrafiły się zorganizować, wybrać osobę czytającą treść poleceń, zapisującą albo rysującą odpowiedzi. Słychać było ich rozmowy, wyjaśnienia i radość z szybkości zgłoszenia gotowości do oceny. Niestety, w innych grupach do rozwiązania zadań nie zaangażowali się wszyscy. Mateusz szybko zapisywał odpowiedzi i tłumaczył pozostałym, jak to zrobił. Kubę grupa poprosiła, żeby sam rozwiązał zadania, a pozostali rozmawiali, niekoniecznie na temat zadań. Trudno było mi kontrolować pracę wszystkich równocześnie, mobilizować zespoły do pracy. Tak dużą nadzieję pokładałam w zadaniach tekstowych. Sądziłam, że doskonale wpłyną na rozwijanie umiejętności współpracy. Przecież praca w małych grupach to jeden z czynników, które pozytywnie działają na proces uczenia się. Brak zaangażowania niektórych dzieci, niechęć do wspólnego działania zaniepokoiły mnie. Postanowiłam opracować z grupami zasady właściwej współpracy w zespole. Sądziłam, że konkretne wskazówki ułatwią im pracę. Zespoły otrzymały czarno-pomarańczowe kartki, na których naklejały zdania opisujące właściwe i niewłaściwe zachowania osób współpracujących w grupie. Efektem pracy był spis zasad, według którego powinien pracować zespół (pomarańczowa część kartki), pomijając zachowania znajdujące się na czarnej liście.

DZIELIMY SIĘ POMYSŁAMI	MÓWIMY TAK GŁOŚNO JAK SIĘ DA
MÓWIMY JEDEN PO DRUGIM	ROZWIĄZUJEMY ZADANIA SAMI
WYJAŚNIAMY SWÓJ POMYSŁ	NIE DZIELIMY SIĘ POMYSŁAMI
SŁUCHAMY, CO MÓWIĄ INNI	RYWALIZUJEMY ZE SOBĄ W GRUPIE

Przygotowane wspólnie zasady przypominałam dzieciom przed każdą pracą zespołową i organizowałam kolejne zajęcia w grupach, starając się egzekwować opracowane zasady dobrej współpracy.

Na jednym z zajęć trzyosobowe grupy (tym razem nie narzucałam składu grup) konstruowały makietę basenu znajdującego się na otwartej przestrzeni. Na dużych arkuszach papieru kartonowego trzeba było nakleić basen oraz leżaki o określonych przeze mnie wymiarach. Pozostałe elementy makiety grupy uzupełniały według własnego pomysłu. Sprawdzałam przy okazji wykonywania tego zadania umiejętność mierzenia linijką lub miarą.

Uczniowie z zaangażowaniem przystąpili do pracy. Bez sporów wykonywali kolejne czynności: mierzenie, wycinanie, naklejanie, ozdabianie. Słuchały siebie, były otwarte na propozycje współpracujących, po prostu się dogadywały. Te zajęcia bardzo mi się podobały. Moja rola ograniczała się tylko do kontrolowania poprawności mierzenia. Z tą czynnością niektóre dzieci poradziły sobie doskonale. Przygotowałam kwadratowe kartki 8 cm × 8cm. Basen miał mieć wymiary 8 cm na 18 cm. Dzieci mierzyły kartkę, dołożyły kolejną i jeszcze brakowało 2 cm. Jedni odmierzyli za pomocą linijki brakujące centymetry, inni złożyli kwadrat dwa razy i nie musieli mierzyć. Lekcja napawała mnie optymizmem: „Moje dzieci coraz lepiej pracują w grupach".

Zachęcona postawą uczniów przygotowałam kolejną, nieco inną lekcję. Były to **stacje matematyczne.** Podzieliłam klasę na pięć zespołów. Przed przystąpieniem do działań omówiłam z uczniami każdą stację, wyjaśniłam, jak będzie oceniana ich praca oraz w jaki sposób będą przechodzić ze stacji do stacji. Każda grupa otrzymała zestawy zadań ponumerowanych zgodnie ze stacjami. Grupy i zestawy zadań były oznaczone tym samym kolorem.

Stacja 1.* *Ile klocków znajduje się na rysunku? Na stoliku znajdowały się sześcienne klocki, które służyły do sprawdzenia poprawności wykonania zadania.

Stacja 3.* *Ile stóp każdego koloru zmieści się wzdłuż ławki? Oszacujcie, sprawdźcie. Zmierzcie, ile to centymetrów. Przygotowana karta zadania była podzielona na trzy części, by wpisać wyniki.

***Stacja 4.* Sprawdź, w które naczynia, oznaczone tym samym kolorem, możesz rozlać litr wody. Do dyspozycji były: jedno naczynie litrowe, trzy naczynia półlitrowe i pięć ćwierćlitrowych.**

***Stacja 5.* Jak odmierzysz: 11 minut, 8 minut, 9 minut i 2 minuty tymi klepsydrami?**

Do dyspozycji były: trzy klepsydry: pięcio-, trzy- i jednominutowa.

Stacje matematyczne po raz kolejny pokazały mi, że dzieci bardzo lubią działać. Po ewaluacji zdecydowanie najciekawszą okazała się stacja czwarta. Przelewanie wody jest tak atrakcyjne i, ciekawe, że nie miało konkurencji. Ale nie było to przelewanie bez potrzeby. Grupy poznały kolejne miary objętości. Pojawiło się pojęcie pół litra i obliczenie, że dwa pojemniki półlitrowe to litr. Po doświadczeniach dzieci wiedziały, że litr wody można przelać do 4 pojemników ćwierćlitrowych. Przy tej okazji pojawiło się określenie ¼ litra i kolejne ułamki.

Najtrudniejszym było natomiast zadanie z klepsydrą i odmierzeniem dwóch minut. Tylko jedna grupa sobie z nim poradziła. Mikołaj pokazał, jak to zrobić z pomocą trzyminutowej i jednominutowej klepsydry. Pozostałe grupy rozwiązały inne przykłady.

Miałam wrażenie, jakby dzieci działały zupełnie spontanicznie. Poczułam się nie jak typowy nauczyciel, ale koordynator działań dzieci. Przyglądałam się, słuchałam i na koniec oceniłam zaangażowanie w pracę. Nie ukrywam, wrzawa w sali była straszna. Ale czy to takie istotne, skoro dzieci się uczą, przeprowadzają doświadczenia, tłumaczą sobie niejasności, wspólnie odkrywają to, co dla niektórych nieznane, dobrze współpracują. Niestety, nie da się przewidzieć dokładnie, ile czasu na rozwiązanie danego zadania potrzebuje grupa. Występowały czasami „przestoje". Nie widziałam jednak sensu przygotowywania dodatkowych zadań, dzieci muszą mieć czas na chwilowy odpoczynek.

Jeszcze kilka razy przygotowywałam zajęcia, w czasie których uczniowie przeprowadzali doświadczenia z wodą, by rozwiązywać zadania matematyczne. Za każdym razem emocje były tak samo ogromne. Momentami dzieci nie dopuszczały mnie do głosu. Żeby odreagować, siadaliśmy i rozmawialiśmy o efektach ich doświadczeń.

Dla urozmaicenia zajęć i w celu wdrażania do pracy w coraz większej grupie zorganizowałam uczniom zabawę w sklep.

Część dzieci z klasy, w ustalonych zespołach (dwu- lub trzyosobowych, dobierały się same) przygotowywała stoiska sklepowe. Musiały też wycenić swój towar, ustalić, kto będzie go wydawał, a kto będzie kasjerem. Po zakończeniu zabawy pracownicy sklepu musieli podliczyć swoje zyski. Pozostałe dzieci w parach dokonywały zakupów. Do dyspozycji miały określoną kwotę (30 zł), zatem powinny przedyskutować, jakich zakupów mogą dokonać, by nie przekroczyć przyznanej kwoty. W czasie zajęć stałam się znów bardziej koordynatorem niż nauczycielem. Moja interwencja potrzebna była w momencie, gdy usłyszałam skargę: W tym sklepie oszukują, bo nie wydają reszty! Ekspedient nie mógł sobie poradzić z wydaniem reszty, nie chciał oszukać. Z pomocą przyszedł Oliwier, który pokazał, jak najłatwiej to zrobić. W trakcie zajęć zmieniałam grupy sprzedających. Dla niektórych dzieci była to bardzo prestiżowa funkcja, więc nie chciałam, by któreś poczuły się gorsze, gdy nie będą miały okazję być sprzedającym. Lubianą przez dzieci zabawę wykorzystałam do kształtowania w nich cech dobrej pracy w grupie, takich jak: aktywizowanie nieśmiałych i słabszych, wspólne podejmowanie decyzji i komunikowanie się oraz uczenie się od siebie.

Przedstawiłam kilka wybranych zajęć, fragmentów lekcji, zabaw i gier, które prowadziłam w klasie pierwszej na lekcjach matematyki, by zainicjować proces kształtowania umiejętności pracy w parach i grupach.

Założyłam, że rozpocznę pracę od najmniej licznej grupy, czyli pary. Organizowanie pracy w parach nie wymagało ode mnie zbyt wielu zabiegów. Ponieważ miała ona służyć uczniom w procesie nauczania i uczenia się, musiałam zadbać, by siedzące obok siebie osoby wpływały na siebie konstruktywnie. Nie warto tworzyć pary z dwójki dzieci, które dobrze sobie radzą. Lepiej wykorzystać ich potencjał w działaniu z innymi. Starając się poznać osobowość uczniów i ich umiejętności, zmieniałam obsadę par, stopniowo i z umiarem. Na początku nauki w klasie pierwszej dzieci muszą poczuć się bezpiecznie i pewnie. Dlatego początkowo same decydowały, z kim chcą pracować. Dopiero później dzieliłam na pary sama. Podział zależał przede wszystkim od rodzaju zadania, jakie stawiałam przed uczniami. Po pewnym czasie, czy chciałam, czy nie, siedzące obok siebie osoby konsultowały ze sobą polecenia. Nie zabraniałam im tego, bo moim celem było wdrożenie ich do pracy w grupie. Polega ona między innymi na komunikowaniu się, dzieleniu się swoimi pomysłami, pokazywaniu sposobu rozwiązania. Często też uczenie się polega na naśladowaniu. Dlaczego więc dziecko, które nie wie, co zrobić, nie miałoby podejrzeć rozwiązania kolegi. Zajęcia, podczas których dominowała ta forma pracy, organizowałam dość często. Przeplatałam je oczywiście zajęciami z całą klasą i pracą indywidualną.

Sądzę, że udało mi się dobrze przygotować uczniów do pracy w parach, ale nauczenie pracy w większej grupie było zdecydowanie trudniejsze i nie w pełni przyniosło efekty, których oczekiwałam. Zajęcia, na których dzieci pracowały efektywnie, angażowały się w wykonanie zadań, dzieliły się swoimi umiejętnościami z innymi, przestrzegały zasad dobrej współpracy, były dla mnie budujące. Niestety, nie wszystkie zajęcia tak wyglądały. Zastanawiam się nad przyczyną takiego stanu rzeczy. Może uczniowie klasy pierwszej są jeszcze za mali, by wymagać od nich takiej formy pracy? A może przygotowywane zadania były za mało atrakcyjne? Może niewłaściwy był dobór dzieci w zespole? Jedno jest pewne – nie zrezygnuję z pracy w grupach. Część zajęć udowodniła mi, że praca w zespole zachęca uczniów do współpracy i wzajemnego uczenia się od siebie, że w praktyczny sposób zdobywają oni umiejętności i wiedzę potrzebną w życiu. Przede mną jeszcze dwa lata!

Renata Fiertek
nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 64 w Bydgoszczy, staż pracy: 26 lat.

SPRZYMIERZEŃCY W NAUCZANIU MATEMATYKI, CZYLI JAK I KOGO WYKORZYSTAĆ, BY MATEMATYKA BYŁA CIEKAWA I PRZYSTĘPNA

Ewa Kilichowska

Zanim zaczęłam pisać ten tekst, spytałam moje koleżanki ze szkoły, co lub kto jest dla nich sprzymierzeńcem w nauczaniu matematyki. Ich odpowiedzi były następujące:
- program nauczania,
- podręczniki,
- wymiana doświadczeń i dyskusje z koleżankami,
- dobra współpraca z dyrekcją szkoły i rodzicami,
- dobre zadania i ćwiczenia,
- pomoce matematyczne i przybory,

A dzieci?

Gdy dzieci są zainteresowane

Pewnego grudniowego dnia zastaliśmy w sali ustrojoną choinkę. Pierwszoklasiści, których uczę, nie mogli się od niej oderwać, zrobiła na nich duże wrażenie. Wykorzystałam to zaciekawienie:
Co wiemy, a czego nie o tej ubranej choince?
- ile jest gwiazdek na choince,
- ile jest lampek,
- ile jest wszystkich ozdób,
- ile jest Świętych Mikołajów,
- ile jest dzwonków.

Zapytałam: *Jak moglibyśmy odpowiedzieć na te pytania?*
Odpowiedź brzmiała: *Trzeba zrobić grupy i każda odpowie na jedno pytanie.*
Tak też zrobiliśmy. Podczas pracy pojawiły się różne trudności, np. czy duże i małe gwiazdki liczyć razem czy osobno. Ktoś zaproponował, by policzyć je razem. Grupa przystała na tę propozycję.

W innej grupie wrzało: jedni twierdzili, że trzeba byłoby zdjąć lampki, bo inaczej nie uda się policzyć, inni twierdzili, że nie trzeba i zaczęli je liczyć. Początkowo mylili się, na koniec pojawiły się rysunki i liczby pod nimi.

Zabrakło nam czasu, by sprawdzić obliczenia, ponieważ musieliśmy opuścić salę. Mimo to wiele się udało:
- dzieci przeliczały ozdoby,
- pojawiły się rysunki jako narzędzie ułatwiające znalezienie odpowiedzi na pytanie,
- pod rysunkami pojawiły się zapisane liczby, a wśród nich np. 30 i 44,

Po raz pierwszy dzieci wykonywały rysunki do zadania. Okazało się, że liczą w zakresie 50, ale także liczby te zapisują. Wykazały się zaradnością rachunkową. Potrafiły dyskutować ze sobą, a w ostateczności szukać u mnie rady. Angażowałam się w ich działania tylko wówczas, gdy bezpośrednio zwróciły się do mnie z problemem. Podczas tych zajęć dzieci uczyły się komunikowania ze sobą, ze mną, a także szacunku do siebie i słuchania zdania innych.

A ja dowiedziałam się, że dzieci liczą i zapisują liczby w większym zakresie niż przewiduje to wybrany przeze mnie program . Zauważyłam, że jeśli coś dzieci interesuje, to potrafią się bardzo w to zaangażować: zadawały pytania, szukały metody pokonania pojawiających się trudności i proponowały odpowiedzi.

Dzieci pytają i rozmawiają o matematyce

Niekiedy inspiracją do działań matematycznych jest aktualne zdarzenie.

Był koniec listopada. Dzieci kupowały bilety do teatru. Postanowiłam wykorzystać tę okoliczność do tworzenia pytań i udzielania odpowiedzi:
Jutro jedziemy do teatru i potrzebujemy:
1. *dwa bilety na przejazd po 1,60 zł,*

2. bilety do teatru po 9 zł
dla każdego ucznia.
Na jakie pytania trzeba sobie odpowiedzieć?
Oto propozycje dzieci:
– *Ile każdy musi zapłacić, żeby pójść do teatru?*
– *Ile zapłacą wszyscy razem za bilety w jedną stronę?*
– *Ile zapłacimy za bilety w obydwie strony?*
– *Ile zapłaci cała klasa za bilety?*
– *Ile będą kosztowały razem bilety za przejazd i bilety do teatru?*

Próby odpowiedzi na postawione pytania nie zawsze były poprawne rachunkowo, ale uważam że warto było wykorzystać nadarzającą się sytuację do tego rodzaju ćwiczeń. Wtedy, gdy padały złe wyniki, dzieci je poprawiały. Słuchały siebie nawzajem i uważnie sprawdzały poprawność odpowiedzi.

Dla mnie to były wstępne ćwiczenia do samodzielnego układania zadań z treścią przez dzieci. Będę mogła tę umiejętność wykorzystać w przyszłości podczas analizy i rozwiązywania zadań tekstowych. Po raz kolejny dzieci prowadziły dyskusję, wykazały się zaradnością matematyczną.

Dzieci na lekcji wychowania fizycznego

Jest to sytuacja, którą wykorzystuję bardzo często na zajęciach. Kiedy mam zamiar podzielić klasę na zespoły, zawsze pytam, jak to zrobić, żeby w każdym zespole było tyle samo osób. Im dłużej trwa rok szkolny, tym więcej jest różnych propozycji.

Początkowo, gdy dzieliliśmy się na dwa zespoły, dzieci proponowały ustawianie się parami. Zwykle trwało to dość długo, bo przestawiano się, liczono, niekiedy była odpowiedź, że się nie da podzielić po równo, a stąd już tylko krok do liczb parzystych i nieparzystych. Ustalaliśmy, że przy nieparzystej liczbie dzieci jedna osoba z mniej licznej grupy musi wykonać ćwiczenie dwa razy, żeby były równe szanse.

Już w drugim semestrze ustawienie się w trzy rzędy nie stanowi problemu. Zawsze jednak zadaję pytanie:
Jak zrobić, by utworzyć trzy zespoły?
Oto przykładowe odpowiedzi:
– *Trzeba policzyć, ile nas jest*
– *Można ustawić się po trzech.*
– *Podzielić się tak, że odliczyć do 3 i jedynki będą jednym zespołem, dwójki drugim, a trójki trzecim.*

Pewnego dnia po zbiórce zapowiedziałam, że gramy w „Dwa ognie" i potrzebne są dwa zespoły równoliczne. *Co musimy zrobić?*
Sandra: *Możemy ustawić dwie osoby i do nich mogą dochodzić po kolei dzieci.*
Daria: *Mamy dwa rzędy, więc może być jeden zespół z jednego rzędu, a drugi z drugiego.*
Szymek: Można podzielić po 6 do dwóch zespołów.

Poprosiłam Szymka o wykonanie tego pomysłu. Odliczył po sześć osób raz, a potem drugi, zostało czworo dzieci, nakazał więc dwóm osobom dołączyć do jednej szóstki, a sam z ostatnią osobą dołączył do drugiej.

Przekonana jestem, że te działania zaprocentują wtedy, gdy będziemy mnożyć i dzielić. Na pewno będę odwoływała się do doświadczeń dzieci wyniesionych z tych lekcji.

Dzieci mówią, a ja uważnie je słucham

Podam przykłady, które dowiodą, zę uczeń może nam wskazać kierunki działania na lekcjach.

W październiku (drugi miesiąc pobytu dzieci w szkole!), na lekcji, podczas której liczyliśmy pieniądze, zdarzyła się sytuacja, w której uczeń zaskoczył mnie pytaniem podczas ćwiczenia. Moje polecenie brzmiało tak:
– *Ułóżcie 7 zł, wykorzystując monety, które znajdują się na waszych ławkach.*
Nagle zgłasza się Jakub i pyta:
– *Czy można ułożyć z pięćdziesięciogroszówek?*
Zdumiało mnie to pytanie, pomyślałam: w jaki sposób „50", jeśli znamy liczby w zakresie od 1 do 7? Ale skoro pyta, to może wie, jak to zrobić. Więc odpowiedziałam:
– *Jak potrafisz, to proszę bardzo.*
I tutaj kolejne zdumienie, bo chętnych było więcej. Bezbłędnie ułożyli 7 zł, korzystając także z monet pięćdziesięciogroszowych.

Pieniądze okazały się bardzo dobrym środkiem do działania na liczbach. Wykonywaliśmy jeszcze wiele podobnych ćwiczeń. Uczniowie prześcigali się w pomysłach, jak to zrobić, jak ułożyć daną kwotę z jak największej liczby monet, a szczególnie groszy.

Nie zadawali już pytań, czy wolno, tylko wykonywali zadania według swojego pomysłu i sprawiało im to mnóstwo frajdy. Cenne w tych zadaniach było to, że uczniowie:

- pracowali parami, w grupach i współpracowali ze sobą,
- podawali kilka wersji tej samej kwoty,
- zdarzało się, że znajdowali błędy u innych,
- podpowiadali, jak błędy te poprawić,
- dzielili się pomysłami,
- prześcigali się w pokazywaniu nowych rozwiązań,
- samodzielnie układali zadania z treścią.



Uczniowie uczyli się od siebie i dowiadywali , że zadanie można rozwiązywać na wiele sposobów. Wielość tych rozwiązań daje powód do rozmowy, ale także do oceny ich poprawności. Efekt tych poszukiwań był widoczny na sprawdzianie, w którego zadaniu dzieci miały dorysować monety tak, by zawsze było 10 złotych, pojawiły się dwudziestogroszówki oraz pięćdziesięciogroszówki.

Muszę przyznać, że pytanie Jakuba zmieniło moje myślenie o nauczaniu matematyki. To ono spowodowało, że przestałam podczas zajęć ograniczać uczniom zakres liczbowy. Dałam dzieciom swobodę w wielu czynnościach na lekcjach, a one ciągle poszukiwały coraz to ciekawszych rozwiązań tego samego zadania.
Gdy rozmienialiśmy pieniądze, to pomysłów było często tyle, że nie wszyscy mogli je zaprezentować. Oczywiście, jest to dla mnie powód do zadowolenia, gdyż widzę efekt naszej wspólnej pracy na lekcjach.

Dzieci i tabela liczb

Klasa, którą uczę wykonywała tabelę (planszę) stu liczb na podłodze na korytarzu

Uczniowie tworzyli ją z dużym zaangażowaniem, było przy tym wiele emocji. Jedne z zajęć, które realizowaliśmy przy wykorzystaniu tej planszy, poświęcone było utrwalaniu znajomości liczb w zakresie 20. Dzieci były żywymi liczbami, szukały swojego miejsca na planszy i sprawdzały, których liczb nie ma.

Liczb do wyboru było 20, a uczniów 17, dlatego zadałam pytanie:
Dlaczego nie wszystkie liczby w zakresie 20 są zajęte?
Dzieci wyjaśniły, że są uczniowie nieobecni, podały, ile osób jest obecnych, i odczytały z planszy liczby, na których nikt nie stał. Sformułowałam kolejne zadanie:

czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

Odejmijcie 2 od swojej liczby i zajmijcie pole z wynikiem.
Okazałosię, że Jedynka i Dwójka stanęły poza planszą. Dwójka odpowiedziała, że jest Zerem i nie ma go na planszy. Jedynka zaś wyjaśniła, że dla niej też nie ma miejsca na planszy, bo teraz jest Minus Jeden.
Skoro pojawiła się liczba ujemna, to zapytałam:
– *Co to znaczy, że jest -1?*
Kacper odpowiedział, że nie umie tego wytłumaczyć, ale wie, że to jest –1.
Marta wytłumaczyła to tak: *To znaczy, że jak miałam 1 cukierka i dałam koleżance, a chciałam dać drugiej, to jego nie miałam.*

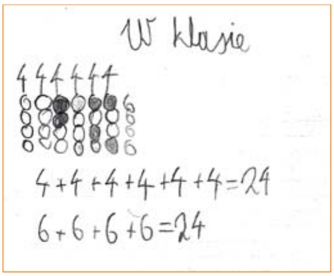
Przytoczone zajęcie prowokowało dzieci do opisywania rzeczywistości, notowania za pomocą symboli i liczb tego, co wykonały w tabeli, ale także do zadawania pytań i szukania na nie odpowiedzi.

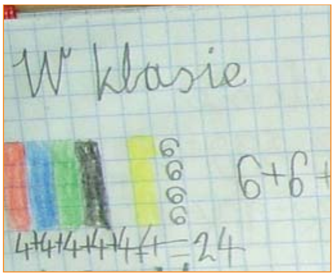
Potem wielokrotnie spotykałam na planszy inne klasy z nauczycielami, realizujące jakieś zadania matematyczne. Stała się ona swoistym placem zabaw.

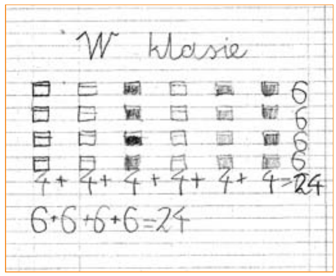
Tabela liczb jest ulubionym miejscem spędzania czasu na przerwie przez dzieci, które uczę. Potwierdza się przy tej okazji powiedzenie, że matematyka jest wszędzie.

Co się zdarzyło w Dzień Dziecka

Przygotowałam farby do malowania palcami, ale zanim dzieci zaczęły malować, uważnie obejrzeliśmy farby. Poprosiłam dzieci, żeby ułożyły je kolorami. Zadałam pytanie:
– *Jak policzyć, ile jest wszystkich farb?*
Szymek powiedział, że jest 6 kolorów po 4 pudełka w każdym z nich, czyli 4 razy 6 to 24. Ku mojemu zaskoczeniu kilku uczniów wiedziało, że to jest mnożenie. Byli i tacy, którzy mówili, że wystarczy dodać 6 czwórek albo 4 szóstki. Dzieci ułożyły 4 rzędy po 6







słoików lub 6 rzędów po 4 słoiki z farbami, a następnie zrobiły rysunek w zeszytach

Zapis za pomocą cyfr stał się okazją do dzielenia się spostrzeżeniami:

– *czwórek jest więcej do dodania, bo 4 jest mniejsze od 6,*
– *6 jest większe o 2 od 4 i jest ich mniej, więc szóstek jest mniej.*

Następnie poszliśmy na tabelę liczb – ustawiliśmy na niej pojemniki i sprawdziliśmy, czy zostały dobrze policzone.

Dzieci sprawdzają, ile piątek mieści się w setce

W ćwiczeniach, z których korzystamy, znajdowało się polecenie zamiany złotówki na jednogroszówki. Następnie sprawdzaliśmy, ile dwójek, a potem ile piątek mieści się w 100. Ponieważ nie wszystkie odpowiedzi dzieci były poprawne, zaproponowałam, by to sprawdzić w tabeli stu. W klasie było 19 osób. Wykonywaliśmy to w ten sposób, że liczyliśmy po pięć, dzieci ustawiały się każde o pięć kratek dalej niż poprzednicy.

W pewnym momencie Sandra stanęła na liczbie 95,
a Mateusz skomentował: *Gdyby był Wojtek, to musiałby stanąć na 100.*
Julka natychmiast powiedziała: *Ale zamiast Wojtka może stanąć pani.* Tak też zrobiłam.
Zaczęła się rozmowa o tym, co widać na planszy:
Weronika: *Utworzyły się dwa rzędy.*
Daria: *Pomiędzy nami w rzędach jest odległość 5, czyli pięciu kratek.*
Karol: *Ja wiem, dlaczego są dwa rzędy, bo to jest zawsze co 5, a w rzędach do góry, zawsze co 10*
Po czym kolejno odczytaliśmy sekwencje liczb w pierwszym i drugim rzędzie. Na koniec Weronika podsumowała, że jest 20 razy po 5, czyli 100. A Marta dodała, że też jest 10 razy po 10 i to jest 100.

Dzieci doliczały kolejne piątki, odczytywały liczbę, na której stają. Troje dzieci miało kłopot, w którym miejscu zacząć odliczanie po pięć, więc inni uczniowie im to wytłumaczyli.

Bardzo mnie cieszą rozmowy między dziećmi, gdy wyjaśniają sobie problemy matematyczne. Wsłuchuję się w ich sposób mówienia i rozumowania. Często jest zupełnie inny niż schematy, które stworzyliśmy w nauczaniu matematyki. Te nasze schematy często nie pozwalają dzieciom na samodzielne myślenie, skuteczne poszukiwanie własnych rozwiązań – na rozumienie matematyki.

Okazało się, że dzieci potrafią myśleć przez analogię, bo gdy zapytałam je już w klasie, jaka sekwencja będzie, gdy staną na czwórce albo na ósemce, większość dzieci bez trudu zapisała kolejne liczby. Uczniowie znaleźli regułę, zgodnie z którą liczby następowały po sobie.

czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

Przy dodawaniu takich samych liczb dzieci mówią o mnożeniu

Pracowaliśmy nad utrwalaniem liczby w zakresie 20.

Działo się to pod koniec listopada. Uczniowie przedstawiali, ile to 15, 16, 17, 18, 19, 20. Pracowali trójkami, a następnie dzielili się swoimi spostrzeżenia:
Julia: *16 to są 4 rzędy po 4.*
Kinga: *To znaczy że są 4 szeregi i w każdym są 4 kasztany.*
Fabian: *One tworzą równe paski te szeregi, a razem tworzą kwadrat.*
Całość rozmowy podsumowała Kinga, mówiąc:
Skoro są 4 rzędy po 4 to znaczy, że jest to mnożenie.
Natomiast zespół, który układał 17, relacjonował tak:
Bogna: *Układaliśmy po 5, ale 2 nam zostały.*
Mateusz: *To znaczy, że oni mają liczbę nieparzystą.*
Kinga nazwała liczby nieparzyste niekoleżeńskimi. Następnie zajęliśmy się porządkowaniem ułożonych liczb, gdyż Karol stwierdził, że są to liczby po kolei od 15 do 20. Na moje pytanie, co to znaczy, że są to liczby po kolei, Daria wyjaśniła, że następna jest *o 1 większa od poprzedniej.*
Fabian zaproponował, żeby ustawić liczby od największej do najmniejszej, a Marta skomentowała to tak: *Wtedy następna liczba będzie mniejsza o 1 od poprzedniej.*

Podczas tych zajęć uczniowie wykazali się wieloma umiejętnościami: rozpoznawali oraz nazywali liczby parzyste i nieparzyste, tworzyli ciągi liczb w kolejności rosnącej i malejącej, używając pojęć: *o tyle więcej, o tyle mniej*, budowali intuicję mnożenia. Do tej pory nie używałam pojęcia mnożenia, a więc pojawiło się ono z innych doświadczeń dzieci.

Pierwszoklasiści rozwiązują zadanie z testu OBUT 2013

Zastanawiałam się, czy uczniowie klasy I poradzą sobie z zadaniem, które w oryginale brzmiało następująco:
W każde okienko wpisz taką cyfrę, aby wynik był poprawny.

a. 96 – 2 □= 68
b. 6 + 7□= 100

czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

Zmodyfikowałam to zadanie, ale polecenie pozostało takie samo. Na tablicy zapisałam działania z okienkami:
1□+ □0 = 20 □2 + □8 = 30 2□ – 1□= 10 □4 – □3 = 11
– Przyjrzyjcie się tym działaniom. Czy ktoś wie, co trzeba tutaj zrobić?
Mateusz: *To proste. W miejsce kratki trzeba wpisać cyfrę.*
– Czy wiadomo, jaką?
Kacper: *Cyfry od 1 do 9.*
Karol: *Ale jeszcze zero.*
Kuba: *Teraz trzeba wpisać takie liczby, żeby był ten wynik.* I pokazał na liczbę po znaku równości.
Julka: *By powstała ta liczba na końcu.*
Weronika: *Czyli te cyfry to 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.*
Następnie uczniowie zabrali się do indywidualnej pracy w zeszytach. By sprawdzić poprawność zapisów w zeszytach, wykonywaliśmy to zadanie na tablicy. Przy ostatnim działaniu głos zabrał
Mateusz: *Proszę pani, ale to idzie po kolei.*
Zapytałam: *Co znaczy po kolei? Możesz to wytłumaczyć?*
Daria: *Ta pierwsza cyfra dziesiątek musi być większa od tej drugiej o jedną.*
Karol: *Ta cyfra z lewej jest o 1 większa od tej z prawej, a ta z prawej o 1 mniejsza od tej z lewej.*
Mateusz: *Bo jak tam jest 1, to pod nim jest 2, potem 3 i tak dalej.*
– W takim razie, czy wiemy, jakie powinno być następne działanie?
Dzieci chętnie zapisywały kolejne cyfry, mówiąc, co piszą i dlaczego tak powinno być:

$\boxed{1}$4 – $\boxed{0}$3 = 11
$\boxed{2}$4 – $\boxed{1}$3 = 11
$\boxed{3}$4 – $\boxed{2}$3 = 11
$\boxed{4}$4 – $\boxed{3}$3 = 11…
Ostatnim działaniem było: 94 – 83 = 11.
Jedna dziewczynka miała kłopot, by to zrozumieć, głośno powiedziała:
– Ja nie wiem o co chodzi, to jest za trudne.
Zaraz odezwały się głosy chętne do tłumaczenia.

Podczas tego ćwiczenia raz jeszcze dzieci zauważyły regułę, zgodnie z którą można wykonać kolejne działania. Potrafiły zinterpretować problem matematyczny i posłużyć się ustaloną regułą w dalszym działaniu. Podczas naszego „bąblowego" spotkania zadano mi pytanie: *Dlaczego skończyliście na 9?* Pytanie zainspirowało mnie, żeby zrobić dalszy ciąg tego ćwiczenia.

Zadanie uczniowie wykonywali w grupach trzyosobowych. Przypomnieliśmy zapis z poprzednich zajęć, a następnie zapytałam: *Czy wiemy co będzie dalej?*
Jak pokazują efekty pracy, pierwszaki wiedziały:

Zanim zaczęliśmy rozmowę o efektach pracy, Kuba spojrzał na tabliczkę innego zespołu, na której były zapisane jedynie trzy przykłady (por. powyżej) i zapytał:
– Ale czemu wy nie napisaliście, co dalej?
Zespół odpowiedział: *Bo my nie wiemy.*
Na to Kacper: *To ja wam wytłumaczę. To nie może być 7, bo różnica musi być o 1 mniejsza. Wy chyba zgadywaliście?*
Nagle chłopcy z tego zespołu mówią, że już wiedzą i zaczynają pracować.
O dziwo, właśnie w tym zespole na koniec było najwięcej przykładów. Następnie, po naradzie w grupach, uczniowie przedstawiali wnioski z wykonanej pracy. Oto niektóre z nich:
– Z lewej liczby są większe o 1 od tych z prawej.
– W każdym rzędzie w dół jest w kolejności coraz więcej, bo jest 10, 11, 12, 13, a w drugim też w kolejności, ale od 9, 10, 11, 12.
– Co jeden niżej na skos jest ta sama liczba, są pięterka i pięterko niżej jest ta sama liczba.
Takim językiem posługiwała się Julia – nazwała kolejne działania pięterkami, pokazując je podczas wyjaśniania zależności między liczbami.
– Jest od 5 do 11 przykładów, ale może ich być dużo więcej.
Szymon skomentował na zakończenie, że niektóre liczby mają dwie cyfry, a inne trzy. Dużo nowych rzeczy wydarzyło się na tej lekcji. Sprawdziło się, że trzyosobowe grupy sprzyjają większemu zaangażowaniu ich uczestników.

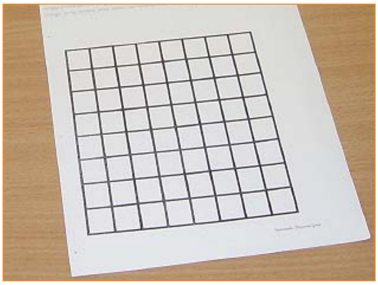
Widzę postępy w rozumowaniu dzieci, ale także w tym, jak dyskutują między sobą, jak słuchają się i rozumieją. Ważne jest, żeby docenić znaczenie języka dzieci, który jest dla nich bardziej zrozumiały niż język dorosłych – dajmy im możliwość wyjaśniania po swojemu! Po wykonaniu przez dzieci tych zadań miałam naprawdę dużą satysfakcję.

Dzieci i gry matematyczne

Wiele razy rozmawiałyśmy wcześniej z koleżankami, że gry to dobra pomoc, ale nie ma na nie czasu. Są do przyjęcia jedynie na zajęciach wyrównawczych lub kółku matematycznym. Kiedy je wykorzystywać? Nie ma na to czasu, trzeba realizować program.

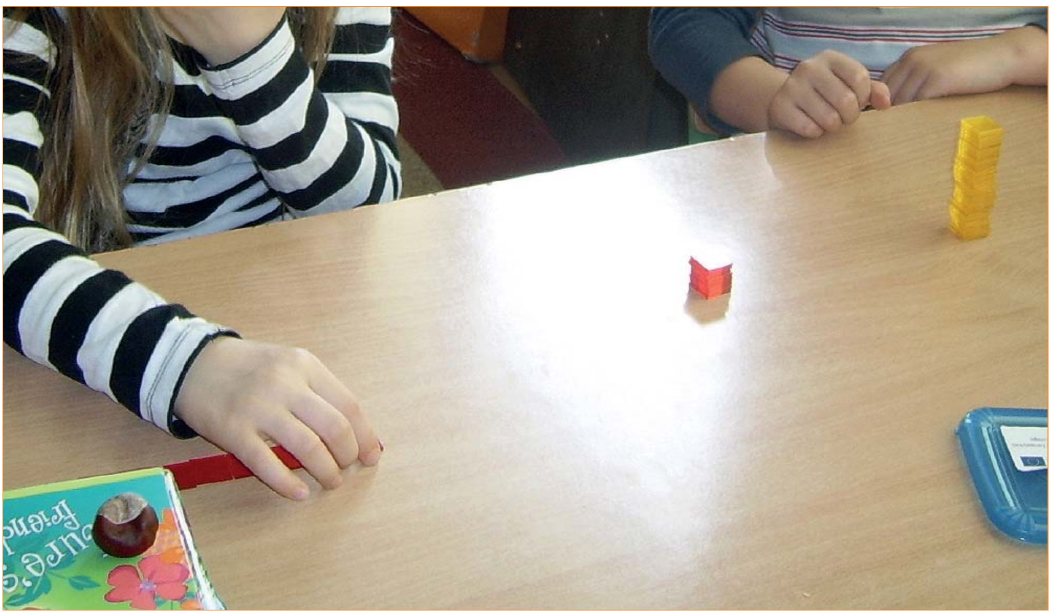
czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

Na początku drugiego semestru w klasie I zagraliśmy w taką oto grę. Graliśmy parami. Układaliśmy prostokąty z kolorowych kwadratów o wymiarze takim jak okienko planszy. Każdy gracz miał kwadraty swojego koloru. Gracze na zmianę rzucali kostką. Wyrzucona liczba oczek informowała, z ilu kwadratowych nakrywek ma składać się prostokąt, który należy ułożyć na planszy, nakrywając puste pola. Gra trwa aż do pokrycia całej planszy. W czasie gry powstawały różne sytuacje. Bogna zgłosiła trudność, ponieważ wyrzuciła 6 oczek i nie miała gdzie ułożyć prostokąta, gdyż nie mieścił się już na planszy. Po naradzie dziewczynki podjęły decyzję, że w tej sytuacji trzeba czekać jedną kolejkę. Na koniec każda para liczyła, ile każdy gracz położył swoich kwadratowych nakrywek na planszy. Dzieci porównywały w różny sposób, kto ich użył więcej, a kto mniej.

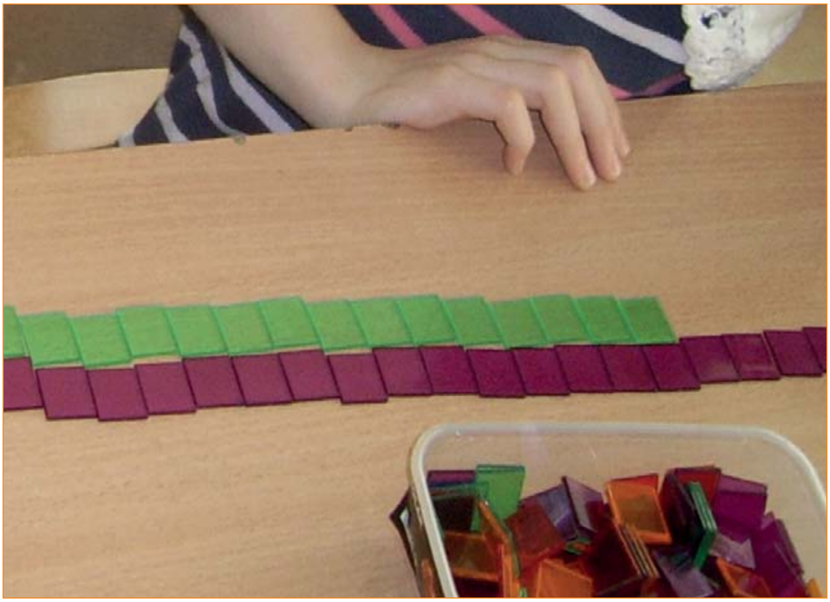


Jedne pary przeliczały, inne układały pary klocków, jeszcze inne układały żetony w stosiki. Dzieci zapisywały na tablicy wyniki obliczeń, mówiąc:
– *Weronika ma mniej ode mnie, bo ja mam 34, a ona ma 30.*
Zauważały błędy w obliczeniach:
– *Ale Kacper i Karol mają źle, bo wszystkich kwadratów powinno być 64, a oni mają więcej.*
Dało to okazję do sprawdzenia, gdzie chłopcy popełnili błędy i do ich poprawienia.

Te gry uczyły dzieci wielu umiejętności. Na pewno współpracy, cierpliwości, przyjęcia przegranej. Z matematycznego punktu widzenia była to okazja do liczenia, przeliczania, zapisywania wyników obliczeń,



czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna



szukania sposobów porównywania liczby wykorzystanych kwadratów. Uczniowie sprawdzali się nawzajem. Utrwalali pojęcie prostokąta. Używali zwrotów matematycznych. Poszukiwali błędów i poprawiali je.
Pojawienie się ułożenia klocków w dwóch rzędach po kilka, w czterech rzędach po pięć itp. umożliwi mi wykorzystanie tej sytuacji do mnożenia.

Gry mogą umożliwić uczniom wzajemną kontrolę wykonywanych działań i układów na planszy. Dla mnie były okazją do zweryfikowania poglądu na temat myślenia dzieci. Pozwalają na przełożenie czynności i konkretu na język symboli i odwrotnie. Pozwalają na dyskusję i naprawę błędów oraz na opowiadanie o swoich sposobach rozwiązania. Umożliwiają zrealizowanie tematów programowych w dużo ciekawszy sposób.

Dzieci wykorzystują liczby wycięte z kartek z kalendarza

Było to jedno z kolejnych ćwiczeń do utrwalania pozycji liczby w tabeli liczb, tym razem w zakresie 36. To zadanie wykonywały dzieci w styczniu. Uczniowie pracowali w parach. Po wycięciu liczb z kartek z kalendarza układały je w kolejności na planszy 6 × 6. Po ich ułożeniu nastąpiła wymiana spostrzeżeń:

– *Liczby są ułożone od najmniejszej do największej.*
– *Najmniejsza to 1, a największa 31.*
– *Jedni układali od góry 1, a inni od dołu.*

Pytam: *Czy wiecie dlaczego 31 jest największą z liczb?*
Julka: *Bo to są kartki z kalendarza.*
Sandra: *Miesiąc ma najwięcej 31 dni.*
Mateusz: *A ja coś widzę. Bo 31 jest samo w rzędzie, czyli jest w sumie 36 kratek na planszy.*

Okazało się, że uczniowie w innych zespołach też to zauważyli, bo już wcześniej uzupełnili puste okienka kolejnymi liczbami. Dostrzegli także, że w każdym rzędzie jest po 6 liczb, podawali, że najpierw jest 6, a potem 12, 18, 24, 30. Poszukiwali także sąsiadów 15, potem innych liczb, podawali liczby z lewej i prawej strony tej wybranej. Szymon stwierdził, że sąsiadami są także liczby nad innymi i pod spodem, więc i te liczby zaczęto podawać. Uczniowie się nauczyli, że z kalendarza da się wyczytać różne informacje. Liczby z kalendarza pozwoliły utrwalić liczbę dni w miesiącach, ale także umożliwiły rozmowę o liczbach. Dzieci zwróciły uwagę na wielokrotność szóstki, na liczby mniejsze o 1 i większe o 1. Ustawiali je w kolejności od najmniejszej do największej i odwrotnie.

czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

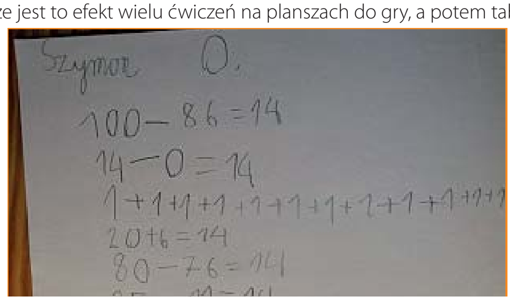
Dzieci podają rozkład liczb

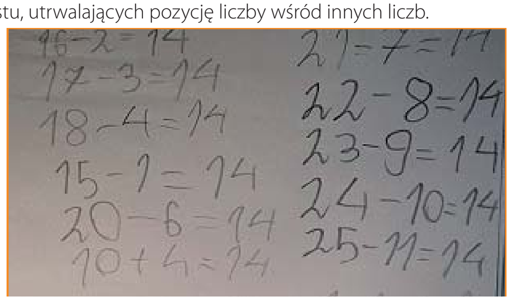
Kiedy na początku roku szkolnego uczniowie pokazali na palcach, ile to jest 8 i to wcale nie było tylko 7 dodać 1, ale także np. 3 dodać 5, już wtedy wiedziałam, że uważnie muszę śledzić ich tok myślenia.

Był grudzień, gdy po raz pierwszy Szymon, a potem drugi Szymon i Jakub podając rozkład liczby, dali przykłady na odejmowanie. Okazało się, że inni zaczynają podążać ich tokiem rozumowania i liczba przykładów była coraz większa, a i wykorzystywane liczby były coraz większe.

W czerwcu, chcąc sprawdzić, jak dzieci sobie radzą z rozkładem liczb, poprosiłam o zapisanie 14 za pomocą dowolnych działań. Tutaj uczniowie wykazali się znajomością dużych liczb, wystąpiło dodawanie i odejmowanie. Dzieci wykorzystały także swoje doświadczenia związane z sekwencjami.

Wynik tego zadania przerósł moje oczekiwania. Dzieci posługiwały się – i to na ogół poprawnie – liczbami trzycyfrowymi Sądzę, że jest to efekt wielu ćwiczeń na planszach do gry, a potem tabeli stu, utrwalających pozycję liczby wśród innych liczb.





Dziś jestem przekonana, że nie należy ograniczać zakresu liczbowego do działań nawet w klasie pierwszej. Wierzę w możliwości matematyczne każdego ucznia w klasie. Sądzę, że moja wiara ma też przełożenie na wiarę dzieci w swoje możliwości.

czyli jak i kogo wykorzystać, by matematyka była ciekawa i przystępna

Dzieci moimi sprzymierzeńcami w nauczaniu matematyki

Po pytaniu Jakuba, czy może skorzystać z pięćdziesięciogroszówek, zmieniłam sposób pracy. Postanowiłam słuchać dzieci i iść za ich pomysłami. Zasoby wiadomości i umiejętności matematycznych, jakie miały dzieci, były znacznie większe, niż sądziłam do tej pory. W związku z tym starałam się stwarzać sytuacje, w których następowałoby wykorzystywanie wiedzy pozaszkolnej na potrzeby szkolnej matematyki.

1. Od samego początku dzieci uczyły się od siebie, gdy pracowały parami, trójkami i w większych grupach.
2. Zadania obliczeniowe z ćwiczeń wykorzystywały do poszukiwania zależności między liczbami, szukania reguł i stawiania pytań.
3. Wykonywanie „słupków" stawało się początkiem dalszych działań, poszukiwania sekwencji, szukania analogii itp.
4. Zadania z treścią z ćwiczeń wykorzystywały do zmiany danych, do stawiania nowych pytań, do zabawy np. w sklep, do rozwijania zadań i poszukiwania różnych rozwiązań.
5. Dzieci same pokazywały drogę postępowania, którą chcą podążać w celu rozwiązania zadania.
6. Wykonywały rozmaite czynności, które były podstawą do mówienia, do opisywania, do układania zadań.
7. Gry i zabawy wykorzystywały do zdobywania umiejętności matematycznych.
8. Posługiwały się zwrotami i nazwami wymyślonymi przez siebie, np. o liczbach nieparzystych – „samolubne".
9. Uczyły się słuchać innych i kontrolować siebie.

Na pewno przez ten miniony rok nauczyłam się uważnie słuchać dzieci. Starałam się inspirować je do działania i wspierać, ale nie wyręczać. Wiem, że dzięki temu moi uczniowie dużo więcej się nauczyli.

Ważne jest to, że samodzielnie myślą, doświadczają, dyskutują, wyciągają wnioski. Na pewno wyłoniła się grupa wiodących uczniów, ale z biegiem czasu dołączali do nich następni. Budujące były takie momenty, kiedy słyszałam, jak uczniowie mówili: Jeszcze muszę to sprawdzić, i np. wyjmowali patyczki albo szli na tabelę liczb lub do liczydła. Wielokrotnie chodziłam za nimi, by patrzeć, jak sprawdzają swoje wątpliwości. Cenne jest też to, kiedy dziecko mówi, że czegoś nie rozumie i potrafi powiedzieć, czego dotyczy wątpliwość. Dzieci chętnie sobie pomagały, gdy napotkały trudności. Sądzę, że jest to wynik mojego nowego sposobu pracy. Na lekcjach rzadko jest cisza, ktoś chodzi, inny wychodzi na tabelę liczb, jeszcze ktoś o coś pyta. Podczas pracy grupowej jest też dużo emocji. Ścierają się poglądy, niekiedy dzieci proszą mnie o interwencję, ale im bliżej końca roku, tym zdarzało się to rzadziej.

Podczas pracy samodzielnej zazwyczaj pracuję z uczniem, który gorzej radzi sobie z nauką, ale raczej wspieram i podpowiadam, jak ma działać.

Uważam, że dzieci posiadły zaradność rachunkową, swobodnie posługują się liczbami w zakresie 100. Sądzę, że są gotowe, by zacząć rozwijać kolejne umiejętności: mnożyć, dzielić, układać i rozwiązywać zadania typowe oraz nietypowe. Wiem, że dzieci zgromadziły wiadomości i nabyły umiejętności, na których możemy bazować w klasie drugiej.

Ewa Kilichowska
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 63 w Bydgoszczy; w zawodzie 35 lat.

O TYM, CZY MATEMATYKA POWINNA BYĆ SUCHA CZY MOKRA, CZYLI O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ TEKSTOWYCH PRZEZ UCZNIÓW

Iwona Leśniewska

O matematycznej tradycji słów kilka

Od trzech lat, po każdym badaniu OBUT, w mediach, na portalach i forach internetowych pojawiają się alarmujące tytuły, toczą się żarliwe dyskusje, niezadowoleni rodzice i oburzeni nauczyciele przedstawiają swoje opinie o teście. Oto kilka tytułów z portalu www.natablicy.pl:

Sprawdzian trzecioklasisty z CKE OBUT 2011. Opinie: Test niezgodny z podstawą programową;

Sprawdzian trzecioklasisty z CKE OBUT 2012. Nauczyciele zbojkotują wprowadzanie wyników testu do systemu?;

OBUT 2013. Rodzice są oburzeni poziomem testu trzecioklasistów. Opinie: To był test na inteligencję!;

A to charakterystyczne opinie o zadaniach z matematyki zamieszczone na powyższym portalu oraz na stronie www.45minut.pl.

Test był dla dzieci trudny i na inteligencję. Fajny to on by był na olimpiadę lub jakiś konkurs do wyławiania „perełek" wśród dzieci. […] Zadania OBUTa to zadania złożone, wymagające analizy wielu danych, wyszukiwania zależności… (nauczycielka);

Taki test to na zakończenie klasy 6, a nie 3. Zadania matematyczne żywcem wzięte z kangurka matematycznego (belferka);

Matematyka to porażka. Zadania były dla dzieci zdolnych i bardzo sprytnych (gość);

Autorom tych badań zrobiłabym sprawdzian znajomości podstawy programowej i wiadomości na temat psychologii rozwojowej ze szczególnym zwróceniem uwagi na rozwój myślenia (linczerka);

[…] Ten test nie badał umiejętności, tylko miał na celu wyłonić uczniów wybitnie zdolnych, a przeciętniakom pokazać, że są za słabi (nauczycielka).

Poniższa opinia była wyjątkiem:

Zadania OBUT zwracają uwagę, by myśleć za każdym razem, by nie pisać tylko regułek i działań, a próbować wyobrazić sobie sytuację, narysować schemat i spojrzeć na to z innej strony. Rozumiem, że rodzice i nauczyciele są oburzeni, bo zadania są zupełnie inne niż te, które wykonują na lekcjach – niestety moi państwo, póki nie zaczniemy zmieniać podręczników i szukać rozwiązań, by uczyć myślenia i praktycznego wykorzystywania wiedzy, to do niczego dobrego to wszystko nie będzie prowadziło (nauczycielka klasy III).

Dlaczego przytaczam opinie nauczycieli i rodziców? Oczywiście nie dlatego, aby je oceniać, krytykować czy też opowiadać się za testami lub przeciw nim. Zwyczajnie uważam, że każdy głos w dyskusji dotyczącej uczenia się – nauczania matematyki jest ważny. Szczególnie w sytuacji, *gdy niepokojąco prezentują się wyniki TIMSS (Międzynarodowe Badanie Wyników Nauczania Matematyki i Nauk Przyrodniczych). W kompetencjach matematycznych wynik polskich uczniów jest zdecydowanie poniżej średniej międzynarodowej*[1]. Niektórzy dodają, że wyniki polskich uczniów są *dla naszego kraju kompromitujące*[2], znaleźliśmy się bowiem na ostatnim miejscu wśród krajów europejskich.

Przyczyny tego stanu rzeczy są zapewne złożone. Niektórzy znajdą szereg argumentów, aby nie najlepsze wyniki badań usprawiedliwić, inni będą szukać winy i winnych. Niezależnie jednak od głoszonych poglądów, również na temat testów OBUT i ich wyników, warto zastanowić się nad tym, co zrobić, aby polscy uczniowie w zakresie kompetencji matematycznych dorównywali swoim rówieśnikom z innych krajów. A o jakie kompetencje matematyczne chodzi? Jak wykazują badania nasi uczniowie sprawność rachunkową, a więc umiejętności związane z wykonywaniem obliczeń, mają opanowane na wysokim poziomie. Jednak narzędzia, które posiadają, sprawdzają się tylko w zadaniach opartych na schematach. Badania TIMSS oraz OBUT pokazują, że polscy uczniowie nie radzą sobie z zadaniami nietypowymi, nieszablonowymi, nie radzą sobie z wykorzystaniem znanych im narzędzi w sytuacjach nowych, a wiedza wyniesiona z lekcji matematyki okazuje się dla nich nieprzydatna życiowo. Dlaczego? Może ma na to wpływ nasza tradycja matematyczna, przekonanie nauczycieli i rodziców, m.in. że:

- uczniowie klas początkowych nie potrafią sami odkrywać matematycznych zależności, samodzielnie rozwiązywać matematycznych problemów, potrafią jedynie to, co już zostało w szkole „przerobione",
- aby uczniowie coś wiedzieli, to nauczyciel musi nauczać, aby rozumieli – musi wyjaśniać, a na lekcjach nie ma czasu na zajmowanie się problemami matematycznymi,
- nabycie przez uczniów umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych wiąże się z koniecznością „przerobienia" dużej liczby zadań typowych, wyćwiczenia przy rozwiązywaniu zadań określonego zestawu schematów, algorytmów,
- przed rozwiązaniem zadania tekstowego dzieci muszą poznać metodę jego rozwiązania, uczniowie muszą wiedzieć, w jaki sposób rozwiązywać zadania różnych typów.

---

[1] Polskie dziesięciolatki – nieźle czytają, słabo liczą, lubią szkołę (http://www.operon.pl/aktualności/).

[2] KNP PAN o projekcie nowelizacji ustawy oświatowej (http://www.pan.uz.zgora.pl/).

O tym, że taka właśnie tradycja matematyczna istnieje, świadczą wypowiedzi nauczycieli i rodziców: *zadania i polecenia na teście (OBUT) miały niewiele wspólnego z zadaniami proponowanymi dzieciom w ich podręcznikach, test nie miał nic wspólnego z tym, czego dzieci uczyły się na lekcjach, badajmy umiejętności naszych uczniów w sposób podobny do tego, w który uczą się na zajęciach w szkole, 10-latek nie musi umieć kombinować jak 18-latek, jeśli pokażemy uczniowi, jak rozwiązać określony typ zadań, to on to zapamięta, całą lekcję wyjaśniałam moim uczniom zadania, mam nadzieję, że czegoś się nauczyli. I jeszcze jedna wypowiedź, tym razem ucznia: pani na ćwiczeniach do testu dawała nam o wiele łatwiejsze* (typowe? – przyp. I.L.) *zadania.*

Tradycja – ważna rzecz, ale czy zawsze? Może czas, by te przekazywane z pokolenia na pokolenie zwyczaje, sposoby myślenia i zachowania w procesie nauczania – uczenia się matematyki zmienić? Może nasi uczniowie potrafią samodzielnie odkrywać i prezentować własne metody rozwiązywania zadań, potrafią uczyć się od siebie, badać, ustalać, doświadczać, poznawać? Oczywiście przy umiejętnej pomocy nauczyciela.

Pierwszaki i OBUT

Co uczniów klas pierwszych może łączyć z badaniem OBUT? Według polskiej tradycji matematycznej nic, bo przecież pierwszaki dopiero uczą się słuchać, powtarzać, czytać, pisać, liczyć. Nie potrafią dostrzegać zależności, tworzyć reguł, nie znają różnych typów zadań i metod ich rozwiązywania, *nie potrafią jeszcze kombinować* tak, jak ich starsi koledzy. A może jednak potrafią i wystarczy im na to pozwolić? Może warto znaleźć na zajęciach czas, aby mogły zaprezentować własne pomysły rozwiązywania zadań? Zobaczmy…

Miesiąc przed zakończeniem roku szkolnego, po napisaniu testu OBUT przez trzecioklasistów i po przetoczeniu się dyskusji nad trudnością zadań, zaproponowałam pierwszakom rozwiązanie kilku z nich. Uczniowie czytali zadania samodzielnie i samodzielnie je rozwiązywali, a następnie swoje rozwiązania prezentowali kolegom w klasie. Uczniom, którzy nie radzą sobie z samodzielnym czytaniem, treść zadań czytałam indywidualnie.

***Zadanie 1.* Stolarz zamontował w szafie pięć pionowych przegród. Na ile części stolarz podzielił wnętrze szafy?**
Wielu uczniów zadanie rozwiązało poprawnie. Byli to przede wszystkim ci, którzy wykonali do zadania rysunek. Swój sposób rozwiązania zaprezentowała na tablicy Kasia, rozwiązanie skomentowała tak: *Jeśli narysujemy sobie szafę, a potem 5 przegród, to od razu widać, ile mamy części*. Po tym komentarzu napisała w poszczególnych częściach „jedynki". Jest ich sześć. – dodała.

Wszyscy uczniowie, którzy narysowali sobie szafę i przegrody (było ich 17 w 21-osobowej klasie), a potem policzyli części między przegrodami, nie mieli kłopotu z odpowiedzią na postawione w zadaniu pytanie. Oczywiście zdarzały się też błędne odpowiedzi albo komentarze *ja tego nie rozumiem*, ale po wyjaśnieniach Kasi (nie moich!) ze zrozumieniem zadania, jak się okazało, nikt nie miał problemu. Jak to sprawdziłam? Poprosiłam uczniów o rozwiązanie podobnych, choć nie identycznych, zadań.

– *Stolarz miał długą deskę. Przeciął ją 7 razy. Ile części otrzymał?*
– *Osiem* – odpowiedziała po krótkim namyśle Monika, a Kuba dodał *Jak przetnie siedem razy, to już ma siedem części, a tej ostatniej nie trzeba przecinać, bo ona już jest.*

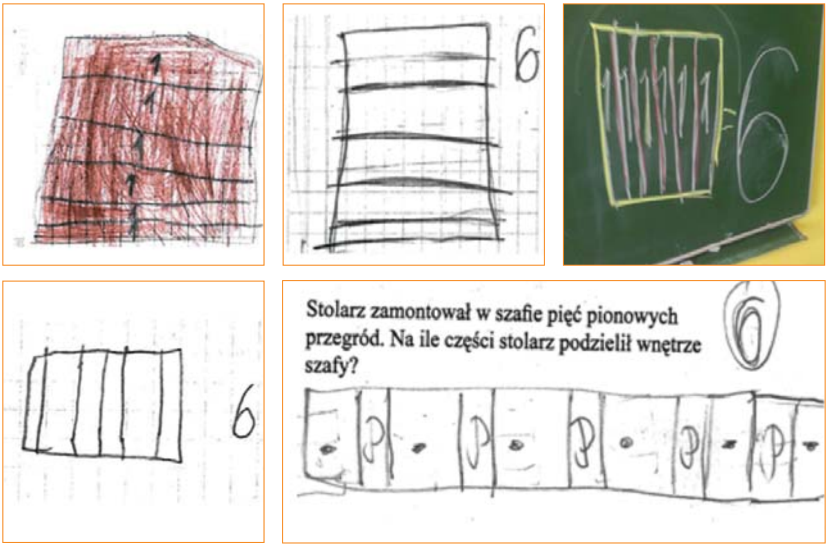
I jeszcze jedno zadanie:

– *Kwiaciarka wykonując bukiety, metrową wstążkę przecięła na 4 krótsze kawałki. Ile razy przecinała wstążkę?*
– *Trzy razy* – tym razem prawie chórem odpowiedzieli wszyscy.

A to rozwiązania zadania o szafie zapisane (narysowane!) przez innych uczniów.

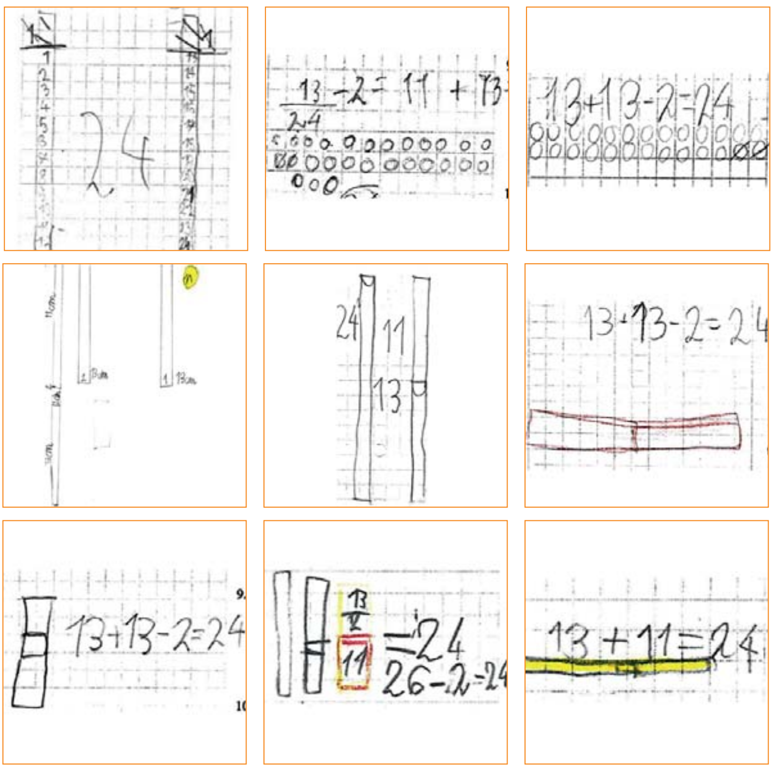
Amadeusz kolejnymi jedynkami oznaczył przegrody, pionowymi kreskami natomiast części szafy. Jest ich oczywiście 6.

Jak widać na prezentowanych rysunkach (także na rysunkach innych dzieci) przegrody w szafie mogą być pionowe, ale też poziome, mogą być oznaczone lub puste. Za każdym razem jednak jest ich odpowiednia liczba. Podobne rozwiązania zadania o szafie zaproponowały też inne dzieci. Zachęcone sukcesem pierwszaki (bo **nic tak nie motywuje, jak sukces i wiara we własne możliwości – zasada 1.**) rozwiązywały kolejne zadania.

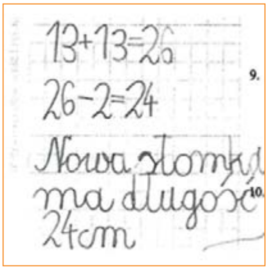


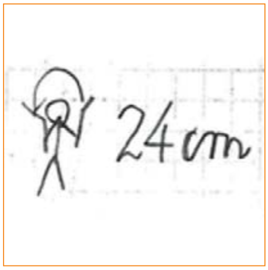
Zadanie 2. ***Marcin ma dwie słomki. Każda z nich ma długość 13 cm. Marcin wsunął jedną słomkę w drugą na głębokość 2 cm, tworząc z nich nową długą słomkę. Ile centymetrów ma ta nowa słomka?***

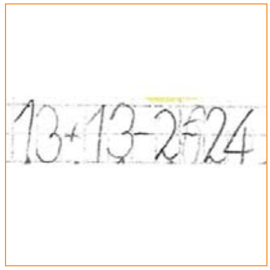
Dla wielu uczniów ponownie bardzo ważny okazał się rysunek. Kasia, na rysunku, z każdej słomki „odcięła" 1cm, obie słomki mają po 12 cm, a Ewelinka i Martynka Ch. po dodaniu dwóch słomek zabrały 2 cm.



Nową długą słomkę widać na rysunkach dzieci. W wielu rozwiązaniach pojawia się zapis symboliczny, który oczywiście może być, ale wcale nie musi. Dwie uczennice długość słomek odmierzały za pomocą linijki.







Były dzieci, które zrezygnowały z „rozrysowania” zadania i poprawnie zapisały jego rozwiązanie za pomocą działań, a inni zapisali po prostu prawidłowy wynik.

Jeden z chłopców prezentując swoje rozwiązanie, uznał, że *skoro Marcin wsunął jedną słomkę w drugą, to dwóch cm już nie widać i od długości obu słomek trzeba odjąć te 2*. Byłam zachwycona wyjaśnieniami uczniów. Zadanie rozwiązało 14 uczniów (z 21-osobowej grupy). Powinnam być zaskoczona?

– *Jakie piękne i mądre są wasze rysunki i działania. Wszystkie rozwiązania są rewelacyjne* – stwierdziłam poważnie (bo rzeczywiście takie były, a dodatkowo **nic tak nie motywuje uczniów jak pochwała udzielona przez nauczyciela – zasada 2.**).

Kolejne zadanie mogło stanowić dla pierwszaków pewną trudność, pojawiła się w nim bowiem *połowa kilograma*, a podstawa programowa dopiero w klasie trzeciej przewiduje, że uczeń *waży przedmioty, używając określeń: kilogram, pół kilograma* […].Na szczęście jednak w treściach dla klasy pierwszej czytamy, że uczeń:

– *w sytuacjach trudnych i wymagających wysiłku intelektualnego zachowuje się rozumnie, dąży do wykonania zadania,*
– *radzi sobie w sytuacjach życiowych, których pomyślne zakończenie wymaga dodawania lub odejmowania*

Sprawdźmy więc, czy uczeń klasy pierwszej rozwiązując zadanie dotyczące ciężaru, potrafił zachować się rozumnie i poradził sobie w sytuacji życiowej.

***Zadanie 3.* Do stołówki zakupiono pięć i pół kilograma herbaty pakowanej w paczki po pół kilograma. Ile paczek herbaty zakupiono do stołówki?**

Jeden kilogram to dwie paczki herbaty, dwa kilogramy to cztery paczki, trzy to sześć paczek, cztery to osiem paczek, a pięć to dziesięć paczek i jeszcze jedna paczka. Razem jest 11 paczek – powiedział uczeń, prezentując swój sposób rozwiązania zadania.

Analizując rozwiązania innych uczniów, można dostrzec, iż pojęcie *pół kilograma* nie jest im obce i wiedzą, że dwie połowy to jeden kilogram, nawet jeżeli nie zapiszą tego poprawnie za pomocą symboli matematycznych. Pierwszaki zachowują się niezwykle rozumnie i stawianie ich *w sytuacjach trudnych, wymagających intelektualnego wysiłku* jest jak najbardziej uzasadnione (bo **nic tak nie motywuje uczniów, jak wiara nauczyciela w ich wiedzę i możliwości – zasada 3.**).

Powyżej inne rozwiązania.

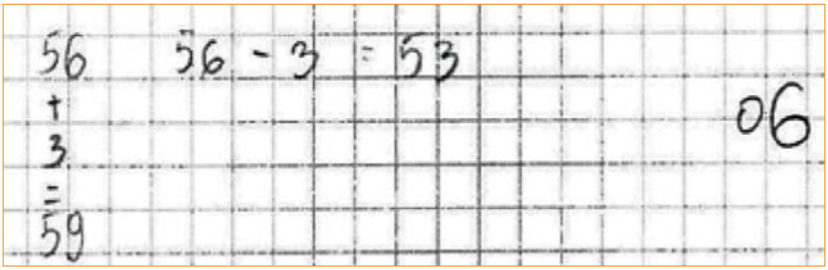
Uczniowskie strategie – czyli jak kombinują pierwszaki…

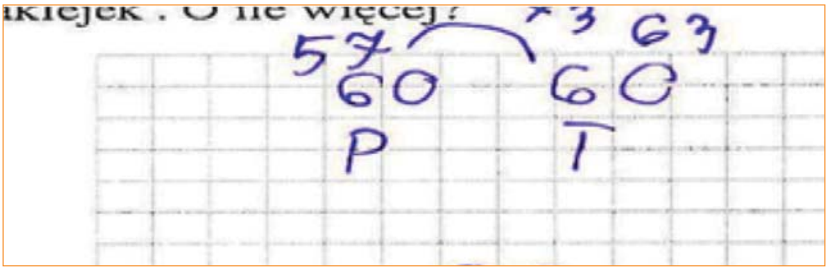
Jak kombinują? Przede wszystkim „po swojemu", jeśli im tylko na to pozwolimy. I nawet, jeśli wymyślona przez nich i zastosowana strategia (słowo nieobce pierwszakom) rozwiązania zadania będzie nieskuteczna, to przy innym zadaniu może okazać się niezwykle przydatna. Ważne, aby owa strategia była ich własna, a nie narzucona. Z mojego doświadczenia wynika, że podawanie uczniom gotowych metod, schematów postępowania z określonym zadaniem ogranicza ich inwencję oraz umiejętność samodzielnego pokonywania trudności. Na pytanie ucznia: *Czy tak to można rozwiązać, zapisać, obliczyć? odpowiadajmy –To Twój sposób, Twoja metoda, więc ją zastosuj i przekonaj się, czy tak można, a potem nam o tym opowiesz.* Zresztą opowiadanie uczniów o własnych rozwiązaniach jest niezwykle interesujące. Często nauczyciel (tak jest i w moim przypadku) musi uważnie słuchać, by nadążyć za oryginalnością i niezwykłością uczniowskich strategii. Pierwszaki, które uczę, prześcigają się w prezentowaniu własnych metod. Przyjęliśmy zasadę, że ten kto pierwszy poprawnie rozwiąże zadanie, ten pierwszy o nim opowiada. Oczywiście kolejnych rozwiązań także uważnie słuchamy (bo **nic tak nie motywuje uczniów, jak możliwość zaprezentowania własnej metody rozwiązania zadania – zasada 4.**).

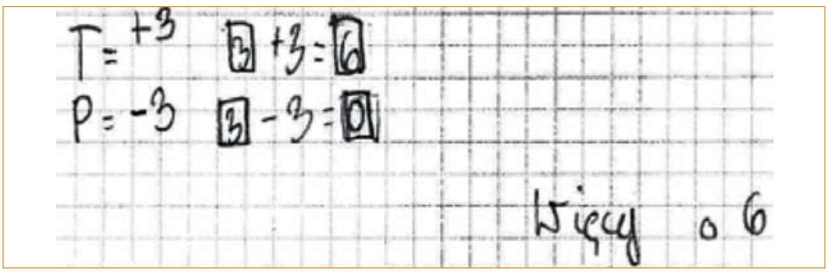
Wracając jednak do kombinowania. Postanowiłam sprawdzić, jak rozwiązują te same zadania pierwszaki i uczniowie klasy trzeciej (również mojej, którą uczyłam jeszcze rok temu). Poprosiłam pierwszoklasistów o rozwiązanie zadania, które rok wcześniej rozwiązywali ich starsi koledzy. Dodam, że zadanie podobnego typu znalazło się w *Badaniu umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich*[3] (2008) oraz w badaniu OBUT 2012. Poniżej przykłady kombinowania pierwszaków i trzecioklasistów.

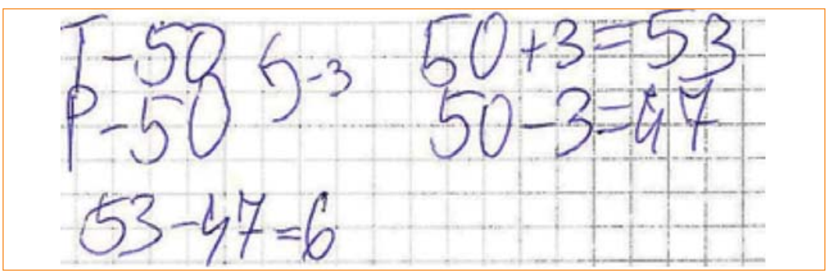
Zadanie 4. ***Tomek i Piotr mieli po tyle samo naklejek. Piotr oddał Tomkowi trzy swoje naklejki. Teraz Tomek ma więcej naklejek. O ile więcej?***

Rozwiązania uczniów klas trzecich







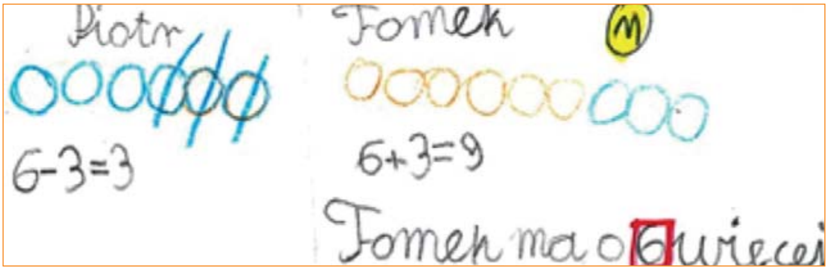


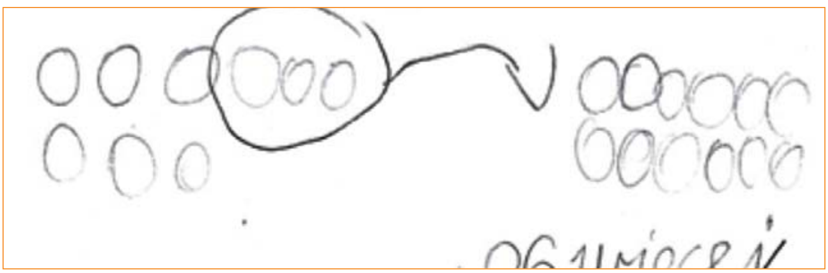
3 M. Dąbrowski, Rozwiązywanie zadań tekstowych, w: M. Dąbrowski (red.), Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich. Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008, CKE, Warszawa 2009, s. 124.

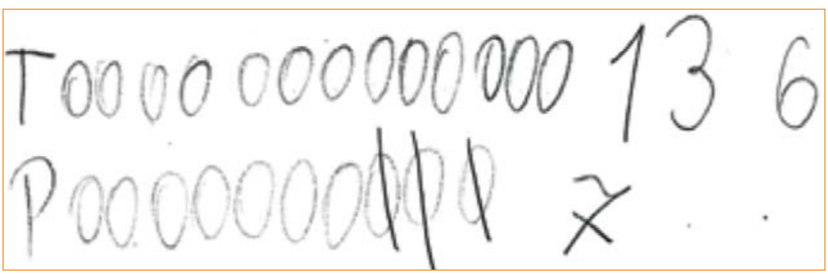
Jak widać, uczniowie klasy trzeciej rozwiązując zadanie o naklejkach, założyli, że Tomek i Piotr mają pewną liczbę wspomnianych naklejek i od tej liczby odejmowali 3 i dodawali do niej 3. Stosowali zazwyczaj zapis symboliczny – wykonywali określone działanie. Inni od razu udzielili odpowiedzi, wpisując „6".

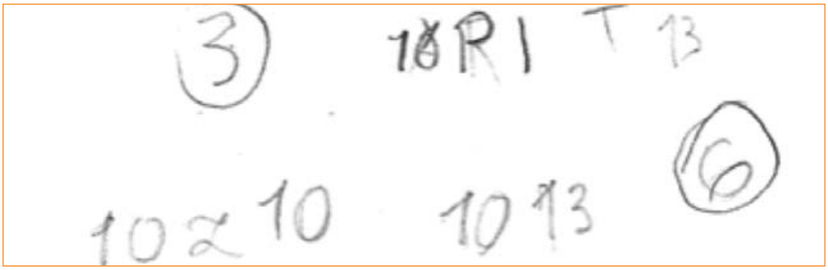
A jak rozwiązali je uczniowie klasy pierwszej? Podobnie. Także założyli, że chłopcy mają pewną liczbę naklejek, a potem je dodawali i odejmowali. Działania te wykonywali zwykle na rysunku, chociaż w rozwiązaniach pojawiały się również symbole. Kilkoro pierwszoklasistów wpisało od razu wynik „6". Poniżej prezentuję rozwiązania narysowane i zapisane przez 16 (!) uczniów klasy pierwszej (mimo że niektórym może się to wydać zbyteczne). Przedstawienie aż tylu rozwiązań jest zabiegiem celowym, gdyż pokazuje, że zadanie przeznaczone dla uczniów klasy trzeciej, bez trudu rozwiązują pierwszaki i to nie te „wybrane", ale prawie wszyscy uczniowie z klasy.

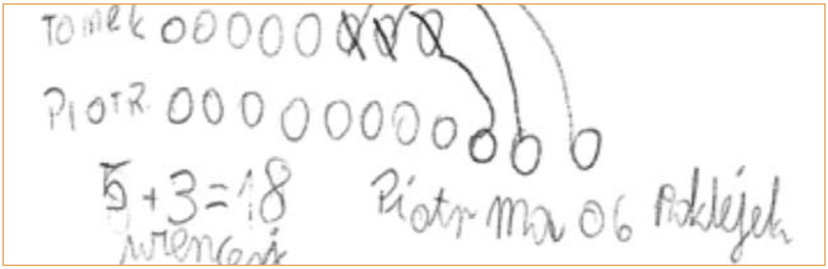
Fot. 36–52

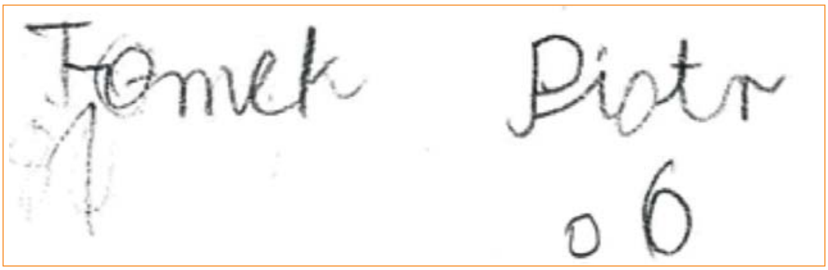


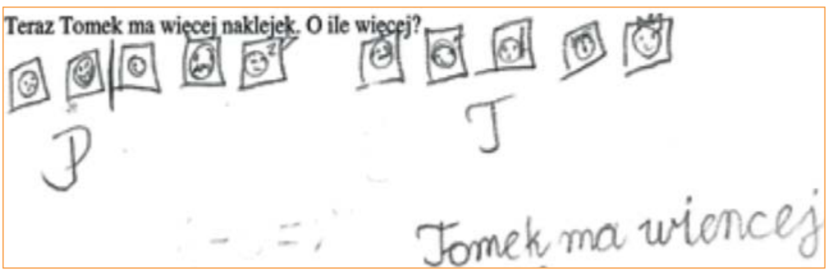


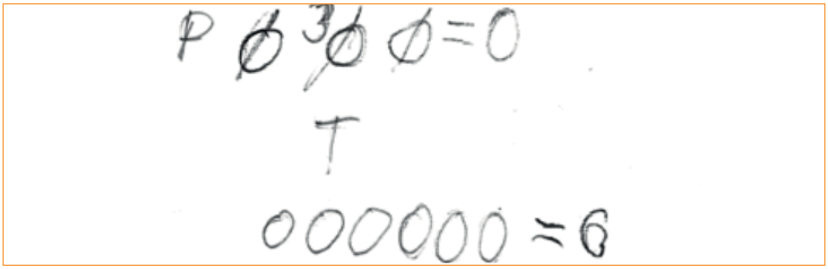


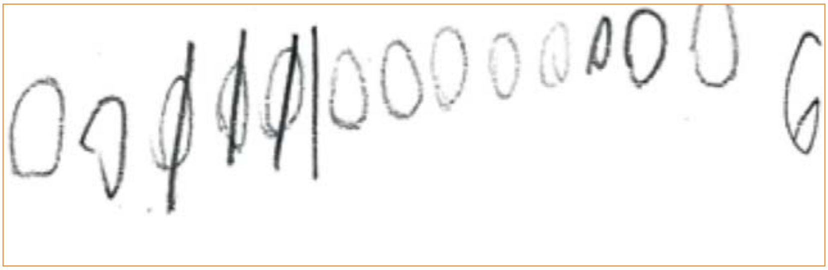


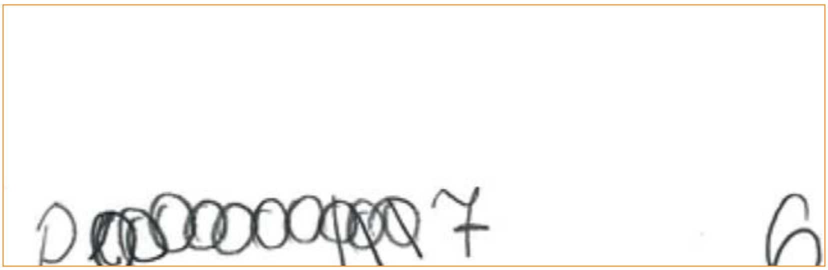

TOMEK
PIOTR
Piotr ma o6 naklejek

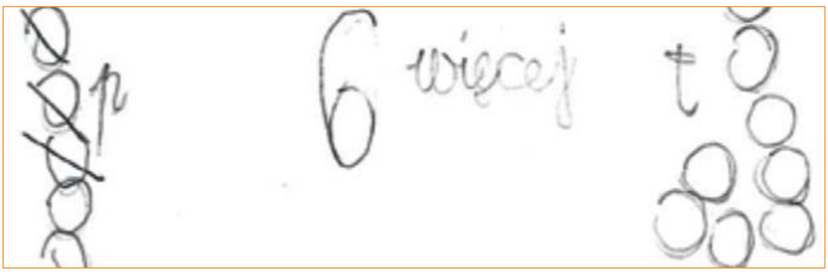

Tomek
Piotr
o 6

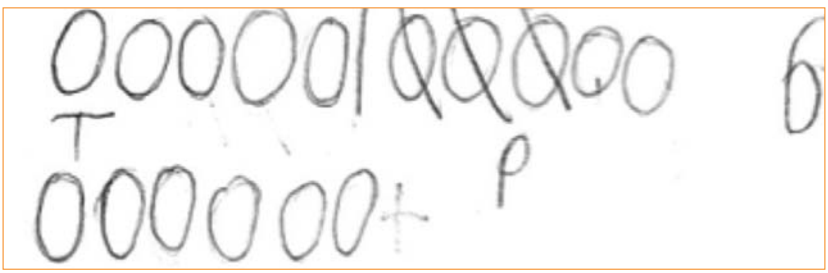

Teraz Tomek ma więcej naklejek. O ile więcej?
P
T
Tomek ma wiencej

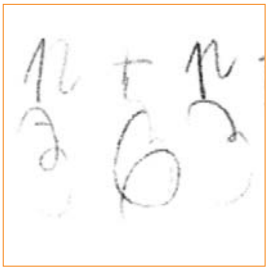

P
T
=6




7
6


p
6 więcej
t


6
T
P

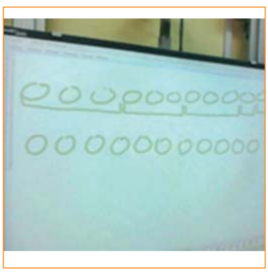
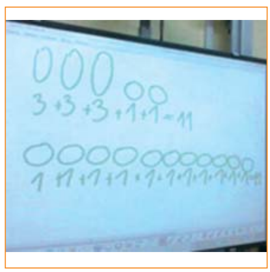
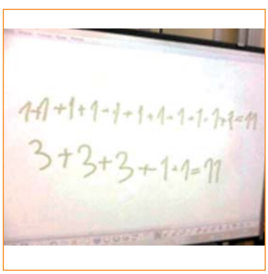
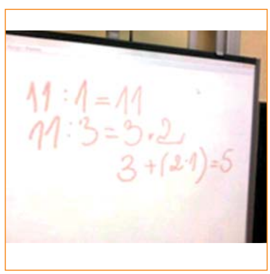


Typową strategią zastosowaną przez uczniów mojej pierwszej klasy było rysowanie zadania. Rysowanie uznawane jest za *jedną z najpotężniejszych strategii służących rozwiązywaniu zadań na każdym szczeblu edukacji, nie tylko w klasach I–III. Niekiedy zrobienie rysunku niespodziewanie przynosi rozwiązanie*[4]. Wybór metody, sposób wykonania rysunku oczywiście należał do uczniów. Każdy z nich podjął próbę rozwiązania zadania wybranym przez siebie sposobem (bo **nic tak nie motywuje uczniów, jak możliwość samodzielnego wyboru metody rozwiązania zadania – zasada 5.**).

A teraz zadanie z badań TIMSS (badania 10-latków!)[5]. Określane jest ono w nich jako *zadanie nietypowe, problemowe, które ma więcej niż jedno rozwiązanie i wymaga rozważenia każdego z nich.*

***Zadanie 5.* Marek kupuje figurki rycerzy. Za dużą figurkę płaci 3 zł, a za małą figurkę 1 zł. Marek wydał 11 zł. Ile najmniej figurek mógł kupić? Ile najwięcej figurek mógł kupić?**

Autorami poniższych rozwiązań są trzecioklasiści, którym często podczas rozwiązywania zadań mówiłam: *Jak ja was nauczyłam pięknie rysować.*

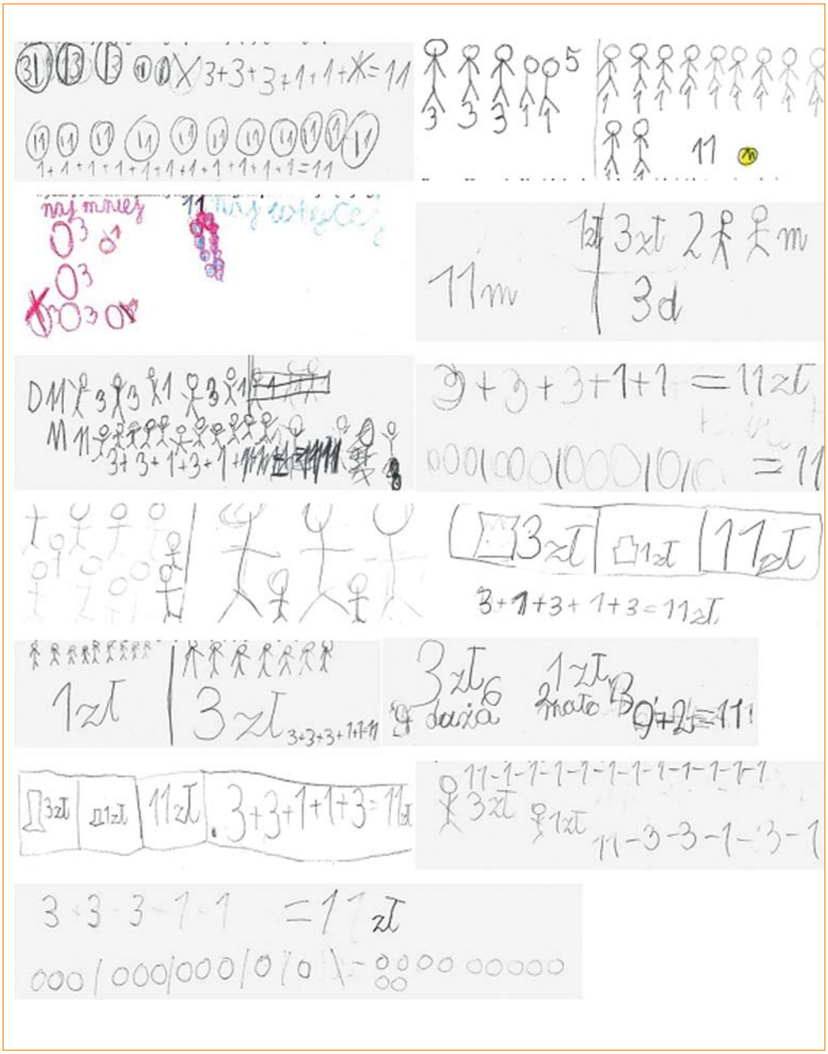





---

[4] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 97.

[5] K. Konarzewski, TIMSS i PIRLS 2011. Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej, CKE, Warszawa 2012, s. 19.

Poniżej rozwiązania uczniów klas pierwszych (znowu kilkunastu!).



Każde z zaprezentowanych rozwiązań jest doskonałe, bo autorskie (uczniowskie), chociaż nie wszystkie są kompletne, a w kilku znajdziemy drobne pomyłki. Na uwagę zasługuje strategia rysowanie zadania, oraz strategia nazwana przez M. Dąbrowskiego *próbuj, poprawiaj i wyciągaj wnioski*[6].

Powodzenie w takich zadaniach dobrze świadczy nie tylko o uczniu, ale też o jego nauczycielu, najwyraźniej bowiem potrafił się on od czasu do czasu oderwać od algorytmów i zająć z uczniami rozwiązywaniem problemów podczas rozwiązywania zadań[7]. – tak napisał autor raportu „TIMSS i PIRLS 2011" prof. Krzysztof Konarzewski. Święte słowa, tylko dlaczego „od czasu do czasu"? (bo przecież **nic tak nie motywuje uczniów, jak stawianie ich w nowych sytuacjach, w których mogą odkrywać, badać, doświadczać – zasada 6.**).

I jeszcze jedno zadanie, tym razem z badania OBUT 2012.

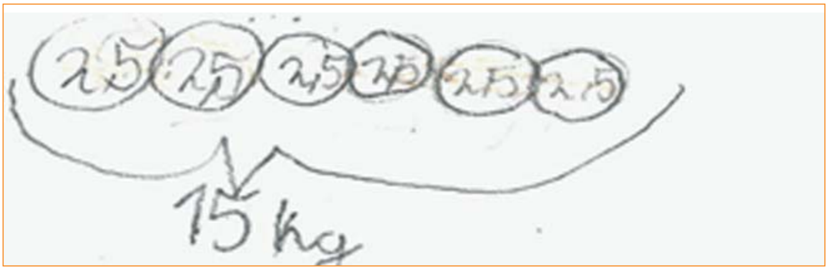
Zadanie 6. ***Cztery takie same duże krasnale ważą łącznie 10 kg. Ile by ważyło łącznie 6 takich krasnali?***

Kto jest autorem zaprezentowanego niżej rozwiązania – uczeń klasy pierwszej czy trzeciej?

---

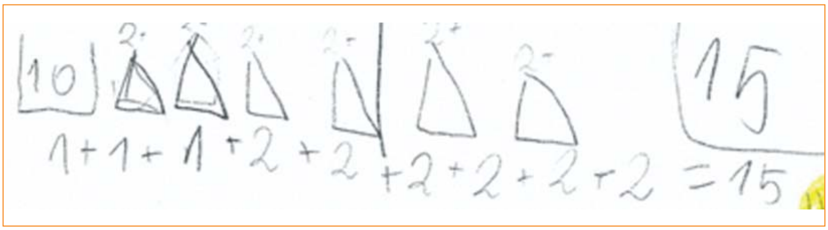
[6] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 94.

[7] K. Konarzewski, TIMSS i PIRLS 2011. Osiągnięcia szkolne polskich trzecioklasistów w perspektywie międzynarodowej, CKE, Warszawa 2012, s. 19.



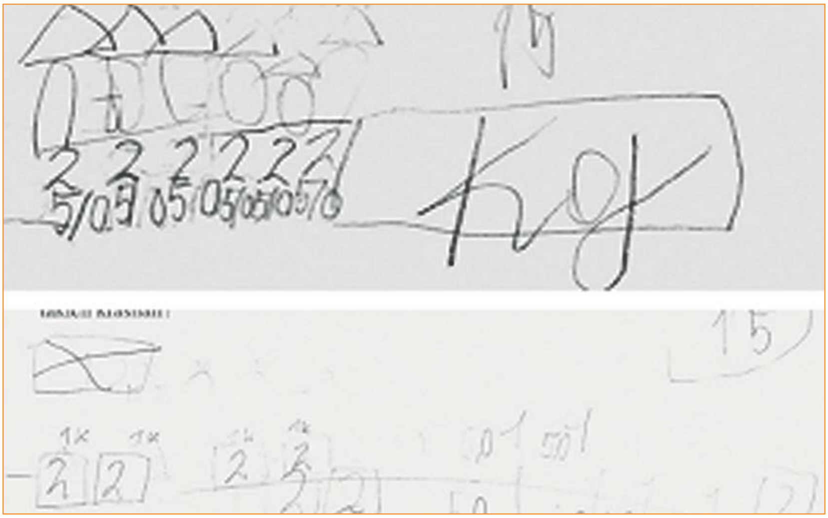
To rozwiązanie chłopca, który rozpoczął naukę w szkole 9 miesięcy wcześniej (!). Czy jego rozwiązanie jest zgodne z założeniami programu realizowanego w klasie pierwszej? Oczywiście nie. W klasie pierwszej nie uczymy przecież ułamków dziesiętnych, jednak pojawiły się one na zajęciach, gdy odmierzaliśmy pół litra. Jeden z uczniów powiedział, że potrafi zapisać „połowę" i zapisał 0,5. Okazał się, że niektórzy uczniowie to zapamiętali i zastosowali w nowej dla siebie sytuacji. Do rozwiązania tego zadania nie trzeba jednak stosować ułamków dziesiętnych. Udowodniły to inne dzieci.

Jeden chłopiec narysował trójkąty. Każdy trójkąt to jeden krasnal i aby obliczyć, ile waży 6 takich krasnali, chłopiec zapisał „dwójki" oznaczające dwa kilogramy, a „połówki" zastąpił plusami (więc dwa plusy to jeden kilogram). Inny dodał jedynki i dwójki i obliczył, że sześć krasnali waży łącznie 15 kilogramów.

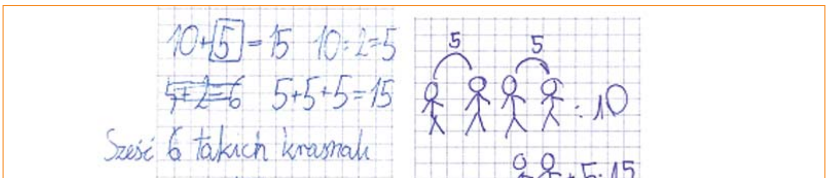


Poniżej kolejne pomysły rysunkowych rozwiązań: kółeczka i kreseczki.

Inne sposoby:



I jeszcze rozwiązania trzecioklasistów, którzy także wykazali się sprytem, a raczej matematyczną zaradnością. Zresztą nie tylko oni, zadanie o krasnalach rozwiązali poprawnie prawie wszyscy uczniowie w klasie (w maju 2012).



Szczerze mówiąc, na początku listopada ubiegłego roku, gdy powstawał bydgoski Bąbel, nie w pełni wierzyłam w to, że uczniowie klasy pierwszej staną się bohaterami mojego opracowania. Miałam przecież napisać o rozwiązywaniu zadań tekstowych o nietypowej strukturze. Zadania nietypowe w klasie pierwszej? To chyba za wcześnie – pomyślałam i zgromadziłam, z zamiarem upublicznienia, rozwiązania zadań trzecioklasistów (zapewne jeszcze je wykorzystam, bo na to zasługują). Złamałam wtedy kilka zasad, które dotychczas spisałam, a szczególnie zasadę trzecią „nic tak nie motywuje uczniów, jak wiara nauczyciela w ich wiedzę i możliwości”. Dzisiaj wiem, że nie tylko dla trzecioklasistów, ale także dla pierwszaków nie ma trudnych zadań, a każde zadanie uważane za nietypowe, dla uczniów rozpoczynających naukę w szkole jest najzwyklejszym, najbardziej typowym zadaniem tekstowym. Wystarczy pozwolić dzieciom myśleć…

Nie ma trudnych zadań

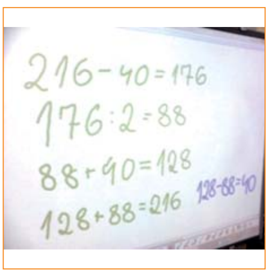
W 2009 roku, gdy CKE prowadziło badania matematycznych umiejętności uczniów klas trzecich w województwie kujawsko-pomorskim, stwierdziłam, że test układał ktoś, kto nigdy nie pracował w szkole, że zaproponowane uczniom zadania nie mają nic wspólnego z podstawą programową i są przeznaczone wyłącznie dla uczniów zdolnych. Podczas konferencji podsumowującej badania udało mi się porozmawiać z autorem zadań. Nieistotny jest tutaj przebieg i szczegóły rozmowy, jednak przywołuję ją, gdyż dwa zdania, które wówczas padły, uważam od pewnego, dłuższego już czasu, za niezwykle istotne. *A właściwie dlaczego wszyscy uczniowie nie mieliby w czasie lekcji rozwiązywać trudnego (pani zdaniem) zadania? Nawet jeżeli na początku zadanie rozwiąże jeden uczeń, to może potem spróbują także inni?* – usłyszałam. No właśnie, dlaczego?

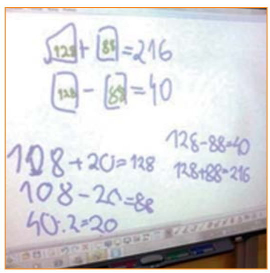
Kilka tygodni później odważyłam się zaproponować „trudne zadanie” uczniom klasy pierwszej. Nie pamiętam już jego treści, ale pamiętam uczennicę, która je rozwiązała. Potem zdarzyło się to jeszcze kilkanaście razy, ale dopiero w klasie drugiej zorientowałam się, że owe „trudne zadania” potrafi rozwiązać wielu uczniów. W klasie trzeciej byłam już pewna, że nie ma trudnych zadań, są tylko zadania nietypowe, których w kartach pracy (niezależnie od wydawnictwa) zwyczajnie nie ma albo jest ich niewiele. Rozpoznać je można po charakterystycznych oznaczeniach – narysowanej gwiazdce, sowie, wężu, kangurze, czy kaktusie… Dlatego bardzo często karty pracy odkładaliśmy na bok i rozwiązywaliśmy zadania „wynalezione” przeze mnie lub przez moich uczniów (!) (bo **nic tak nie motywuje uczniów, jak dzielenie się pomysłami – zasada 7.**). Swoją drogą, kto i dlaczego wyprał z kart zadań zadania nietypowe? Przecież w podręcznikach sprzed dwudziestu lat takie zadania były, i z tego co pamiętam, uczniowie je rozwiązywali. Czyżby dzisiaj nie potrafili sobie z nimi poradzić?

Poniżej kilka dowodów na to, że również dzisiejszym uczniom rozwiązywanie zadań nietypowych nie sprawia kłopotu. Oto zadania rozwiązane przez trzecioklasistów. Załączam ich sporo, bo jak stwierdziłam wcześniej, każdy z poniższych pomysłów na to zasługuje.

***Zadanie 7.** Suma dwóch liczb wynosi 216, a ich różnica 40. Jakie to liczby?*

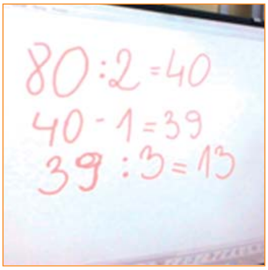
Uczniowskie rozwiązania

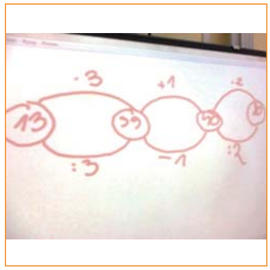




***Zadanie 8.** Jola zapytana o to, ile osób było z nią na obozie rowerowym, odpowiedziała zagadką: „Gdyby było nas trzy razy więcej i jeszcze jedna osoba, to nasze rowery miałyby łącznie 80 kół. Aha, i nikt nie jeździł na tandemie”. Ile osób było na tym obozie?*

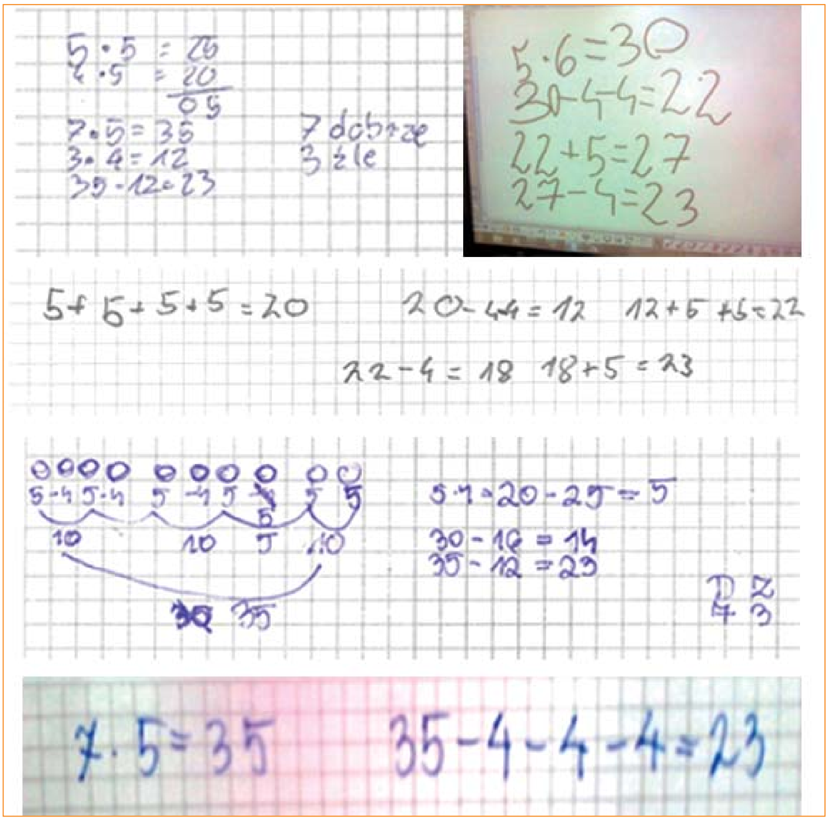
Oto rozwiązania:



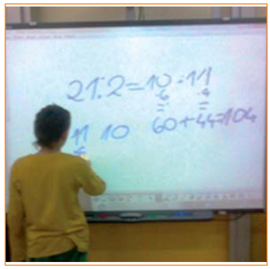


Zadanie 9. ***W czasie konkursu uczestnik odpowiada na 10 pytań. Za dobrą odpowiedź otrzymuje 5 punktów, a za złą traci 4 punkty. Na ile pytań uczestnik konkursu odpowiedział dobrze, a na ile źle, jeśli łącznie zdobył 23 punkty?***

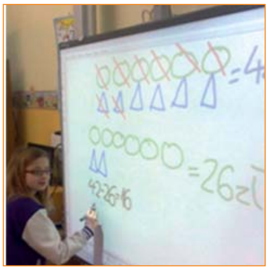
Rozwiązania uczniów.

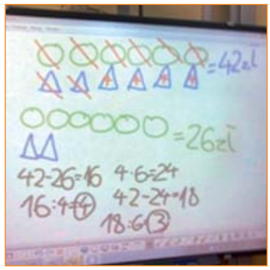


Zadanie 10. ***Jaś karmił w sklepie zoologicznym psy i koty. Każdy pies dostał 6 kawałków mięsa, a każdy kot 4 kawałki. Ile było psów, a ile kotów, jeśli łącznie było ich 21, a Jaś dał im 108 kawałków mięsa?***



Zadanie 11. ***Za sześć filiżanek i 6 talerzyków mama zapłaciła 42 zł. Następnego dnia mama dokupiła jeszcze 2 filiżanki i 6 talerzyków tego samego zestawu. Tym razem zapłaciła 26 zł. Ile kosztowała filiżanka, a ile talerzyk?***





Zwróćmy uwagę na to, że podczas rozwiązywania zadań, trzecioklasiści stosowali już zazwyczaj zapis symboliczny, chociaż jeżeli miało to im pomóc, z rozmysłem wspierali się rysunkiem lub stosowali strategię „próbuj i poprawiaj". Należy uznać, że uczniowie klasy trzeciej dostrzegają już przydatność języka symbolicznego i potrafią *matematyzować*[8] rozwiązanie zadania. A jakie strategie w „trudnych zadaniach" stosowały pierwszaki? Takie oto zadania rozwiązywaliśmy w I semestrze…

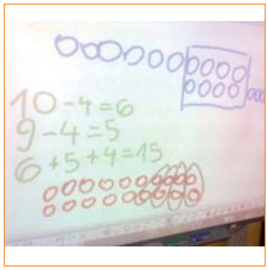
Zadanie 12. ***Na parkingu stały rowery i samochody. Razem było 6 pojazdów. Wszystkie miały łącznie 16 kół. Ile samochodów i ile rowerów stało na parkingu?***

Zaprezentowane na fotografiach rozwiązania są prawidłowe, choć każdy zastosował inny pomysł. Zadanie swoimi sposobami rozwiązali poprawnie także inni uczniowie, każdy podjął próbę rozwiązania (bo *nic tak nie motywuje uczniów, jak zachęcanie ich przez nauczyciela do próbowania i świadomość tego, że mają prawo popełniać błędy – zasada 8.*).

Zadanie 13. ***Wszystkie dziewczynki w klasie trzymają w rękach piłki. Pięć dziewczynek ma piłki czerwone, 3 dziewczynki piłki niebieskie, a 2 dziewczynki mają zarówno piłki czerwone, jak i niebieskie. Ile jest dziewczynek?***

Niżej rozwiązanie zaproponowane przez pierwszoklasistę (po prawej). Obok (po lewej) rozwiązanie podobnego zadania zaproponowanego trzecioklasistom, które dotyczyło 10 chłopców z piłkami do nogi, dziewięciu z piłkami do kosza i czterech chłopców, którzy mieli obie piłki. Jak widać w obu przypadkach zadanie nie było zbyt trudne, a uczniowie uznali, że warto wykonać rysunek albo rozłożyć piłki. Obaj uczniowie przyjęli, że oprócz rysunku można też zapisać działanie.

[8] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 71.



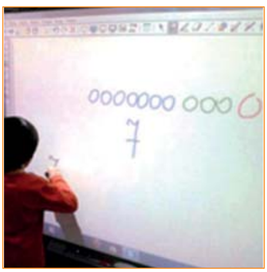
Zadanie 14. ***Do trzech koszy włożono 9 grzybów, tak by w każdym kolejnym koszu było o 2 grzyby więcej niż w poprzednim. Ile grzybów jest w każdym koszu?***

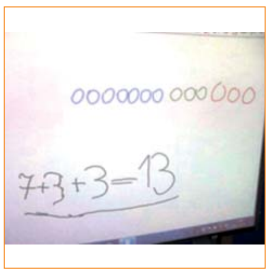
Część uczniów zastosowało metodę symulacji (jeszcze o niej nie pisałam). Chłopcy układali dostępne im elementy, przeliczali je i rozwiązywali zadanie. Metoda symulacji *pozwala dzieciom na samodzielne rozwiązanie zadania na poziomie reprezentacji enaktywnej – najprostszej z punktu widzenia komunikowania się dziecka z otaczającym światem*[9]. Sprawdziłam, metoda ta doskonale sprawdza się z pierwszakami (ale nie tylko), gdy na początku roku szkolnego proponujemy im zabawę w rozwiązywanie zadań.

Zadanie 15. ***Brat i siostra mają razem 7 lat. Ile będą mieli razem lat za trzy lata?***

Uczeń przedstawiony na fotografii poniżej najpierw narysował zadanie, a następnie rozwiązanie przedstawił za pomocą działania. Przyznać trzeba, że rysunek jest niezwykle czytelny.

I jeszcze dwa zadania z pierwszych miesięcy roku szkolnego w klasie pierwszej.





Zadanie 16. ***Doktor Ojboli zapisał choremu Marudzie 3 pigułki i zalecił, aby zażywał je po jednej, co 4 minuty. Po ilu minutach od zażycia pierwszej pigułki Maruda zażyje ostatnią?***

Zadanie 17. ***Papa Smerf znalazł książkę, w której brakowało pewnej liczby kartek. Kiedy ją otworzył, z lewej strony zobaczył numer 4, a z prawej numer 9. Ile kartek brakowało pomiędzy tymi stronami?***

[9] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 89

Rozwiązanie Weroniki

Rozwiązanie Amadeusza

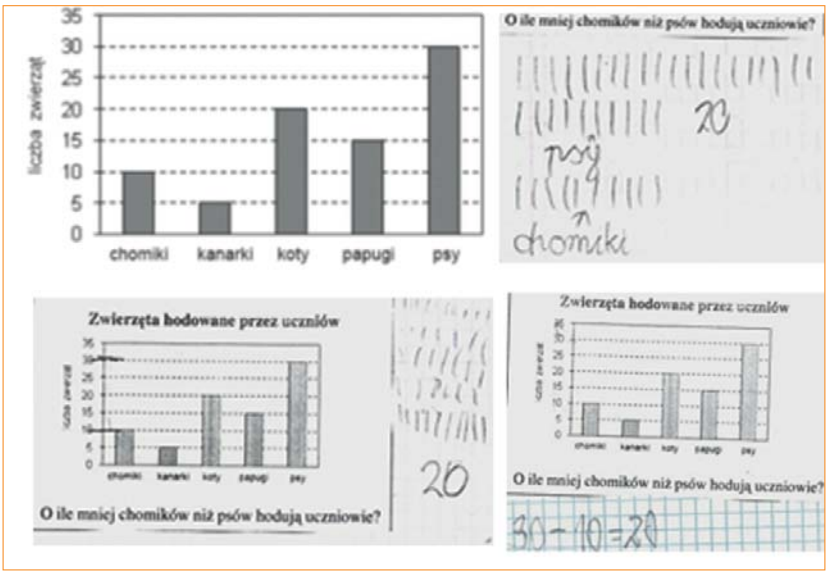
Jak bardzo zadania rozwiązywane przez moich uczniów różnią się od tych, które znaleźć można we wszystkich dostępnych w księgarniach, kartach pracy! Widać autorzy podręczników nie wierzą w możliwości dzieci albo (!) w możliwości nauczycieli.

A co robiliśmy w II semestrze? Oprócz zaprezentowanych już zadań z badań OBUT, TIMSS, pierwszaki rozwiązywały wiele innych „trudnych" zadań. Z rozmysłem (i doskonałym skutkiem) stosowałam wszystkie zapisane wcześniej zasady. Zgodnie z nimi wśród rozwiązywanych zadań znalazły się zadania ze sprawdzianu szóstoklasistów i egzaminu gimnazjalnego (!). Jednym z nich było zadanie 18. zaczerpnięte ze sprawdzianu szóstoklasisty z 2009 roku.

***Zadanie 18.* Spójrz na zwierzęta hodowane przez uczniów i napisz, o ile mniej chomików niż psów hodują uczniowie.**

Uczniowie, którzy rozwiązali dobrze to zadanie (ponad połowa klasy), zazwyczaj wpisywali od razu poprawny wynik – 20. Nieliczni wspomagali się dodatkowym rysunkiem, kreskami lub zapisem działania.

Zadanie 19. znaleźć można w arkuszu sprawdzianu szóstoklasisty z 2010 roku.



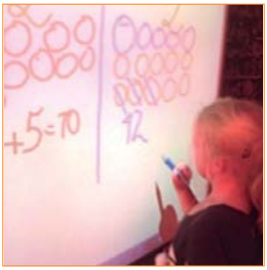
***Zadanie 19.* Podczas meczu koszykówki Paweł trafił do kosza 5 razy, Leszek miał 2 razy więcej trafień niż Paweł, a Zbyszek o 3 mniej niż Paweł i Leszek razem. Ile razy trafił do kosza Leszek, a ile Zbyszek?**

Nie wszyscy uczniowie od razu wiedzieli co znaczy *dwa razy więcej*, niektórzy dodawali „dwa"(bo doskonale potrafią stosować porównywanie różnicowe). Pojęcie dwa razy więcej wyjaśnił jednak Marcel – *to tyle i jeszcze raz tyle* i narysował 5 kółek, a potem jeszcze pięć. Sprawdziłam, czy wyjaśnienia Marcela były zrozumiałe:

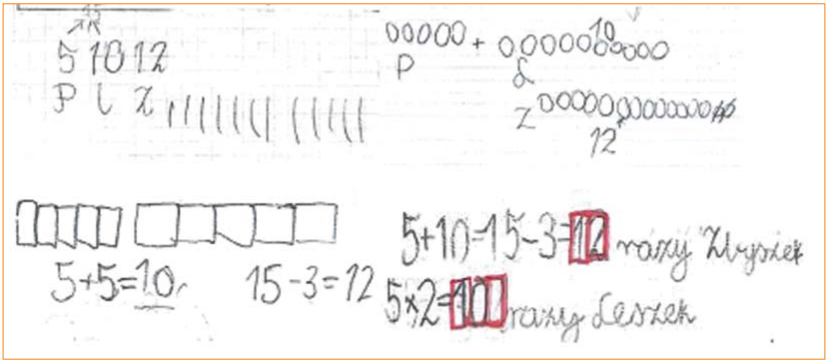
– *Mam 3 złote* – powiedziałam – *a Wiktor ma dwa razy więcej. Ile złotych ma Wiktor?*
– *Sześć* – usłyszałam odpowiedź.
– *Mam 6 jabłek, a Monika dwa razy więcej. Ile jabłek ma Monika?*

– *Dwanaście, bo sześć i sześć to dwanaście* – odpowiedział jeden z chłopców. Po kilku takich próbach pierwszaki samodzielnie rozwiązały zadanie 19.

Poniżej kilka przykładów rozwiązań:



Poniżej inne sposoby rozwiązania zadania



W niektórych rozwiązaniach uczniowskich widzimy, że *sposoby zapisu obliczeń są nieco sprzeczne z powszechnie przyjętą notacją matematyczną*[10]. Przyznać muszę, że sama, jeszcze kilka lat temu, oczekiwałam od uczniów, że oprócz poprawnego rozwiązania zadania, zapiszą też poprawne obliczenia. Teraz zastanawiam się dlaczego… Przecież rozwiązać zadanie, to znaczy podać poprawny wynik, a zapisane obliczenia powinny być tylko narzędziem do jego uzyskania, *takie jak linijka, miarka stolarska czy centymetr przy mierzeniu długości*[11].

Sprawdziłam – pierwszaki doskonale, każdy na swój sposób, potrafią z tego narzędzia korzystać i mimo że piszę o rozwiązywaniu zadań tekstowych, nie mogę powstrzymać się od opisania zaskakujących metod obliczeń wymyślonych przez dzieci. Podczas zajęć, gdy według stosowanej powszechnie metody próbowałam (oczywiście przy pomocy zadania tekstowego) analizować z dziećmi dodawanie z przekroczeniem progu, usłyszałam: *Ja tego nie rozumiem!* Jak się okazało, nie rozumieli „tego" także inni uczniowie. Nie mogłam ukryć zdziwienia, gdyż doskonale wiedziałam, że te dzieci wykonują obliczenia w zakresie 100 (i wyższym). No dobrze – powiedziałam – *W takim razie opowiedzcie mi, jak wy liczycie* i podałam działanie: 38 + 7. Jakie było moje zdumienie, gdy usłyszałam od uczniów kilka sposobów na obliczenie podanego przeze mnie działania:

Maks: *Jeżeli 40 + 7 równa się 47, to 38 + 7 równa się 45, bo od 47 muszę tylko odjąć 2.*

Amelka: *Ja* (w tym dodawaniu) *odkładam na bok 30 i dodaję 8 i 7, to jest 15, a potem dokładam to 30.*

Gracja: *Ja liczę na palcach, mam 38, a potem 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.*

Kuba: *Ja do 38 dodaję dwa, a potem resztę, która zostaje, czyli 5.*

Zdumiewające… Czy można podejrzewać pierwszaki o tyle różnych sposobów dodawania? Jak się okazuje – nie tylko można, ale i trzeba. Nauczyciel powinien więc zachęcać uczniów do wymyślania i prezentowania własnych sposobów liczenia (bo **„nic tak nie motywuje uczniów, jak możliwość tworzenia własnych, sprytnych obliczeń"[12] – zasada 9.**). Zasada ta okazała się skuteczna, gdyż po kilku dniach, tym razem Kasia, opowiedziała mi o swoim sposobie obliczenia: *Ile to jest 20 razy 50.*

Kasia: *Liczyłam tak – dziesięć pięćdziesiątek to 500 i jeszcze dziesięć pięćdziesiątek to drugie 500 i już mam 20* (pięćdziesiątek)*, a potem trzeba dodać te liczby* (dwie liczby 500) *i mamy tysiąc.*

---

[10] M. Dąbrowski, Arytmetyczny potok (http://www.trzecioklasista.edu.pl).

[11] M. Dąbrowski, Pozwólmy dzieciom myśleć, CKE, Warszawa 2008, s. 70.

[12] A. Kalinowska, Pozwólmy dzieciom działać, CKE, Warszawa 2010, s. 92.

Pojęcia nie mam, skąd Kasia wiedziała, że dziesięć pięćdziesiątek to 500, zapomniałam ją o to zapytać, ale przyznać trzeba, że z działaniem 20 razy 50 poradziła sobie doskonale. Nie ma to jak matematyczna zaradność…

Kolejne zadanie odnajdziemy w arkuszu egzaminu gimnazjalnego z 2009 roku.

Zadanie 20. ***Rodzice Jacka kupili 10 butelek wody mineralnej o pojemnościach 0,5 litra i 1,5 litra. W sumie zakupili 11 litrów wody. Ile kupili mniejszych butelek wody mineralnej, a ile większych?***

Zadanie przeznaczone dla gimnazjalistów wyjaśniała jedna z dziewczynek, ale nie tylko ona je rozwiązała. Wcześniejsze przelewanie wody do różnych naczyń przyniosło ten skutek, że pojęcie pół litra i półtora litra dla uczniów klasy pierwszej nie jest już zagadką, podobnie jak ułamki dziesiętne. Dowodem na to są poniższe rozwiązania uczniów.

Wspomniałam wyżej o przelewaniu wody. Zwykle nauczyciele się tego boją. U nas w klasie podczas przelewania był oczywiście mały potop, ale zabawa przy tym była świetna, a dzieci na koniec zajęć stwierdziły, że właśnie minął *dzień mokrej matematyki*. Nie wyobrażam sobie, jak można kształtować u dzieci pojęcie litra (także innych pojęć) na podstawie obrazka… Dzięki klasowemu potopowi dziś dzieci doskonale posługują się nie tylko pojęciem litra, ale także wiedzą, co to jest „połowa litra", „ćwierć litra", ile miarek o pojemności 200 ml (również 100 i 50 ml) mieści się w jednym litrze. Mieszczenie mniejszych miarek w litrze szczególnie spodobało się sześciolatkowi, którego jeszcze w I semestrze średnio interesowała matematyka. Podczas zabawy z wodą uczeń zaskakiwał mnie po pierwsze zaangażowaniem w rozwiązywanie matematycznych problemów, a po drugie – trafnością swoich rozwiązań. Chłopiec jako pierwszy opowiadał o tym, że do litrowej butelki należy wlać 5 miarek o pojemności 200 ml i 10 miarek o połowę mniejszych. Oczywiście wszystkie spostrzeżenia uczniów zdobyte podczas przelewania wykorzystałam do rozwiązywania zadań tekstowych, bo przecież z matematycznych okazji należy korzystać (a dodatkowo – **nic tak nie motywuje uczniów, jak świadomość, że to, czego się nauczyli, przydaje się na co dzień – zasada 10.**). Przekonałam się o tym podczas rozwiązywania przez dzieci kolejnego zadania (z badania OBUT 2012).

Zadanie 21. ***Mama wlała 2 litry soku do identycznych butelek o pojemności ćwierć litra. Do ilu butelek wlała sok?***

Zadanie to rozwiązali prawie wszyscy pierwszoklasiści. Poniżej kilka typowych przykładów rozwiązania.

Rozlanie dwóch litrów soku do butelek o pojemności ćwierć litra nie sprawiło dzieciom trudności, dlatego postanowiłam zadanie utrudnić i zapytać o to, *Ile litrów soku muszę przynieść do klasy, abym mogła go rozlać do ćwierćlitrowych szklanek i poczęstować każdego z 24 uczniów?* I tu zaskoczył mnie chłopiec, który bez rysunku, a nawet bez dłuższego zastanowienia, powiedział po cichu „sześć". Poczekałam, aż zadanie rozwiążą pozostali uczniowie, którzy zwykle rysowali 24 szklanki (albo 24 uczniów) i grupowali je po cztery, i wtedy poprosiłam chłopca o wyjaśnienie jego błyskawicznej odpowiedzi.

Marcel – *Przecież wiemy, że 2 butelki (2 litry) to osiem ćwiartek, potem jeszcze dwie, to będzie już 16 i jeszcze dwie to będzie 24.*

Proste? Okazuje się, że aby rozwiązywać zadanie, nie trzeba znać wszystkich działań arytmetycznych. Wystarczy po prosu wykorzystywać znane i dostępne narzędzia (czytaj: obliczenia), a także rysunki, tabelki, miarki, przelewanie, układanie, przeliczanie… Wtedy żadne zadanie nie będzie dla uczniów za trudne, bo przecież nie ma trudnych zadań.

I jeszcze podsumowania słów kilka

Na początku końca dwa zdania:
Nic tak nie motywuje uczniów do uczenia się matematyki, jak rozwiązywanie zadań tekstowych.
Nic tak skutecznie nie zniechęca uczniów do uczenia się matematyki, jak rozwiązywanie zadań tekstowych.

To od nas nauczycieli zależy, które z powyższych zdań będzie charakteryzowało naszych uczniów. Od nas zależy, czy uczniowie będą mogli przeżyć sukces, utrwalić swoją motywację do matematycznych działań, uzyskać potwierdzenie swoich możliwości, czy też przeżywać będą niepowodzenia, odczuwać zagrożenie, bezradność, będą uświadamiać sobie, że nie potrafią pojąć tego, co z łatwością wykonują inne dzieci.

Przedstawiając w opracowaniu tak dużą liczbę rozwiązań zadań uczniów, chciałam pokazać, że możliwości wszystkich dzieci są nieograniczone, często zaskakujące, a ich pomysły niezwykle oryginalne.

Iwona Leśniewska
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Zespole Szkół nr 27 w Bydgoszczy z ponad dwudziestoletnim stażem; nauczycielka z wykształcenia i z zamiłowania; autorka kilku książeczek dla dzieci, a także artykułów dla nauczycieli; publikowała m.in. na łamach miesięcznika „Wiadomości, Rozmowy, Głosy o Szkole".

MATEMATYCZNE POGADUCHY, CZYLI DYSKUSJE NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASACH I–III

Dorota Preus

Od najwcześniejszych lat mały człowiek poznaje otaczający go świat, zadając pytania i oczekując na nie odpowiedzi, wyjaśnień i argumentów. Nie może więc dziwić fakt, że dzieci w klasach I–III szkoły podstawowej mają naturalną potrzebę korzystania z tej metody poznawczej. Często ich pytania są nieprecyzyjne i mało zrozumiałe dla odbiorcy, ale w miarę ćwiczeń i zdobywania wiedzy stają się bardzo konkretne i trafne.

Pytania są na ogół początkiem rozmowy, a potem dyskusji na dany temat. Dzieci stają się dla siebie instruktorami, udzielając odpowiedzi, podając sposoby rozwiązań i tłumacząc różne zawiłości świata matematyki. Bywa, że sprzeczają się, kto z nich ma rację. Często robią to swoim językiem, który z biegiem lat staje się coraz bardziej precyzyjny.

W klasie pierwszej, którą obecnie prowadzę, staram się nakłaniać uczniów, aby sami poszukiwali rozwiązań, wymieniali się swoimi spostrzeżeniami i wnioskami. Często wywołuję takie sytuacje dydaktyczne, które prowokują dzieci do dyskusji opartej na ich przemyśleniach i doświadczeniach.

Prowadzone podczas zajęć spory wywołują emocje i podsycają zaangażowanie. Zauważyłam, że coraz więcej dzieci bierze udział w tych dyskusjach. Na początku roku szkolnego spora grupa uczniów nie potrafiła opowiedzieć klasie o tym, jak i dlaczego rozwiązała dany problem matematyczny. Na moje pytanie skierowane do ucznia: *Powiedz, jak to rozwiązałeś* – otrzymywałam odpowiedź: *Nie wiem, jakoś tak…*

Liczby parzyste i nieparzyste

Przykładem cyklu zajęć, w których uczniowie odgrywali role odkrywców, są lekcje poświęcone liczbom parzystym. Poprosiłam na środek klasy czwórkę dzieci, które stanęły obok siebie.

– *Czy możecie ustawić się jakoś inaczej?* – zapytałam.

Widać było przez chwilę ich wahanie, aż wreszcie jeden z siedzących chłopców zawołał:

– *Ustawcie się parami!*

Dzieci bez namysłu stanęły w dwóch parach. Teraz wywołałam na środek siedmiu uczniów i też poprosiłam ich o ustawienie się. Ci od razu stanęli w dwóch rzędach. Zapytałam:

– *Czym różnią się te dwie grupy dzieci?*

Adaś: *Tych jest więcej* (wskazał liczniejszą grupę).

– *Ile jest dzieci w pierwszej grupie, a ile w drugiej?*

Igor: *4 a tych 7.*

– *Czy obie grupy stoją ustawione tak samo?*

Kamil: *Bo dla niego zabrakło pary.*

– *Ile jest dzieci w grupie Grzesia?* – zapytałam.

Kamil: 7.

– *Czy możemy te dzieci ustawić inaczej, tak aby Grześ miał parę?*

Adam szybko zgłosił się jako chętny i zaczął przestawiać dzieci. Po chwili zawiedziony stwierdził:

– *Ale teraz Dorian nie ma z kim stanąć… Nie, nie można, zawsze ktoś zostanie bez pary.*

Na to Mikołaj: *Już wiem, to jest liczba nieparzysta. Mama mi mówiła, że to wtedy, gdy nie można połączyć parami.*

Ewa: *Właśnie! Siedem jest nieparzyste, bo jest nie do pary, zawsze jeden zostanie.*

– *Kto spróbuje wytłumaczyć, jakie liczby nazywamy parzystymi, a jakie nieparzystymi?*

Kamil: *Parzyste to liczby, które mają pary, a nieparzyste ich nie mają.*

– *A kto poda mi przykład liczby parzystej?*

Igor: *2, 6, 9.*

Podczas gdy uczeń wymieniał liczby, zapisywałam je na tablicy.

– *Jak możemy sprawdzić propozycję Igora?*

Ewa: *Połączyć w pary.*

Na te słowa dwoje dzieci utworzyło parę.

– *Czy dwa to liczba parzysta?*
– *Taaak – wspólna odpowiedź.*
– *A sześć?*

Po chwili odpowiednia liczba dzieci została ustawiona i wiedzieliśmy, że też mają pary.

– *A jaką liczbą jest dziewięć?*
– *Nieparzystą – padła głośna odpowiedź. – Bo Andrzej nie ma pary.*

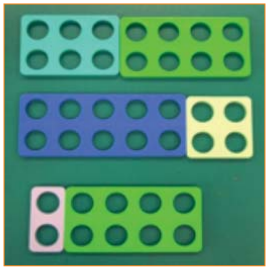
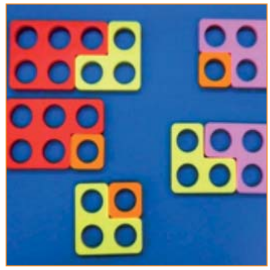
Następnie poprosiłam uczniów, aby usiedli w czteroosobowych grupach i rozdałam im klocki Numicon.

– *Sprawdźcie za pomocą klocków, które liczby są parzyste, a które nieparzyste. Może któryś zespół znajdzie receptę na to, jak je szybko rozpoznać?*

Kamil: *Przecież te z noskami to nieparzyste.*

– *No tak, ale słysząc liczbę, nie widzisz klocków i nie wiesz, czy ma nosek, czy nie. Zastanówmy się, jak to inaczej wytłumaczyć.*

Uczniowie zaczęli manipulować kształtkami i układać je w ciągi prostokątów z noskami i bez. Po chwili potrafili wymienić obie grupy liczb w zakresie 10.

Zapisałam je na tablicy w dwóch rzędach i poprosiłam, żeby podali większe liczby. Teraz musieli układać po dwa lub trzy klocki.

– *Kto poda nam receptę na liczby parzyste i nieparzyste? Popatrzcie uważnie na to, co zostało zapisane na tablicy. Czy coś zauważyliście?*

Ewa: *W każdym rzędzie jest tyle samo liczb.*

Kuba: *One kończą się podobnie. Tu jest 2, 4, 6, 8, 10, a tu 12, 14, 16, 18, 20.*

– *Jakimi liczbami są wobec tego 36 i 38 ?*

Kamil: *To liczby parzyste.*

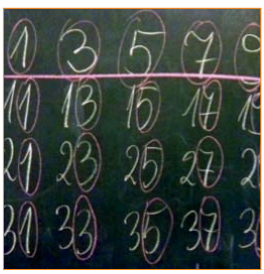
– *Tak, ale dlaczego?*

Kamil: *Bo na końcu mają 6 i 8?*

– *Czyli jaką cyfrę mają na końcu liczy parzyste, a jaką nieparzyste?*

Ewa: *Parzyste na końcu mają: 2, 4, 6, 8, 0.*

Dorian: *A nieparzyste 1, 3, 5, 7, 9!*



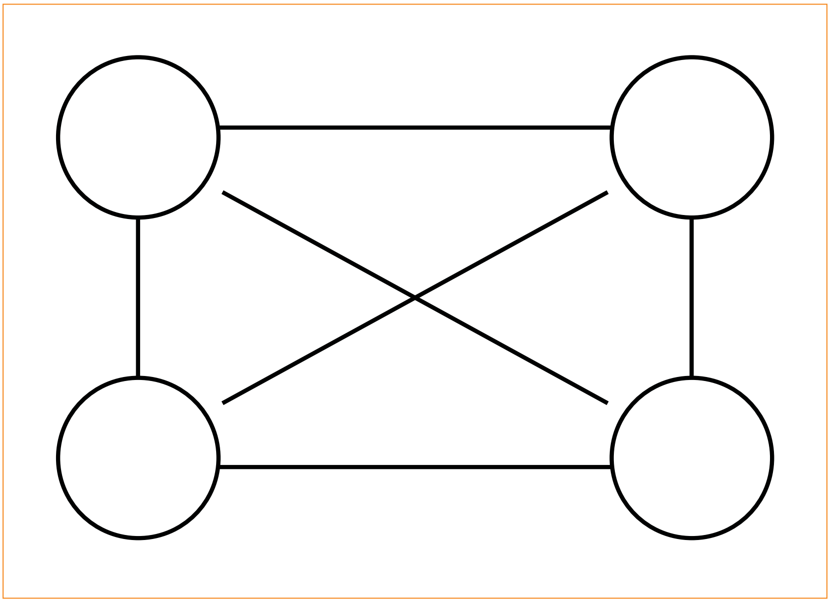
Następnie bawiliśmy się w zgadywankę. Chętne dziecko mówiło dowolną liczbę, a klasa decydowała, czy to jest liczba parzysta, czy nieparzysta. Zauważyłam, że dzieci miały ogromną satysfakcję z tego, że potrafią ustalać parzystość i nieparzystość dużych liczb i wymieniały coraz to większe liczby.

Ćwiczenia przeprowadzałam w grudniu. W tym okresie rozkład materiału, który wybrałam, zakładał realizację monografii szóstki i siódemki. Pierwszaki, które uczyłam, wymieniały, zapisywały i odczytywały liczby znacznie wykraczające poza ten zakres liczbowy.

Uczniowie eksperymentowali sami i dzięki temu odkrywali tajemnice matematyki. W ich dialogach dostrzec można było elementy przewidywań matematycznych, opartych na zdobytych wcześniej doświadczeniach, a przeprowadzone działania to nic innego, jak ich dowody matematyczne.

Na kolejnych zajęciach postawiłam uczniom zadanie polegające na uzupełnieniu grafu tak, aby wzdłuż każdej linii wyszła parzysta suma. Najpierw dzieci miały zastanowić się w parach nad tym, jakie dwie liczby muszą dodać, aby uzyskać wynik parzysty, a jakie, aby był on nieparzysty. Dla ułatwienia dzieci dostały kartoniki obrazujące oba typy liczb[1].

Adam: *Przecież jak położę dwa prostokąty to zawsze razem też wyjdzie prostokąt.*



– *Świetnie Adasiu, czyli jaki wniosek?*

Niestety, chłopiec nie potrafił uogólnić, ale szybko wyręczył go Mikołaj:

Mikołaj: *Bo dwie parzyste dają też parzystą!*

Dorian: *A ja mam 3 i 5 i też mam prostokąt, a to przecież nieparzyste…*

Ewa: *Ja też tak ułożyłam. I jeszcze 7 i 7. To może tak też można?*

Kamil: *No pewnie, bo to 14 – parzysty wynik. Patrz te nieparzyste to dały. Proszę pani dwie nieparzyste dadzą parzysty wynik. – A jakie dwie liczby musimy dodać, żeby uzyskać liczbę nieparzystą?*

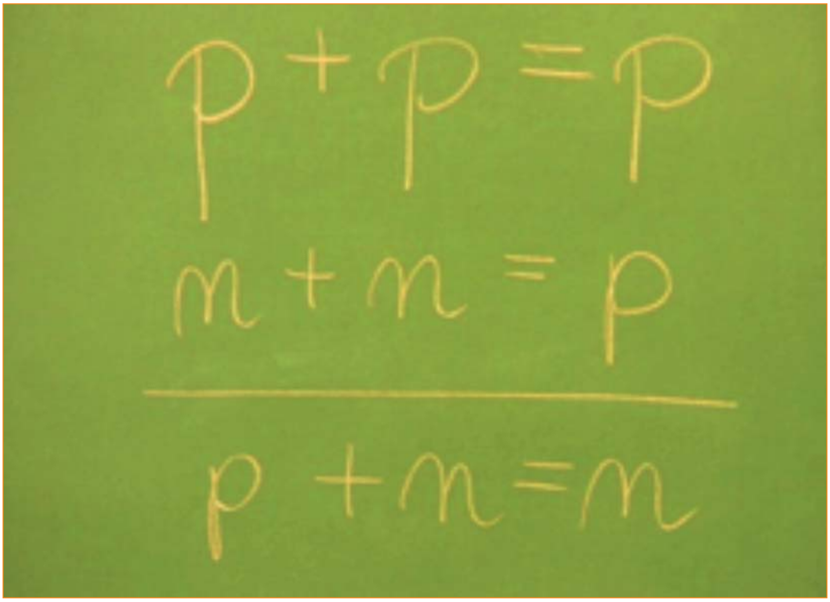
Mikołaj: *Musimy pomieszać te liczby. Jedna musi mieć nosek!*

– *Świetnie, teraz już wszystko wiemy.*

Zapisywałam na tablicy kolejne wnioski formułowane przez dzieci:

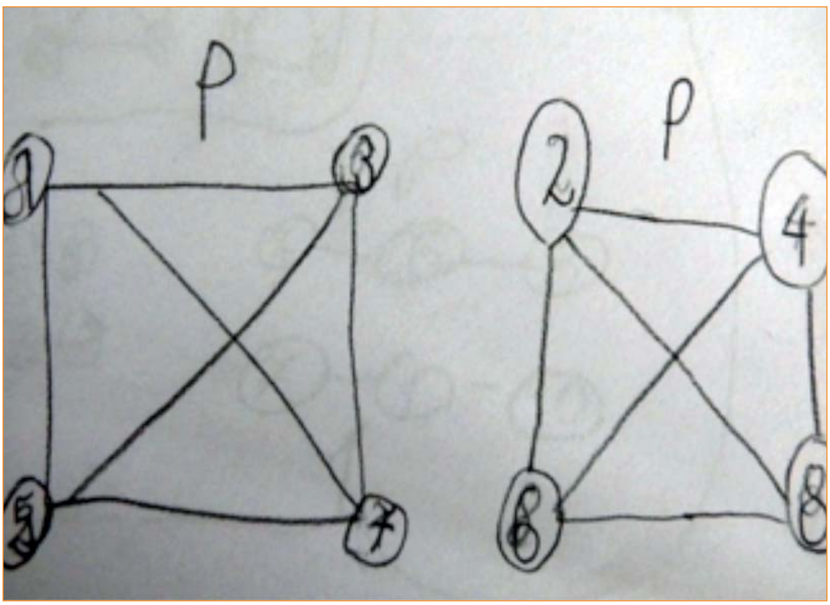
Dzięki wcześniejszej analizie i wnioskom wszyscy bezbłędnie wykonali zadanie:

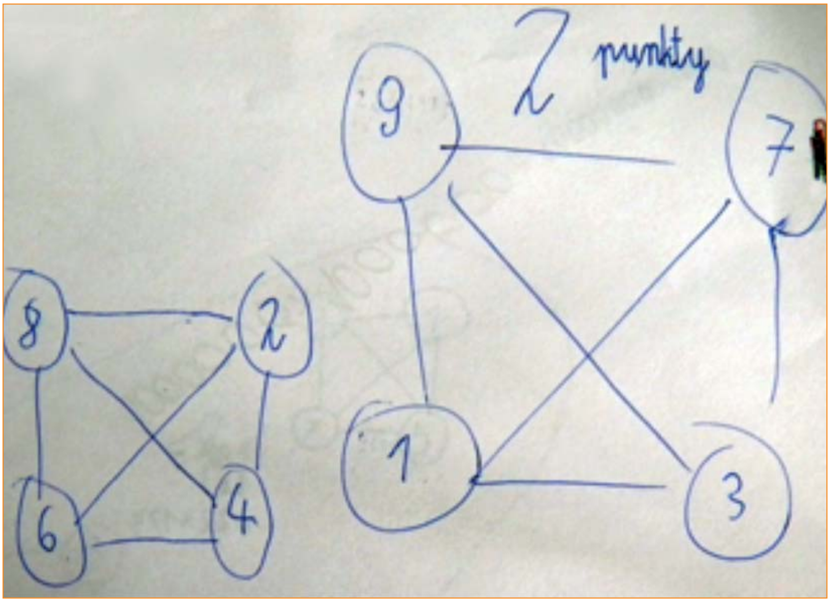
[1] Ten i niektóre następne pomysły zaczerpnięte z: http://www.cauchy.pl/przedszkole/index.php

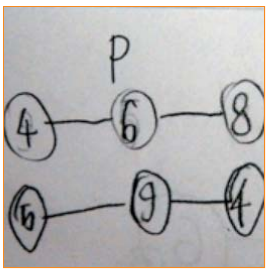


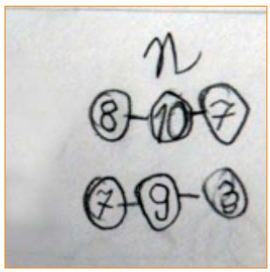
Potem próbowaliśmy trudniejszych zadań. Uczniów zaczęło to wciągać. Sami proponowali tworzenie sum składających się z trzech składników:

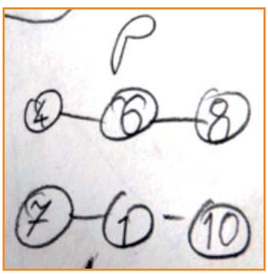
Podczas prezentowanych ćwiczeń pierwszoklasiści znowu operowali wynikami znacznie przekraczającymi zakres liczbowy przewidziany realizowanym przez nas programem. Sami wpisywali liczby i dokonywali obliczeń – wystarczyło tylko dać im wolną rękę i ich nie ograniczać.

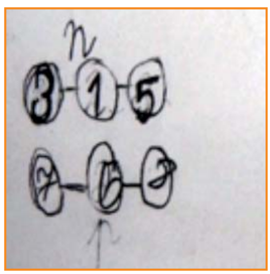




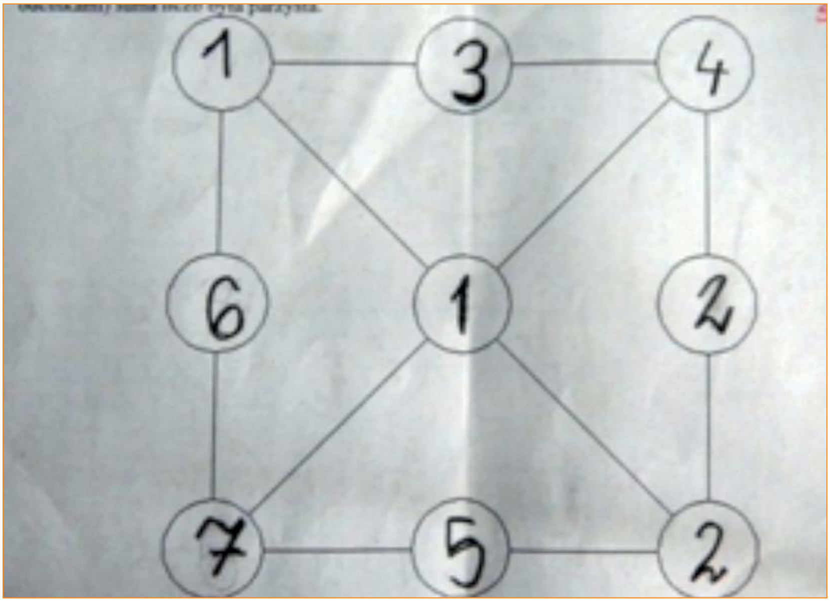


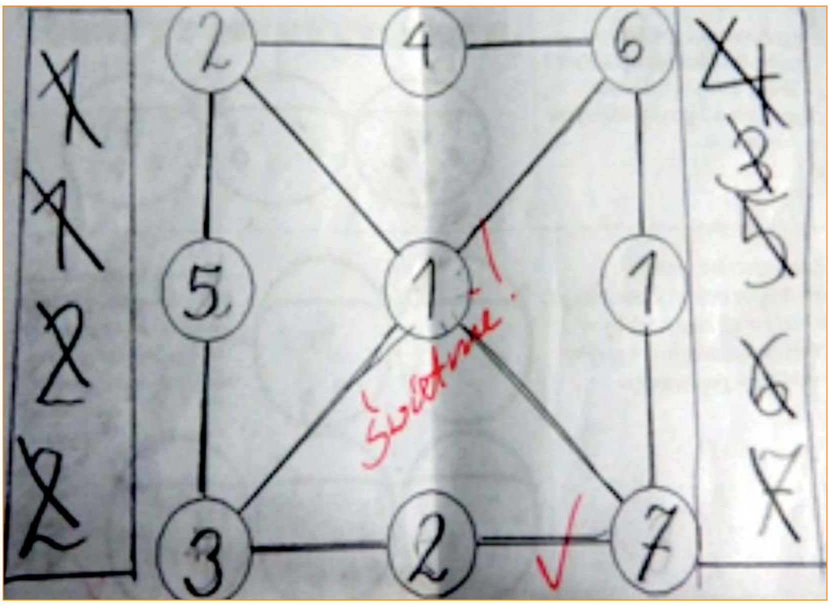






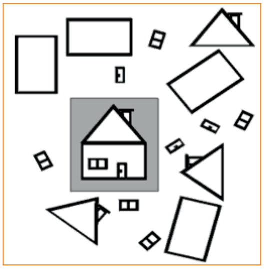
Analizując zajęcia dotyczące sum parzystych i nieparzystych, doszłam do wniosku, że mogłam zaproponować dzieciom, aby same wymyśliły sposób zapisu wniosków na tablicy. Myślę, że pojawiłoby się kilka ciekawych pomysłów. Postanowiłam, że w przyszłości dam im taką możliwość, rezygnując z narzucania dzieciom sposobu zapisu.





Cykl zadań dotyczących różnic parzystych i nieparzystych nie sprawiał dzieciom trudności. Korzystając ze zdobytych doświadczeń i dyskutując ze sobą, dzieci bardzo szybko wykonywały analogiczne zadania, wypełniając diagramy z odejmowaniem.

Zagadki matematyczne



Uczniowie, z którymi pracuję, bardzo lubią rozwiązywać rysunkowe zagadki matematyczne, labirynty, kwadraty magiczne, plątaninki itp. W listopadzie zaproponowałam im zadanie bazujące na ich spostrzegawczości wzrokowej, myśleniu przyczynowo-skutkowym oraz umiejętności przeliczania elementów. Poprosiłam, żeby powiedzieli, ile domków, takich jak ten w szarym prostokącie, można zbudować z porozrzucanych elementów.

Bez mojej pomocy dzieci znalazły aż sześć sposobów rozwiązania tego zadania:

1. pokolorowanie jednym kolorem poszczególnych elementów składających się na jeden domek;
2. otoczenie pętlą potrzebnych klocków do budowy jednego domku i policzenie pętli;
3. łączenie liniami kompletów klocków;
4. rysowanie domków obok i wykreślanie wykorzystanych klocków;
5. wycięcie elementów i ułożenie domków;
6. przeliczenie i porównanie liczby klocków.

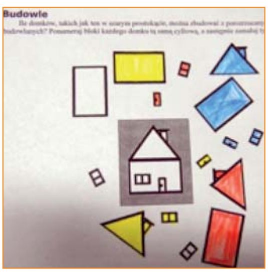
Po rozmowie każdy wybrał sposób, który mu najbardziej odpowiadał, i przystąpił do pracy. Okazało się, że nikt z dwudziestotrzyosobowej klasy nie zdecydował się na wycinanie tych elementów.

Po zakończeniu zadania i sprawdzeniu wyniku, dzieci z dużym zainteresowaniem oglądały prace swoich rówieśników. Zauważyłam, że uczniowie chcieli jak najszybciej uzyskać poprawne rozwiązanie i duża ich część zrezygnowała z metod wymagających kolorowania (jako zbyt czasochłonnych).

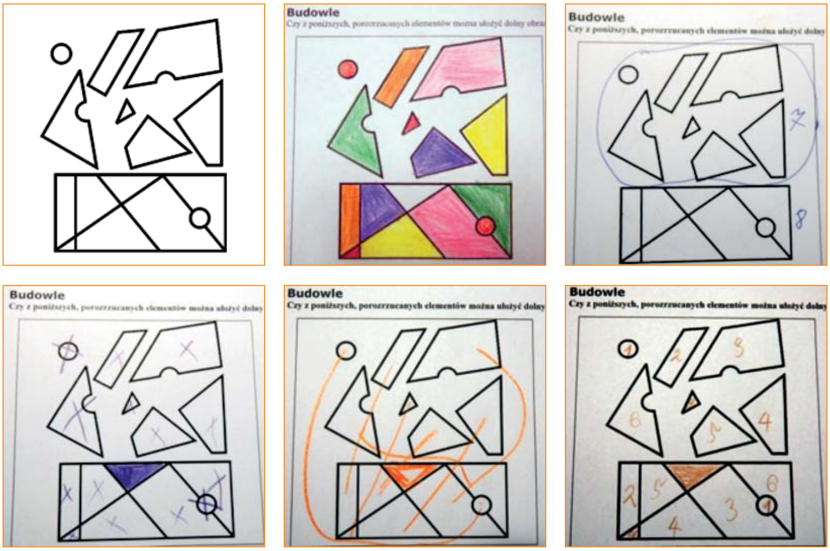
Po kilku dniach przygotowałam dla moich uczniów podobne zadanie:

– *Popatrzcie na obrazek. Jak myślicie, czy wystarczy elementów na ułożenie takiego obrazka?*

Mimo kilkudniowego odstępu między zaprezentowanymi ćwiczeniami, uczniowie tym razem bardzo szybko wpadali na różnorodne pomysły rozwiązań. Wydawało mi się nawet, że nie zależy im na podaniu prawidłowej odpowiedzi, ale na znalezieniu sposobu, którego jeszcze żaden kolega nie wymyślił. Ich kreatywność i pomysłowość dała znać o sobie.



Rachunek pamięciowy



W młodszych klasach szkoły podstawowej uczniowie doskonalą rachunek pamięciowy. Aby uatrakcyjnić zajęcia i nie zanudzać dzieci działaniami, graliśmy często w gry planszowe zaczerpnięte ze strony internetowej: www.trzecioklasista.pl. Po 3-4-krotnym rozegraniu danej planszy następowała dyskusja i analiza. Przy grze „Odejmowanka", polegającej na zakrywaniu pól będących wynikiem odejmowania liczb wyrzuconych na dwóch kostkach sześciennych, przyjrzeliśmy się dokładnie planszy. Moje wyjściowe pytanie dotyczyło przebiegu gry:

– *Jakie pola zostawały niezakryte najdłużej?*

Ewa i Janek : *Nam 5!*

Dorian i Stefan: *A u nas 4 i 5.*

Kilka z par potwierdziło, jednak:

Bartek: *No co wy, nam zostało 0!*

Mikołaj: *Niemożliwe, przecież zero było łatwo wyrzucić!*

– *Dlaczego tak uważasz? Jak wyrzucałeś zero?*

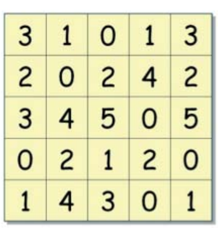
Mikołaj: *No jak to, na przykład 6 i 6, 4 i 4, 1 i 1.*

Ewa: *Ale zobacz, ile jest zer! A nie każdemu tak się udawało.*

– *Dobrze. Uporządkujmy wasze spostrzeżenia. Podyktujcie mi, ile jakich wyników jest na planszy.*

Uczniowie skrupulatnie zaczęli przeliczać pola i jedno przez drugie dyktować swoje spostrzeżenia. Zapisywałam je kolejno na tablicy.

– *Czy potraficie wytłumaczyć, dlaczego wśród liczb znajdujących się na planszy nie ma szóstki?*



3	1	0	1	3
2	0	2	4	2
3	4	5	0	5
0	2	1	2	0
1	4	3	0	1

Plansza gry ODEJMOWANIA

Janek: *Bo nie może wyjść z odejmowania.*

Ewa: *Na kostce musiałoby być siedem.*

Gabrysia: *Bo 6 – 6 to zero.*

– *Zastanówmy się teraz, dlaczego wyniki nie występują na planszy w takiej samej ilości. Jak myślicie?*

Janek: *Żeby było trudniej grać?*

Gabrysia: *Przecież szybko się grało. Chyba nie…*

Kamil: *Ale 5 można zakryć tylko przy 6 – 1 i dlatego zostawało!*

Od razu to zapisałam.

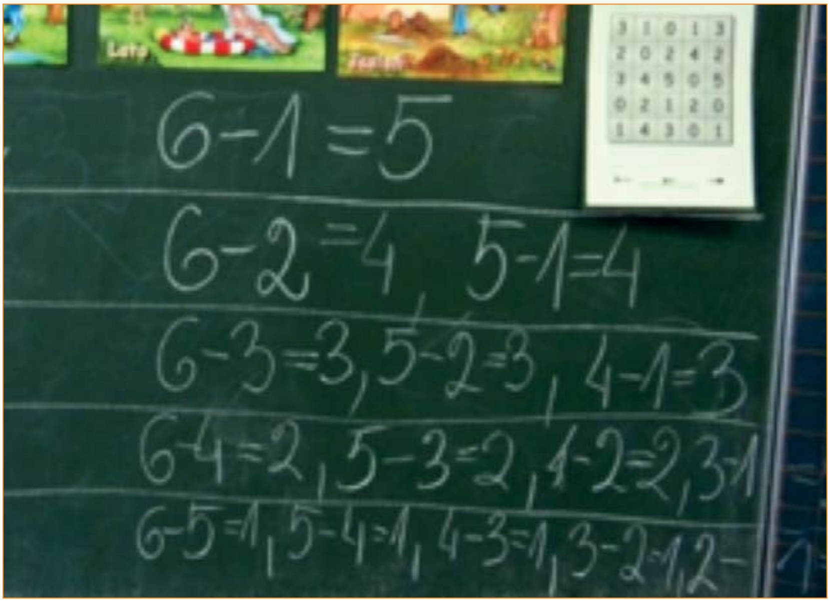
Kamil: *No tak, ale zero ma więcej możliwości.*

– *A możecie wymienić te możliwości? Przy jakich wyrzuconych parach oczek zakrywaliście zero?*

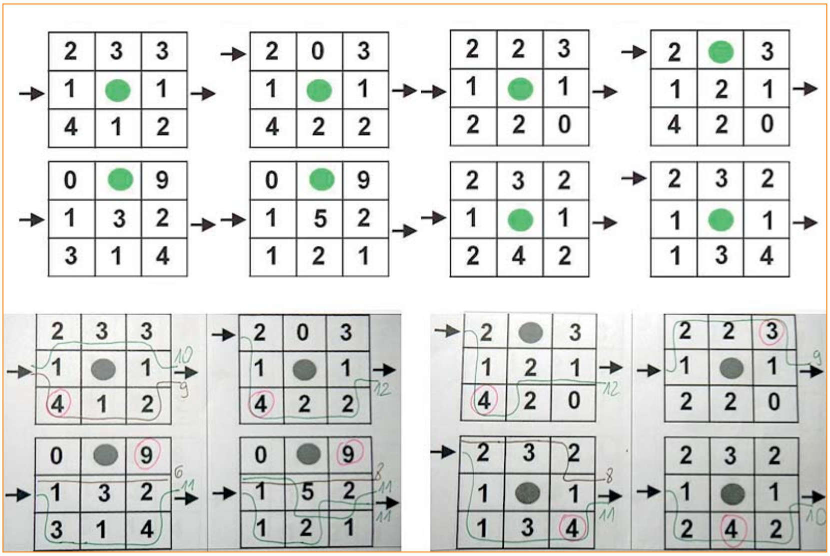
Dzieci głośno wykrzykiwały: *6 i 6, 2 i 2, 1 i 1* itd.

Mikołaj: *Przy dwóch takich samych, a wtedy wynik jest zero!*

W dalszej części zajęć uczniowie podyktowali mi pozostałe działania. Gdy wszystko znalazło się na tablicy, poprosiłam dzieci o przyjrzenie się zapisowi i podanie swoich spostrzeżeń.



Gabrysia: *Tam gdzie jest mniej liczb na planszy tam jest mało działań.*
Janek: *No właśnie i dlatego trudno to rzucić.*
Mikołaj: *Tam gdzie jest dużo możliwości rzucenia, pojawia się więcej wyników na planszy*
– *Jak myślicie jak wyglądałaby gra, gdyby wszystkich wyników było tyle samo?*
Janek: *Byłoby nudno!*
Bartek: *Długo by się grało, bo nie zakryłoby się piątki!*
Gabrysia: *Rzadko padałoby 6 i 1 i gra byłaby nudna.*
Innym ciekawym sposobem ćwiczenia rachunku pamięciowego, wydaje mi się zabawa w kwadratowe labirynty. Polega ona na wybraniu drogi od lewej strzałki do prawej, tak aby suma wszystkich liczb na polach przez które przechodzimy była jak największa. Można poruszać się w pionie oraz poziomie górę, dół, w lewo i w prawo (ale nie po skosie) i tylko raz wejść na dane pole. Nie wolno stanąć na polu z zielonym kółkiem.
– *Kto potrafi wyjaśnić, jaką drogę zaznaczył i dlaczego taką?*
Bartek: *Wchodząc na pole wybierałem jako następne to, które jest większe.*
Patryk: *Proszę Pani, ale nie zawsze tak idąc, miało się najwięcej!*
Ewa: *Ale przecież przez dziewiątki nie dało się przejść tak, aby nie powtórzyć pola.*
Mikołaj: *A mi się to nie zgadza, bo w pierwszej tabelce poszedłem górą i mam więcej niż dołem.*
– *Zaznaczcie kółeczkami największe liczby w każdej tabelce, a kolorem zielonym tę drogę, której suma jest największa. Innym kolorem zaznaczcie i podsumujcie drogę, stosując zasadę większego pola. Czy nasunął się Wam jakiś wniosek?*



Kamil: *Większość dróg o największym wyniku przechodzi przez największe liczby.*
Gabrysia: *Nie można iść na skróty, tylko najdłuższą drogą, bo wtedy zbiera się więcej punktów.*
Patryk: *No tak, ale niektóre są tak samo długie, a mają inny wynik.*
– *Czy mamy jakąś zasadę?*
Mikołaj: *Staramy się wybrać drogę najdłuższą i z większymi liczbami.*

Podczas rozwiązywania tego zadania uczniowie wykonali wiele działań kilkuskładnikowych, porównywali swoje wyniki i przede wszystkim spontanicznie dyskutowali o tym, co, jak i dlaczego tak robią. Ożywiły się nawet małomówne dotąd dzieci. Uczniowie wypowiadali swoje spostrzeżenia spontanicznie, często nie podnosząc ręki. Słychać było gwar dyskusji przeprowadzanych w parach i między sąsiadami. Dla mnie jasne było, że klasa pracuje i zdobywa nowe matematyczne doświadczenia, a przy okazji ćwiczy sprawność rachunkową z przekroczeniem progu dziesiątkowego (ponownie wykraczając poza założenia wybranego przeze mnie programu).

Klasa pierwsza a zakres liczbowy

Obejmując w tym roku szkolnym klasę pierwszą, jak zwykle przeprowadziłam standardową diagnozę wstępną, sprawdzającą opanowanie przedszkolnej podstawy programowej. Okazało się, że prawie cały zespół bezbłędnie poradził sobie z testem. W paru pracach widać było małą sprawność grafomotoryczną, trójka dzieci pomyliła stronę prawą z lewą i jeden uczeń błędnie policzył elementy.

Podczas pierwszego miesiąca zauważyłam, że kilkoro dzieci doskonale radzi sobie

z liczbami i działaniami w zakresie 20, a nawet 100. Postanowiłam przeprowadzić dodatkowe badanie oceniające rzeczywisty stan wiedzy i umiejętności dzieci. Ku mojemu zaskoczeniu okazało się, że z dwudziestu trzech uczniów tylko sześcioro działa matematycznie w zakresie 10. Pozostała grupa bez większych problemów dokonuje obliczeń w zakresie 20, a czterech chłopców w pamięci dodaje i odejmuje w zakresie 100. Zdecydowana większość klasy rozpoznaje i odczytuje liczby dwucyfrowe, a kilkoro liczby trzycyfrowe.

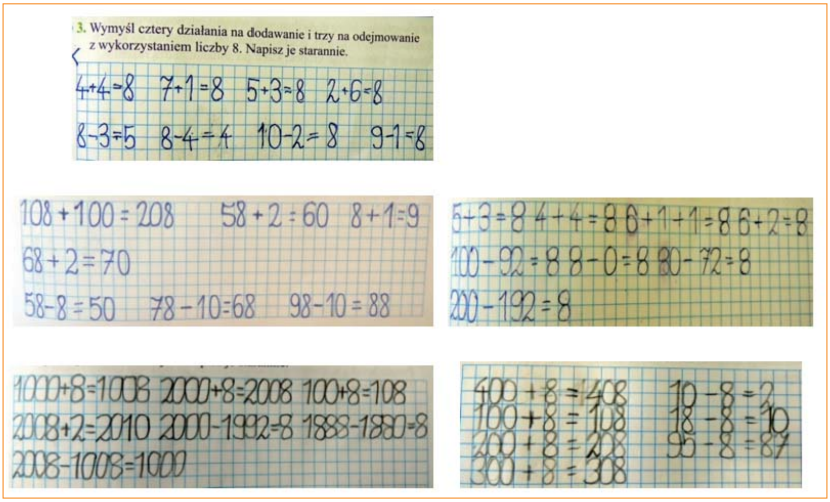
Opierając się na tych wynikach, postanowiłam przyspieszyć wprowadzanie liczb i w żaden sposób nie ograniczać dzieciom zakresu liczbowego. Dbałam tylko o to, aby wykonywały działania zgodnie ze swoimi możliwościami. Zauważyłam, że bardzo mobilizowało to uczniów do stawiania sobie większych wymagań. Momenty, w których mogły pochwalić się swoimi umiejętnościami, były dla nich bezcenne.

Przykładem może być jedno zadanie z podręcznika, w którym dzieci miały podać przykładowe działania z wykorzystaniem liczby 8. Okazało się, że tylko w czterech zeszytach zakres liczbowy nie przekroczył 10.

W pozostałych kilka albo wszystkie działania opierały się na liczbach dwu-, trzy-, a nawet czterocyfrowych.

Innym przykładem będą piramidy matematyczne. Dzieci same je wymyślały dla swoich sąsiadów z ławki. Z założenia miały to być piramidy czteropiętrowe, z wpisanymi w pola podstawy liczbami od 0 do 9. Szybko okazało się, że to nie satysfakcjonuje małych matematyków i zaczęli łamać zasady, tworząc więcej poziomów lub wpisując większe liczby.

Swoje umiejętności uczniowie prezentowali również podczas rozwiązywania otwartych zadań tekstowych. W zadaniu należało podać kwoty pieniędzy posiadaną przez dwie dziewczynki, przy warunku, że jedna z nich ma o 2 złote więcej od drugiej. Oto jak uczniowie rozwiązali ten problem :



– No dobrze, ale jak dodałeś to sześć?

Kamil (nieco zdziwiony moim pytaniem): *Normalnie… trzy i trzy…*

Mikołaj: *No co ty? Ja mam lepszy pomysł! 30 i 20 to jest 50, a 7 i 6 to 13, czyli razem 63. I już.*

Patryk: *Proszę Pani! Ja jeszcze inaczej. Po prostu do 37 dodaję 30 i odejmuję 4. Też mi wychodzi 63!*

Janek: *Ale dlaczego 30? Źle! Miałeś dodać 26!*

Patryk: *Bo tak mi łatwiej! Przecież mam dobry wynik.*

Kamil postanowił sprawdzić kolegę: *No dobra, to ile jest 48 + 55?*

Patryk: *103!*

Kamil: *Jak to zrobiłeś?*

Patryk: *Dodałem 60, wyszło 108 i zabrałem 5, czyli 103 (odpowiedział dumny Patryk, widząc konsternację kolegów).*

Mikołaj: *Proszę Pani, tak też można? Skąd on to bierze?*

– *Patryk, czy potrafisz powiedzieć, dlaczego przy pierwszym działaniu dodałeś 30, a w drugim 60?*

Patryk: *Biorę następną dziesiątkę… po 26 jest 30, a po 55 jest 60. Łatwe!*

Mikołaj: *A potem co odejmujesz, skoro to jest dodawanie?*

Patryk: *Tyle ile brakowało do tej liczby… od 26 do 30 brakowało 4, a od 55 do 60 było 5.*

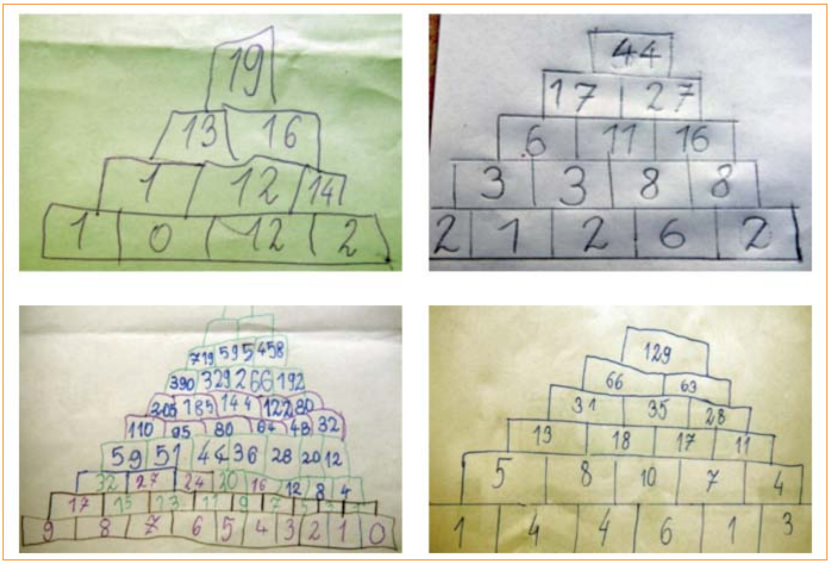
Kamil koniecznie chciał przećwiczyć ten sposób i poprosił o kilka nowych przykładów. To zmobilizowało też resztę klasy do pracy. Uczniowie podchodzili do tablicy i na ochotnika. Rozwiązywali działania, stosując metodę Patryka.

Bartek: *Proszę Pani, a ja liczę, rysując. Mama mnie nauczyła.*

– *Czy potrafisz pokazać nam na tablicy?*

Chłopiec rozrysował na tablicy działanie 37 + 26.

Bartek: *Rysuję tyle prostokątów ile jest dziesiątek, na przykład przy 20 dwie, a przy 60 sześć. Potem stawiam tyle kresek ile pokazuje druga cyfra (cyfra jedności).*



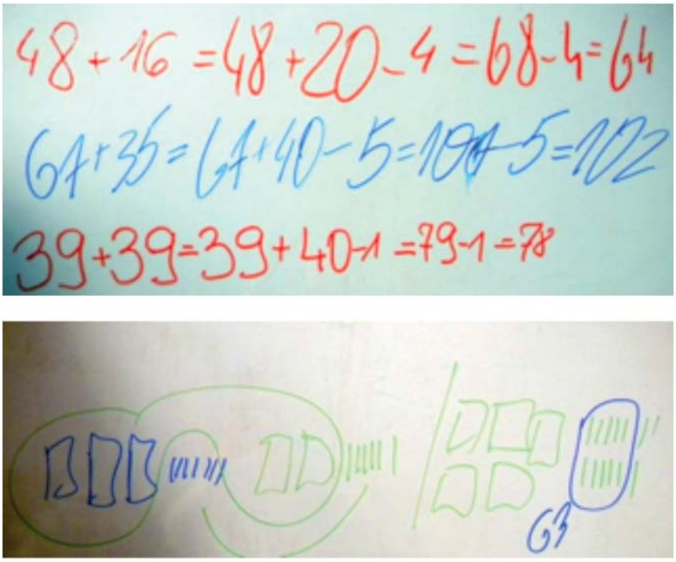
Przy następnych zadaniach okazało się, że wiele dzieci korzystało z tego graficznego sposobu Bartka. Podczas zajęć uczniowie mieli stały dostęp do liczmanów i mogli wykonywać obliczenia, manipulując konkretami.

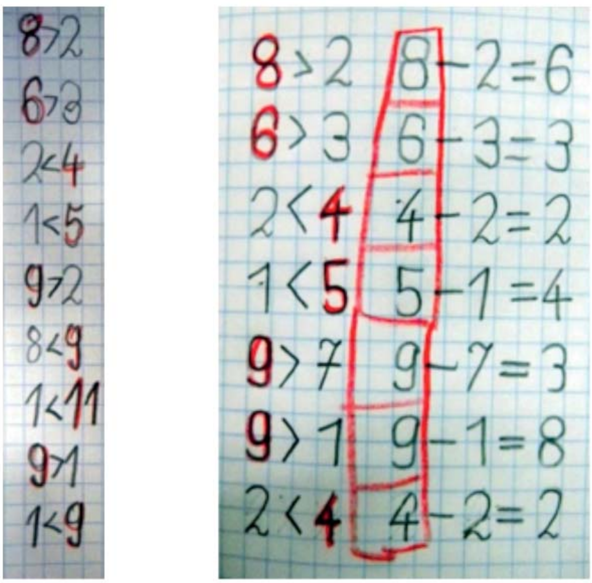
Byłam bardzo ciekawa, jak znajdą się w tej sytuacji te dzieci, które na początku roku nie miały takich umiejętności jak koledzy. Okazało się, że była to dla nich niesamowita mobilizacja. Cały czas starali się dorównać rówieśnikom i też liczyć w większych zakresach. Często musieli pomagać sobie palcami, rysunkami i liczmanami, ale widać było u nich chęć do pokonania tego progu wiedzy i dużą radość z sukcesu.

Podczas prezentowanych zadań uczniowie stali się sami dla siebie mentorami. Tłumaczyli swoje sposoby rozwiązań, gestykulowali, a przede wszystkim dyskutowali o matematycznych problemach. Przekonałam się, że mogę im zaufać oraz że wiedzą i umieją znacznie więcej, niż mi się na początku wydawało.

Odejmowanie

Stosowanie przeze mnie zasady „podążania za uczniem" doprowadzało często do wyjaśniania zagadnień realizowanych w starszych klasach. Wychodziłam jednak z założenia, że na pytania dzieci należy udzielać odpowiedzi. Starałam się, aby to uczniowie tłumaczyli sobie wzajemnie matematyczne zawiłości, stosując swój język i metody przekazu. Zakładam, że nie wszystkim uczniom udawało się zrozumieć te zagadnienia, ale części z nich na pewno tak. Przykładem może być lekcja poświęcona zasadom porównywania liczb i ich odejmowania, podczas której pojawił się problem liczb ujemnych.





W celu doskonalenia umiejętności stosowania znaków <, >, = poleciłam uczniom wpisanie ich między pary liczb. Po odczytaniu i sprawdzeniu poprawności wykonania zadania dzieci miały zaznaczyć kolorem w każdej parze większą liczbę. Kolejnym etapem pracy było ułożenie działań na odejmowanie z zastosowaniem porównanych par liczb. Przy pierwszych dwóch parach wszystko przebiegało zwyczajnie. Uczniowie jakby automatycznie napisali 8 – 2 i 6 – 3. Dopiero przy kolejnym działaniu pojawiła się dwoistość odpowiedzi:

Ewa: *Teraz będzie 4 – 2 = 2*

Mikołaj: *Ale przecież może być 2 – 4, bo to będzie -2.*

Uczniowie podnieśli głowy w oczekiwaniu na moją reakcję.

– *Dobrze obliczyłeś, ale Ewa też wykonała poprawne działanie. Mikołaju, czy spróbujesz wyjaśnić klasie, co znaczy -2?*

Mikołaj: *To tak jakbym miał 2 złote długu. Ktoś by mi pożyczył, czyli musiałbym mu oddać.*

Kamil: *To tak, jak masz liczbę o mniejszej zawartości i od niej odejmiesz liczbę o większej zawartości. To wtedy wychodzi liczba z minusem.*

Bartek: *A mi mama tłumaczyła, że to są liczby poniżej zera, tak jak minusowe temperatury zimą.*

– *Świetnie to wyjaśniliście, cieszę się, że to rozumiecie. Liczbami ujemnymi pobawimy się innym razem. Dopiszcie teraz pozostałe działania.*

Prowadząc zajęcia z edukacji wczesnoszkolnej, spotykamy się z pytaniami dzieci dotyczącymi zagadnień omawianych w klasach starszych, np. co to znaczy 75%, co to jest cal, liczby ujemne, objętość, ułamek dziesiętny itp. Podczas rozmowy okazuje się często, że przynajmniej jeden z uczniów rozumie, wie, co te pojęcia oznaczają i jest w stanie wytłumaczyć to pozostałym kolegom. Jest to świetna okazja do dzielenia się wiedzą o otaczającym nas świecie. Dzieci poznają to, co w danej chwili je interesuje, zaciekawia. Tutoring koleżeński mobilizuje do poszerzania zainteresowań i działa w obie strony. Uczeń będący mentorem utrwala i pogłębia swoją wiedzę oraz doskonali swój warsztat wypowiedzi. Natomiast dziecko odgrywające w tym momencie rolę ucznia, zdobywa nowe wiadomości i umiejętności oraz śmielej zadaje pytania.

Podczas odbywającej się wówczas spontanicznej dyskusji matematycznej uczniowie zdobywają wiedzę, uczą się o niej rozmawiać, dokonują uogólnień, wyciągają wnioski i przeprowadzają dowody matematyczne. Dzięki tym procesom coraz lepiej potrafią się posługiwać swoją wiedzą. Dzieci coraz swobodniej i odważniej zabierają głos w rozmowach, są zaangażowane i przejęte omawianymi zagadnieniami. Bez wątpliwości wpływa to na ilość i jakość zdobywanych wówczas wiadomości. Przy okazji następuje też wspaniała integracja zespołu.

W tym roku szkolnym wiele zmieniłam w sposobie prowadzenia matematycznych zajęć. Staram się teraz dawać dzieciom jak najwięcej możliwości na wymianę doświadczeń, nie przerywam im w dyskusjach, nie ponaglam, a przede wszystkim nie daję gotowych rozwiązań. Cierpliwie czekam, aż sami sformułują wnioski i rozwiążą matematyczny problem. Okazjonalnie wykorzystuję podręcznik i przygotowane przez wydawnictwo karty pracy, bazując głównie na grach i zabawach matematycznych oraz problemowych zadaniach tekstowych.

Dorota Preus

nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej z 23-letnim stażem, uczy w bydgoskiej szkole podstawowej.

Uwielbia matematykę, informatykę i bowling.

O GEOMETRII PRZESTRZENNEJ W KLASIE I–III

Sylwia Brzyska

Małe dziecko w swoim umyśle widzi obiekty geometryczne całościowo, jako przedmioty, które różnią się wyglądem zewnętrznym, nie dostrzega jeszcze ich własności. Kojarzy figury ze znanymi przedmiotami z otoczenia. Naturalnym działaniem jest zatem, aby proces geometrycznego kształcenia zacząć właśnie od geometrii przestrzennej – to jej obiektami są przecież przedmioty wokół nas. Daje to szansę dzieciom zobaczenia tego, czego się uczą, widząc „na własne oczy". W pakiecie edukacyjnym, z którego korzysta moja klasa (klasa druga), geometrii jest niewiele, a jeśli jest, to tylko geometria płaska. W tej sytuacji musiałam sama poszukać geometrycznych inspiracji dla moich uczniów.

Nauczanie–uczenie się geometrii oparłam na działalności uczniów, obserwacji oraz pokazie.

Inspiracja wokół nas?

Dostarczałam uczniom materiału do obserwacji i doświadczeń, odwołując się do sytuacji życiowych. Któregoś dnia zaproponowałam dzieciom, że zaprojektujemy nasze wymarzone osiedle. Potrzebne nam były różnorodne pudła, pudełka, pudełeczka różniące się wielkością i kształtem. Podzieliliśmy się na pięć grup. Metodą burzy mózgów określiliśmy, co powinno być na naszym osiedlu. Każda grupa miała inne zadanie „do opracowania" – według preferencji własnych: 1. budynki mieszkalne, 2. usługi, 3. infrastruktura komunikacyjna, 4. część ekologiczna (w tym zieleń), 5. miejsca do relaksu. Członkowie grup dokonali wyboru potrzebnych materiałów i przystąpili do pracy. W obrębie swoich grup musieli uzgodnić, jak konkretnie mają wyglądać poszczególne elementy osiedla. Potrzebne były także ustalenia pomiędzy grupami dotyczące ogólnej struktury budowanego osiedla. Gdy elementy składowe były gotowe, złożyliśmy całą makietę i zaczęliśmy o niej rozmawiać.








Zastanawialiśmy się i dyskutowaliśmy, gdzie w naszej makiecie jest matematyka. Padały różne spostrzeżenia: dotyczące równoległych i prostopadłych ulic, wielkości i kształtu budynków, proporcji, parzystości i nieparzystości numerów domu, długości płotu potrzebnego do ogrodzenia placu zabaw i całego osiedla itp. Dokonaliśmy nowego podziału na grupy, według potrzeb i zainteresowań dzieci. Przystąpiliśmy do poprawek na makiecie oraz obliczania interesujących nas zagadnień.

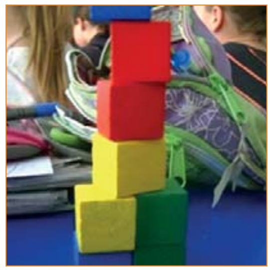
Dzieci były zadowolone ze swojej pracy i z takiej propozycji zajęć. Potrafiły ze sobą zgodnie i efektywnie współpracować. Narzekały na brak czasu, pomimo że pracowaliśmy nad tym zagadnieniem trzy godziny. Jestem pewna, że wykorzystają zdobyte doświadczenia i w przyszłości makiety będą bardziej precyzyjne.

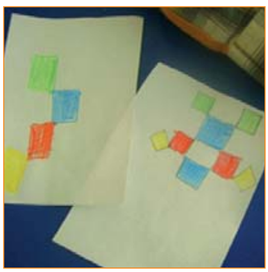
Te zajęcia ostatecznie przekonały mnie, że dzieci uczą się poprzez odkrywanie i manipulowanie. Mogą mylić się, poprawiać, dyskutować, współpracować oraz uczyć się wzajemnie od siebie.

Do czego mogą się przydać sześcienne klocki?

Sześcienne kostki wzbudziły duże zainteresowanie dzieci. Chętnie się nimi bawiły. Na początku układały dowolne budowle i ciągle czuły niedosyt w tym zakresie. Podczas kolejnych zajęć zaproponowałam uczniom, aby zbudowali jakąś konstrukcję z ośmiu klocków. Wyobraźnia dzieci znowu pięknie pracowała. Na poniższych zdjęciach przedstawiam niektóre pomysły. Przy tej okazji Kuba zauważył, że są cztery kolory i z każdego koloru po dwa klocki, to można policzyć za pomocą mnożenia, ile jest klocków. Tymek dopatrzył się innych zależności – skoro ma osiem klocków po dwa w każdym kolorze, to muszą być cztery kolory. I tu zaczęły się rozmowy, co i jak można jeszcze policzyć…

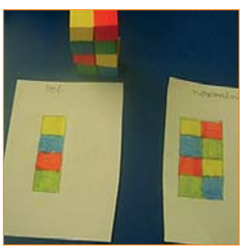
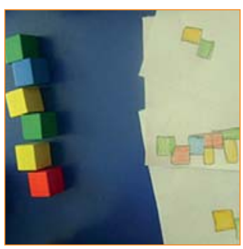


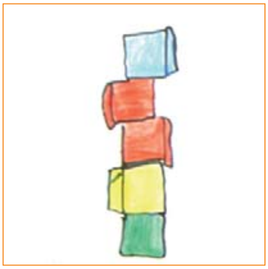
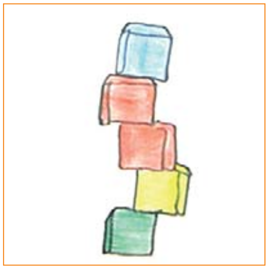
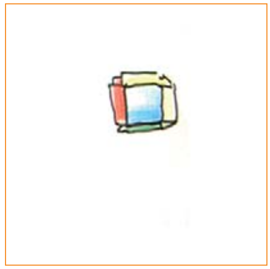


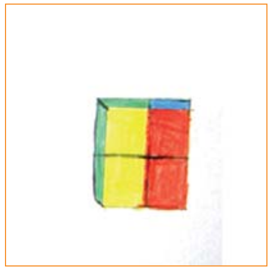
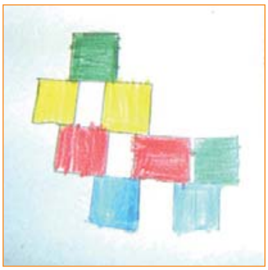
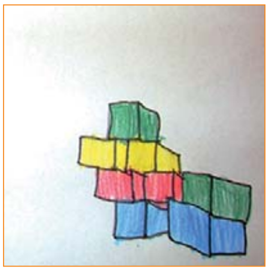
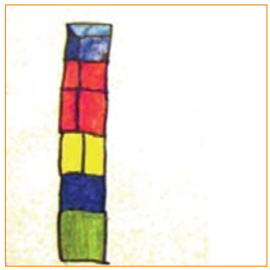
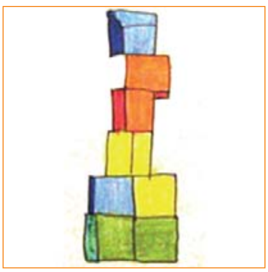


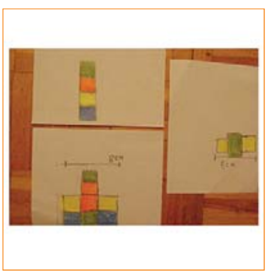
Wracając do dziecięcych konstrukcji, daje się zauważyć, że w niektórych budowlach kostki stykają się całymi ścianami, a w niektórych ułożone są „ukośnie".

Kolejnym zadaniem było narysowanie, jak wygląda ich konstrukcja z przodu, z boku oraz z góry (czyli w trzech rzutach). Każdy rysunek na oddzielnej kartce. Zdjęcia ukazują, jak uczniowie poradzili sobie z tym problemem. Niektóre konstrukcje były bardziej skomplikowane, inne mniej, ale każde dziecko w klasie podjęło tę próbę.

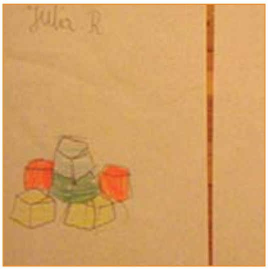



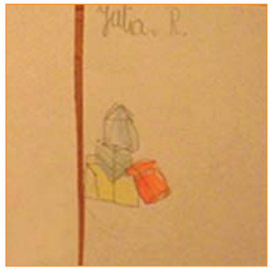
Na uwagę zasługuje fakt, że dzieci potrafią rysować, jak to same określiły, w „3-D". Niektóre rysunki były bardziej zaawansowane zarówno pod względem graficznym, jak i widzenia przestrzennego. Estera nawet zmierzyła szerokości narysowanych rzutów, podała wyniki pomiarów i narysowała dodatkowo odpowiedniej długości odcinki, pomimo iż nie było takiego polecenia. Świadczy to o jej ciekawości poznawczej i dokładności w odbieraniu rzeczywistości. Na rzucie budowli z przodu widać, że zapisała 6 cm. Wnioskuję, że przed rysowaniem zmierzyła też długość ścian klocków, gdyż ścianki sześciennych klocków miały po dwa centymetry, a widać, że trzy klocki ustawione są obok siebie i stykają się całymi ścianami.

Następnie zebrałam wszystkie karteczki i posegregowałam je, dzieląc na trzy grupy (rzuty: 1. z przodu, 2. z boku i 3. z góry). Ogłosiłam kolejne zadanie. Każdy wylosuje rysunek konstrukcji innej osoby, kolejno w trzech rzutach. Trzeba odszukać właściwą budowlę i położyć przy niej kartkę z rysunkiem. Czynność tę powtarzaliśmy trzykrotnie, zgodnie z liczbą grup rzutów, do wyczerpania rysunków. Potem autorzy poszczególnych konstrukcji mieli stwierdzić, czy kartki z rysunkami trafiły odpowiednio do właścicieli.

Ku mojemu ogromnemu zadowoleniu okazało się, że nie było ani jednej pomyłki. Dzieci potrafiły na podstawie narysowanych rzutów rozpoznać daną konstrukcję. Oczywiście muszę nadmienić, że zaczynaliśmy od najłatwiejszego, czyli od rzutu z przodu, potem z boku i na końcu był rzut z góry, który moim zdaniem wnosił najmniej informacji o konstrukcji, a dzieci poradziły sobie i z nim równie dobrze.

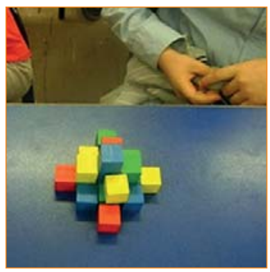
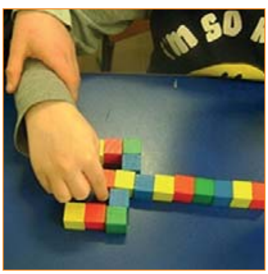
Nazajutrz rozdałam dzieciom komplety rysunków z trzema rzutami danej budowli. Każde dziecko otrzymało rysunki kolegi lub koleżanki, ale nie ze swojej ławki ani najbliższego sąsiedztwa. Poprosiłam, aby dzieci ułożyły te konstrukcje. Nie miały z tym trudności. To zadanie przyniosło wszystkim dużo radości, zadowolenia i satysfakcji.





Po kilku dniach zatęskniliśmy do naszych sześciennych klocków. Przedstawiłam dzieciom rzuty budowli składających się z większej liczby sześcianików. Ponieważ nie dysponujemy tak dużą liczbą kostek, postanowiliśmy, że będziemy pracować w parach. Położyłam na stolikach po pięć kostek w czterech kolorach. Od razu zaczęło się przeliczanie różnymi sposobami (wypłynęło znów mnożenie, a nawet dzielenie). Zaobserwowałam dumę dzieci, gdy podawały trafne propozycje swoich rozwiązań. Dyskutowały przy tym zawzięcie, tłumacząc innym swoje sposoby. Dzieci otrzymały karty[1] z rysunkami oraz polecenie: „Ułóż budowlę, która wygląda tak". Z dużym zaangażowaniem budowały z sześciennych klocków zaprezentowane projekty. Po kilku takich wprawkach same stały się autorami konstrukcji z większej liczby klocków. Forma pracy w parach wpłynęła też na ich pomysłowość.




---

1 Karty opracowane na podstawie Kart zadań do klocków opublikowanych przez firmę Moje Bambino. Wykorzystałam pomoc dydaktyczną Siatki brył i figur geometrycznych.

Po serii zabaw z klockami sześciennymi nadeszła pora na quiz. Poprosiłam jedną osobę, aby ułożyła budowlę składającą się z sześciu sześciennych klocków, po dwa w trzech kolorach. Warunek był taki, że każdy sześcianik miał stykać się z innym co najmniej jedną ścianą. Budowla była ukryta w dość wysokim pudle, żeby inni jej nie widzieli. Dzieci na swoich ławkach miały ułożyć identyczną budowlę. Autor budowli opowiadał o niej, mówił, jak ułożone są klocki. Sformułował opis tej budowli w kilku krótkich zdaniach, aby inni mogli ją zbudować ze swoich klocków. Prowadził klasę tak, aby każdy był w stanie ułożyć ukrytą budowlę. Potem sprawdził poprawność wykonania, a inni mogli wreszcie ujrzeć, co kryło pudełko. Quiz powtórzyliśmy kilkakrotnie, za każdym razem inne dziecko było prowadzącym.

Drugi wariant tej zabawy polegał na tym, że budowlę odtwarzały pięcioosobowe zespoły. Chętna osoba układała w pudełku konstrukcję według własnego pomysłu, tym razem z ośmiu sześciennych klocków, po dwa w czterech kolorach.

Grupy, podobnie jak poprzednio, miały ułożyć identyczną budowlę ze swoich klocków. W tym celu dzieci zadawały prowadzącemu pytania, na które mógł odpowiadać liczbą albo tak lub nie. Ograniczenie polegało na tym, że wszyscy musieli zaakceptować zadane przez uczestnika zabawy pytanie. Następnie dzieci w grupach układały klocki według wskazówek.

Zaobserwowałam, że dzieciom lepiej się pracowało w mniejszych grupach. Pomimo to uważam, że do zabawy trzeba będzie powracać, dając możliwość indywidualnego odtwarzania budowli na podstawie pytań do prowadzącego.

Praca w grupach wpłynęła na sposób komunikowania się dzieci, dzięki takiej formie pracy rozwijały umiejętności interpersonalne. Dziecko dla dziecka jest najlepszym nauczycielem.

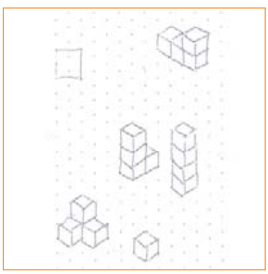
Ta zabawa uczyła między innymi:

- Zadawania konstruktywnych pytań.
- Aktywnego słuchania.
- Myślenia przyczynowo-skutkowego.
- Wnioskowania i argumentowania.
- Dostrzegania sprzeczności.
- Przestrzegania zasad i wreszcie rozwijała wyobraźnię przestrzenną.

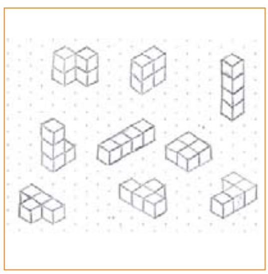
Na kolejnej lekcji zaproponowałam dzieciom ćwiczenia służące rozwijaniu wyobraźni przestrzennej. Najpierw miały ułożyć dowolną budowlę z czterech sześciennych kostek. Następnym zadaniem było rysowanie tej budowli na kartce z kropkami, gdzie, oczywiście, kropka oznaczała wierzchołek bryły. Niektóre dzieci szybko sobie poradziły, inne musiały dłużej pomyśleć. Wszystkie zauważyły, że powstają rysunki w wymiarze „3-D". Tego typu zajęcia muszą być koniecznie powtórzone. Dzieciom bardzo spodobało się rysowanie na kartce w kropki.

Po wielu próbach powstały poniższe prace:

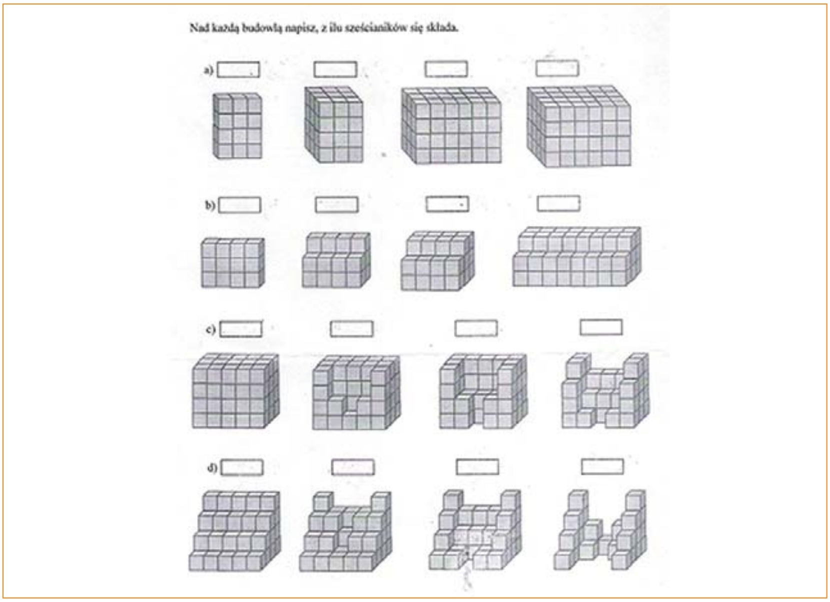
Praca Magdy



Praca Eweliny

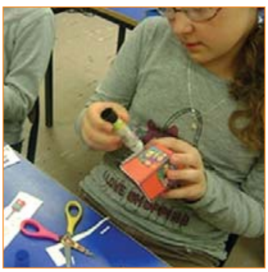


Następnie dzieci otrzymały rysunki budowli z karty, z którą sama pracowałam na spotkaniu w ramach „Bąbla matematycznego". Budowle składały się z klocków sześciennych. Należało ustalić, z ilu sześcianików były zbudowane.



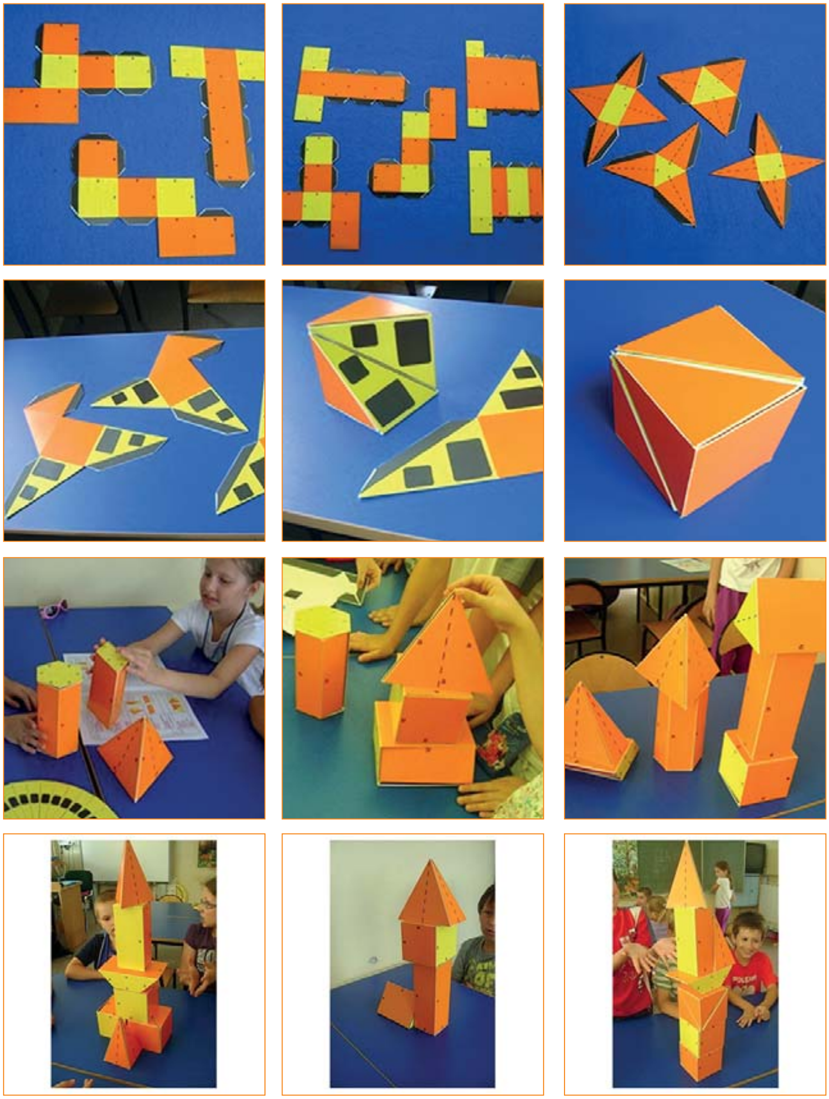
Podzieliłam to zadanie na cztery poziomy, dając dzieciom możliwość wyboru stopnia trudności.

W swej pracy korzystam z elementów oceniania kształtującego. Stosuję zasadę, że „mocny" pomaga „średniemu", a „średni" „słabemu". Ostatnio modny jest w naszej klasie układ naukowy: „ekspert i uczeń". Został on zaakceptowany przez dzieci, a jego nazwa funkcjonuje w ich słowniku. Dzięki temu dzieci: uczą się od siebie wzajemnie, tłumaczą sobie zawiłości swoim językiem, budują pozytywne relacje koleżeńskie. Nauczyciel zaś podczas tak zorganizowanej pracy na lekcji ma możliwość wspierać uczniów, którzy w danym momencie potrzebują jego pomocy najbardziej.



Tuż przed zakończeniem roku szkolnego rozmawialiśmy o bezpieczeństwie w czasie wakacji. Zwieńczeniem była praca plastyczno-techniczna „wagonik kolejki wysokogórskiej". Dzieci miały za zadanie wyciąć siatkę prostopadłościanu i skleić według instrukcji, aby powstał wagonik. Słowo „prostopadłościan" na razie nie padło, ani ode mnie, ani w instrukcji. Dzieci zabrały się do pracy. Wycięły, złożyły na liniach zgięcia „skrzydełka" do sklejenia, uformowały prostopadłościan, skleiły. W trakcie pracy wiele osób zauważyło i zaczęło zgłaszać, że ten wagonik ma kształt podobny do kostki do gry, ale nie wszystkie boki wagonika są kwadratowe. Zaczęliśmy się nad tym głębiej zastanawiać. Jeden z chłopców zauważył, że wszystkie ściany są prostokątne, tylko że różnią się wielkością. Dopiero po tych wnioskach zapoznałam ich z nowymi słowami: „prostopadłościan" i „siatka prostopadłościanu". Obiecałam im również, że poznają nazwy jeszcze innych brył, ich siatki, czyli jak wyglądają bryły „po rozłożeniu".

Na kolejnych zajęciach dzieci oglądały i porównywały złożone bryły. Pytały o ich nazwy. Liczyły, ile jest ścian oraz ustalały, jakiego są kształtu. Świetnie odnalazły modele sześcianu i prostopadłościanu. Stwierdziły, że z nich też można budować.

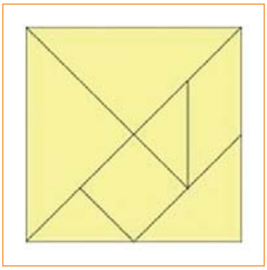


Nauka geometrii dla małego dziecka to manipulowanie różnymi przedmiotami, badanie ich właściwości, eksperymentowanie. Podczas zabawy, na przykład pudełkami, klockami obserwują ich kształt, wielkość, kolor, materiał i jego fakturę. Moim zamiarem było dostarczenie dzieciom jak najwięcej takich sposobności, aby zdobywały doświadczenia w eksperymentowaniu z otaczającą je rzeczywistością.

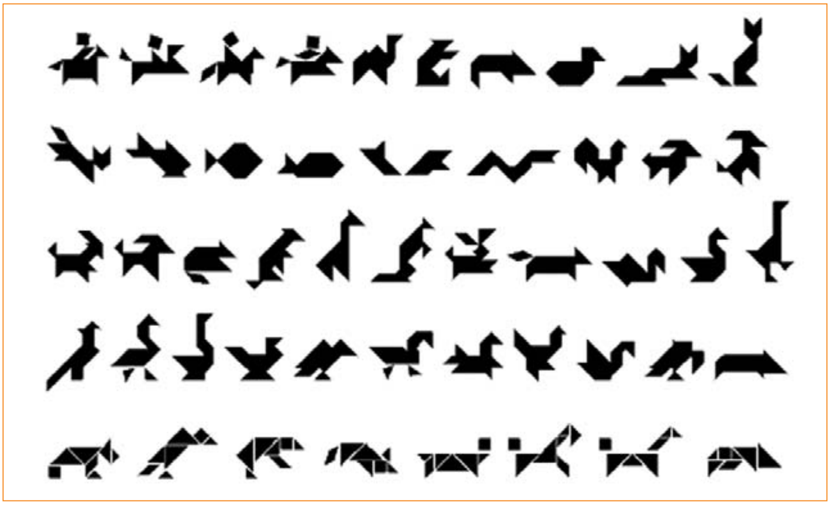
Mam świadomość i głębokie przekonanie, że umożliwiłam dzieciom rozwijanie zdolności geometrycznych, które w odpowiednim czasie będą mogły nazwać i uporządkować, odwołując się do wcześniejszych przeżyć.

Tangram, czyli słów kilka o geometrii płaskiej

Geometria to nauka empiryczna. Dbałam więc o to, aby dzieci mogły jak najczęściej manipulować różnymi przedmiotami. Zaproponowałam dzieciom zabawę z tangramem, który rozwija myślenie, wyobraźnię, spostrzegawczość, wnioskowanie.



Rozdałam dzieciom kolorowe karteczki w kształcie kwadratu o wymiarach 10 cm × 10 cm. Założyłam sobie, że każdy uczeń będzie potrafił rozciąć kwadratową kartkę według moich poleceń na siedem części. Okazało się, że nie wszyscy sobie poradzili. Wpłynęło na to duże zróżnicowanie w zakresie skupienia uwagi na poleceniach ustnych, umiejętność aktywnego słuchania, poziom grafomotoryki, liczebność klasy. W związku z zaistniałymi problemami postanowiłam, że skorzystamy z gotowej pomocy. Były to plastikowe klocki tangram.
Pierwsza zabawa polegała na ułożeniu wybranego obrazka według wzoru, który „nie mówił", gdzie umiejscowić poszczególne elementy[2].

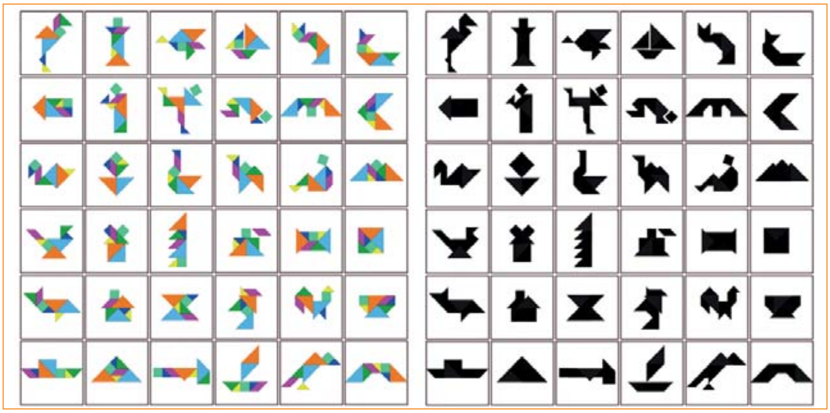


Zasady były takie:
- Używamy wszystkich siedmiu części.
- Klocki powinny się stykać.
- Klocki nie mogą się nakładać.

Wzory w ostatniej linii są „rozciągnięte", a więc łatwiejsze do ułożenia. Jednak nie informowałam o tym dzieci. Każdy miał prawo wyboru obrazka, który chciał ułożyć. Zachwyciło mnie, że wszystkie dzieci to zauważyły, jedne wcześniej, inne później. Chętne i szybkie w działaniu osoby mogły układać po kilka obrazków. Zauważyłam, że dzieci były pochłonięte pracą, dały się wciągnąć w tę łamigłówkę geometryczną. Nie wszystkim od razu wychodziły wzory, ale pracowały i gimnastykowały swój umysł do skutku.

Niestety, nie każdy odniósł sukces podczas tych zajęć. Czasami przeszkodą był zbyt wysoki poziom motywacji, zdenerwowanie albo brak zainteresowania. Dlatego zdecydowałam, że następnego dnia będziemy dalej bawić się tangramem. Przygotowałam dla każdego wzory z samokontrolą. Po jednej stronie kartki był wzór, a po drugiej rozwiązanie – każda część tangramu w innym kolorze. To sprawiło, że wszyscy włączyli się do zabawy. Z podpowiedzi korzystali tylko nieliczni uczniowie.

[2] Wzory zaczerpnięte z Internetu (obrazy dla hasła: tangram animals).



Wyraźnie widoczne było zainteresowanie i zachwyt dzieci tangramem. Zaplanowałam kolejne zajęcia z tej serii. Tym razem dzieci układały swoją zagadkę – wzór do ułożenia. Przy jej układaniu obowiązywały zasady podane wcześniej. Następnie należało obrysować ułożony obrazek bez używania linijki, pokolorować go oraz nadać mu nazwę. Zagadka nie mogła w żaden sposób niczego podpowiadać, wszystkie elementy układanki musiały się stykać. Uczniowie bardzo chętnie i z radością przystąpili do pracy. Wykazali się przy tym ogromną pomysłowością.






Prace zostały wyeksponowane w klasowej galerii. Po ich obejrzeniu dzieci wybierały po jednej i układały z 7 części tangramu na stolikach.

Dziecko podczas zabawy uczy się skuteczniej. Aktywny uczeń bada i dostrzega związki, buduje struktury, wiąże z tym, co już ma w pamięci trwałej i korzysta z nabytych doświadczeń.

Sylwia Brzyska
Nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Bydgoszczy. Wychowawczyni klasy II a, w której dzieci rozpoczęły swoją przygodę ze szkołą jako 6-latki. Miłośniczka matematyki i nowatorskich metod w pracy z maluchami; w zawodzie 19 lat.

JESTEM Z CIEBIE DUMNA... JAK BUDUJĘ MOTYWACJĘ DO UCZENIA SIĘ I POCZUCIE WŁASNEJ WARTOŚCI MOICH UCZNIÓW NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Dominika Giezek

Jestem nauczycielką edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 63 w Bydgoszczy, w roku szkolnym 2012/2013 uczę klasę drugą. Lubię nowości i wyzwania. Ważne jest dla mnie **kształtowanie u uczniów wewnętrznej motywacji do nauki matematyki**, wynikającej z ich naturalnej ciekawości, chęci poszukiwania informacji, obserwacji, formułowania hipotez i udzielania własnej odpowiedzi.

Wiadomo, że ludzie dorośli potrzebują odpowiedniej motywacji, aby dać z siebie wszystko i nie jest ważne, jakiej dziedziny życia to dotyczy. Dzieci w tej dziedzinie wcale się od nas nie różnią. Motywacja jest jak silnik napędzający samochód. Paliwem zaś i kluczem do sukcesu jest wytrwałość, wysoka samoocena oraz pewność siebie.

Małe dzieci podchodzą do świata z naturalną ciekawością i chęcią eksperymentowania. Same z siebie chcą nauczyć się liczyć czy poznać skomplikowane nawet relacje i symbole. Uczniowie kochają rozwiązywać zagadki i problemy, mierzyć i obliczać. Niestety często zakładamy, iż rozpoczynają naukę prawie jako czyste karty, bez jakichkolwiek doświadczeń matematycznych. Na początku pierwszej klasy uczymy je, czym jest liczba 1, do końca pierwszej klasy liczą w zakresie 10. Od nas nauczycieli zależy zatem, czy podejście dzieci do matematyki diametralnie się nie zmieni. Musimy zapobiec, aby nie stała się dla nich nudną i pełną niezrozumiałych zasad nauką, zupełnie niepowiązaną z rzeczywistością. Dlatego tak ważne jest, aby pokazać uczniom, iż nauka **matematyki może być przyjemna!**

W literaturze pedagogicznej podkreśla się, że w procesie uczenia się bardzo ważna jest **postawa uczniów wobec poznawanych treści**. W codziennej pracy również przekonałam się, że uczniowie chętniej podejmują wysiłek intelektualny, gdy widzą cel swojej pracy, wiedzą, po co się uczą i gdzie będą mogli wykorzystać poznane wiadomości i umiejętności. Dlatego na zajęciach, nie tylko matematycznych, **staram się realizować założenia oceniania kształtującego**. Angażuje ono uczniów w proces uczenia się i motywuje ich do większego wysiłku. Jego założenia wzmacniają także samoocenę uczniów.

Chcąc poznać zdanie uczniów, w grudniu 2012 roku przeprowadziłam w swojej klasie ankietę dotyczącą zajęć matematycznych. Mimo postawionego na wstępie warunku, że ankieta jest anonimowa, niektórym dzieciom bardzo zależało na tym, aby się podpisać na arkuszu. Myślę, że w ten sposób chcieli mi przekazać swoje opinie i odczucia dotyczące matematyki i mieć pewność, że je uwzględnię w swojej pracy.

Dla Julii, która lubi matematykę i uważa, że jest w niej dobra, dotychczasowe lekcje matematyki były nudne i nie sprawiały jej przyjemności. Zdecydowałam, iż Julia wymaga zadań znacznie wykraczających poza program nauczania przewidziany w klasie drugiej. Widoczne to było, gdy dałam jej możliwość wykazania się swoimi wiadomościami i umiejętnościami (dalej omówiony przykład z kostkami: A mogę pomnożyć? 21 × 5 = 105).

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.	✓		
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.		✗	
3. Jestem dobra(y) w matematyce.	✗		
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.		✗	
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.			✓
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	✓		
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.	✓		
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.	✓		

Dla odmiany, Seweryn zdecydowanie nie lubi matematyki, na dodatek uważa, iż nie jest w niej dobry. Jego zdaniem, umiejętności matematyczne są jednak ważne w życiu. Lubi uczyć się matematyki poprzez zabawę: grać w gry planszowe i karty, rozwiązywać matematyczne łamigłówki. Starałam się więc wpłynąć na motywację i samoocenę chłopca.

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.		✓	
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.		✓	
3. Jestem dobra(y) w matematyce.		✓	
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.		✓	
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.		✓	
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	✓		
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.	✓		
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.	✓		

Wszyscy ankietowani przeze mnie uczniowie podkreślali, iż umiejętności matematyczne są ważne w życiu. Większość z nich zaznaczyła, iż lubi matematykę, wszyscy lubią rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.	20	1	-
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.	16	4	1
3. Jestem dobra(y) w matematyce.	18	1	2
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.	5	15	1
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.	17	2	2
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	21	-	-
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.	4	16	1
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.	21	-	-

Badanie przeprowadzono w dniu 21.12.12 na 21 spośród 26 uczniów klasy 2b.

Na początku stycznia przeprowadziłam także wywiad z uczniami. Zadałam im następujące pytania:

1. *Co Ci się najmniej podoba w matematyce?*
2. *Co lubisz robić na zajęciach matematycznych w szkole?*
3. *Czy kiedykolwiek miałaś(eś) przykre doświadczenia z matematyką? Jeśli tak, to co się stało?*
4. *Podaj przykład, jak używasz matematyki poza klasą/szkołą.*
5. *Co według Ciebie mogę zrobić, aby pomóc Ci uczyć się matematyki?*
6. *Co Ci przeszkadza w uczeniu się matematyki?*

Odpowiedzi były zróżnicowane, w zależności od respondenta, który albo lubił albo nie lubił *dodawać, odejmować i rozpisywać*. Pojawiły się także odpowiedzi wskazujące na to, że uczniowie lubią *bawić się klockami Numicon i robić różne zadania matematyczne*. Dzieci właściwie nie mają przykrych doświadczeń związanych z matematyką, opisują jedynie sytuacje związane z pracą w grupie: *Bo często jak coś rysujemy, ktoś nie pozwala nam tego robić* (ilustracje do zadań matematycznych); *Ja jeszcze nie lubię, jak się kłóciliśmy, jak przyklejaliśmy* (geometryczne królestwo). Nie rodzimy się z umiejętnością pracy w grupie, wszystkie dzieci muszą się jej nauczyć. Tylko ciągłe organizowanie im okazji do współpracy sprawi, że będę potrafiły się porozumieć.

Co według dzieci mogę zrobić, aby pomóc im w nauce matematyki? – *Tłumaczyć, jeśli czegoś nie rozumieją, nauczyć wszystkiego, czego nie wiedzą (w tym mnożenia), pokazywać różne rzeczy na tablicy interaktywnej, takie „zabawowe"*. Pokazuje to, z jednej strony, ich chęć nauczenia się czegoś nowego, z drugiej – ujawnia przekonanie, że matematyka jest czymś trudnym, co należy im wytłumaczyć i do czego nie mogą dojść samodzielnie.

W uczeniu się matematyki dzieciom przeszkadzają:, np. *krzyki, hałas, samolot, helikopter, przesuwanie ławki, jak ktoś do mnie gada, szturchanie, szuranie krzesłem, podpowiadanie, jak chłopacy mówili, że coś źle robię.*

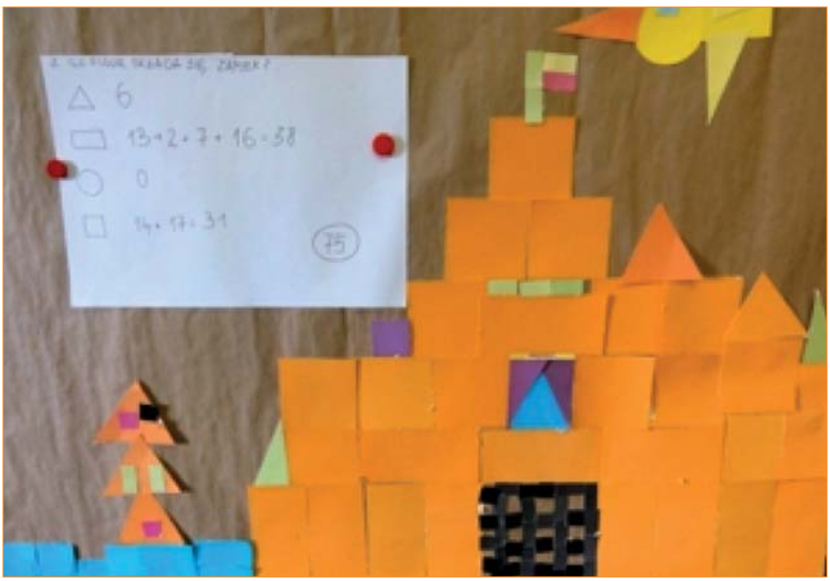
Aby wyjść naprzeciw potrzebom dzieci, w czasie zajęć stosowałam **różnorodne formy pracy** (np. indywidualną i grupową, która stwarza uczniom okazję do wspólnej nauki i zabawy oraz pozwala wcielić się w rolę ekspertów), metody umożliwiające **samodzielne dochodzenie do wiedzy** (np. gry dydaktyczne, metodę projektu, metody aktywizujące i problemowe) oraz zasadę **stopniowania trudności**. Spróbowałam zorganizować uczniom podróż w świat matematyki, wypełniając ją bogatymi doświadczeniami, które pozwalały dzieciom zdobywać matematyczne umiejętności. Oto niektóre z tych doświadczeń.

Dzieci tworzyły w grupach ośmioosobowych **własne geometryczne królestwa**, które stały się później podstawą do formułowania zadań z treścią. Z figur geometrycznych dzieci układały prawdziwe dzieła sztuki. *Zobaczcie motylek ciągnie latawiec… Dziewczyny, mam pomysł: ważka... Zobacz, jaka malutka ważka i wielki motyl, bo ważki są malutkie… Zobaczcie, mamy gwiazdeczkę… Pterodaktyle lecą...*

Poza utrwaleniem figur, bez wątpienia dzieci liczyły: *Mamy 16, jeszcze 4 i będziemy mieć 20, bo 20 nam potrzeba*. Uczyły się pracy w grupie i wzajemnego wspierania: *Potrzebujemy kilka kwadratów, możemy się wymienić?* Rozmowy między dziećmi w trakcie wykonywania zadania są dowodem na to, iż uczenie się matematyki może być przyjemne i sprawiać radość.

Po przerwie świątecznej dzieci pracowały w parach, potem w czwórkach, a następnie na forum klasy kompletowały w trakcie prawdziwej burzy mózgów zestaw pytań, które można zadać, przyglądając się jednej z powstałych prac – uzyskaliśmy bardzo długą i ciekawą listę.

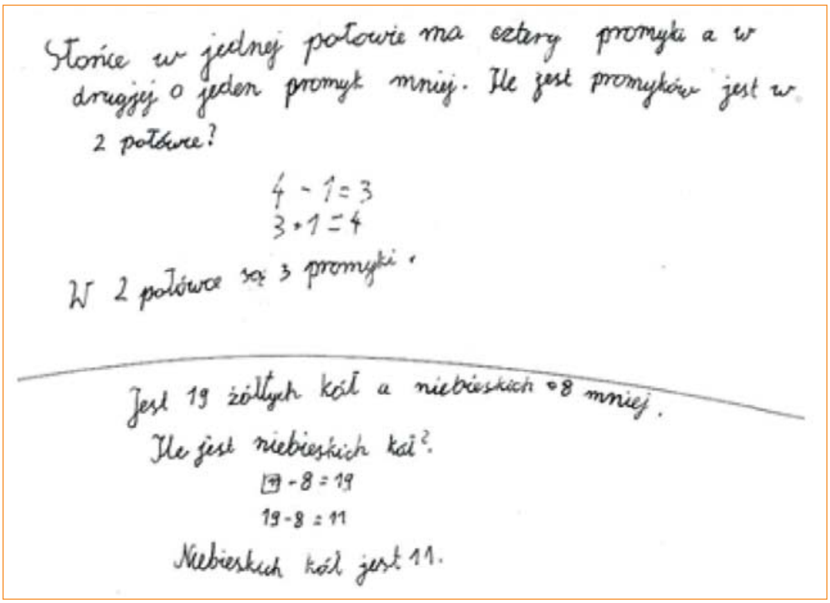
Uczniowie byli bardzo zaangażowani w wykonanie tego zadania. Pytania różniły się między sobą m.in. stopniem trudności, np.: *Ile jest okien w zamku? (1); Ile jest choinek? (2); Ile jest chmurek? (5); Ile jest czarnych kwadratów? (20); Ile jest kwadratów? (40); Ile jest trójkątów i kwadratów? (72); Z ilu figur składa się zamek? (75)*. Łącznie było prawie 40 pytań.



Następnie dzieci udzielały na nie odpowiedzi. Zadanie ciekawe, lecz trudne do przeprowadzenia z całą klasą, np. zaangażowanych w rozwiązanie jednego z trudniejszych zadań (policzenie figur, z których składa się zamek) było tylko kilka osób, nieliczni uważnie się przysłuchiwali. Niestety, reszta klasy zaczęła przeszkadzać, stąd przerwaliśmy ćwiczenie, nie udzieliwszy odpowiedzi na wszystkie pytania. Ucieszył mnie jednak fakt, że uczniowie potrafili ułatwić sobie wykonanie zadań, dzieląc figury i licząc je ze względu na kolor i kształt.

Do pytań wróciliśmy dwa dni później. Poprosiłam dzieci, aby zastanowiły się, które z nich można było pominąć, ponieważ odpowiedź widać na pierwszy rzut oka. Dzięki temu, przy pracy nad drugim plakatem pytania oczywiste zostały pominięte. Dzieci samodzielnie, w parach lub małych grupach spisały wybrane pytania. Tym razem jednak, aby w jednakowym stopniu zaangażowały się w rozwiązywanie powstałych zadań, każdy zespół od razu zapisywał zarówno pytania, jak i odpowiedzi.

Dzieci starały się zliczyć po kolei wszystkie elementy na obrazku: koła, kwadraty, prostokąty, trójkąty – z osobna, jak i łącząc je ze sobą w przeróżne zestawienia. Zastanawiały się nad tym, *ile jest wszystkich elementów*, a nawet *ile jest wszystkich elementów razy dwa!* Pojawiły się zarówno zadania tekstowe na porównywanie różnicowe, jak i zadania z „okienkiem".



Słońce w jednej połowie ma cztery promyki a w drugiej o jeden promyk mniej. Ile jest promyków jest w 2 połówce?

4 - 1 = 3
3 + 1 = 4

W 2 połówce są 3 promyki.

Jest 19 żółtych kół a niebieskich o 8 mniej.
Ile jest niebieskich kół?

$\boxed{19} - 8 = 19$
19 - 8 = 11

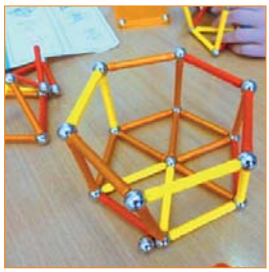
Niebieskich kół jest 11.

Starałam się tak organizować zajęcia matematyczne, by **wyzwolić w dzieciach ciekawość**, aby nauka stała się dla nich atrakcyjną zabawą i prawdziwą przygodą. Stąd stała obecność na zajęciach mniej czy bardziej skomplikowanych gier.

Pewnego dnia zorganizowaliśmy w klasie grę w wojnę. Zasady gry są proste: do gry wybieramy karty z tej samej talii od 1 (as) do 10. Uczeń kładzie przed sobą dwie karty, oblicza sumę liczb na kartach i porównuje swój wynik z wynikiem kolegi. Karty bierze ten, którego wynik działania jest większy. Wygrywa ten, kto zbierze wszystkie karty. Czy ktoś widział, aby dzieci się tak cieszyły, ćwicząc dodawanie w zakresie 20?

Rozwiązywaliśmy różne **matematyczne łamigłówki**, np. z wykorzystaniem jednogroszówek.

Bawiliśmy się **geomagami**. To bardzo interesująca zabawka edukacyjna, oparta na fizycznych właściwościach magnesu. Łącząc magnetyczne pałeczki z kulkami, można budować trójwymiarowe obiekty i przedmioty. Pierwsze próby odbywają się z wykorzystaniem schematycznej instrukcji, uczą więc umiejętności czytania rysunków.



Dzieci same zaczęły konstruować modele i bryły, co rozwijało ich wyobraźnię przestrzenną oraz kreatywność.

Musiałam uwierzyć, że **wszyscy uczniowie mogą się nauczyć matematyki**, nawet jeśli doświadczają trudności. Zdałam sobie też sprawę, że nie każda droga jest prosta i oczywista. Czy warto więc wtłaczać dzieci w schematy, jeśli myślą troszkę inaczej niż my dorośli?

Zorganizowałam szereg lekcji w oparciu o planszę 100 pól, z wykorzystaniem transparentnych liczmanów matematycznych w kształcie kwadratów oraz kostek do gry (tradycyjnych lub wyświetlanych przeze mnie na tablicy interaktywnej). Na jednej z lekcji moi uczniowie starali się w parach wypełnić planszę. Warunkiem było korzystanie wyłącznie z prostokątów. Wygrywała pierwsza para, która tego dokonała.

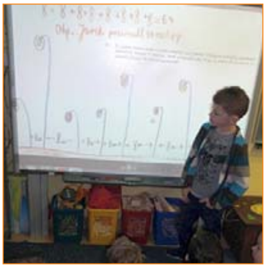
Uczniowie zapisywali na kartkach działania odpowiadające kombinacjom wyrzuconych kości (mogli dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić), dzięki czemu mogłam później zweryfikować ich pracę i omówić z dziećmi poszczególne przykłady. Do zadania podchodziliśmy trzykrotnie. Za trzecim razem wyłoniliśmy dwie zwycięskie pary.
Dla nas dorosłych uczących matematyki 4×4 oznacza 4 rzędy po 4 elementy. Okazało się, iż dzieci myślą inaczej, dla nich to np. prostokąt 2×8, 4 czwórki parami koło siebie. Pierwszą moją myślą było: ale tak nie można! Po chwili jednak uznałam: właściwie dlaczego nie? Dzięki takiemu podejściu dzieci odniosły sukces w rywalizacji grupowej! To z pewnością budowało ich poczucie własnej wartości.

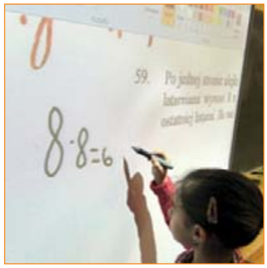
Dałam uczniom, na miarę ich możliwości, **okazję do uzyskania pozytywnych wyników w nauce**. Nie oznaczało to wcale obniżenia wobec nich wymagań. Wręcz przeciwnie – miałam w stosunku do nich wysokie wymagania, jednocześnie jednak zapewniałam im większe wsparcie, niezbędne, aby mogły sprostać tym wyższym standardom. Starałam się również budować wiarę uczniów we własne możliwości poprzez czynienie matematyki zrozumiałą – stosując metody nauczania zapewniające odniesienie sukcesu przez każdego ucznia. Pozwalałam dzieciom manipulować, działać na konkretach, aby każdy uczeń mógł się rozwinąć. Tomek mający kłopoty z rozwiązywaniem zadań tekstowych, w ramach zajęć indywidualnych rozwiązał następujące zadanie tekstowe: *W koszyku Ani jest 6 grzybów, a w koszyku Sławka o 5 grzybów więcej*. Zadaniem chłopca było ułożenie pytania do zadania oraz podanie rozwiązania. Tomek sformułował następujące pytanie: *Ile jest razem grzybów?* i bardzo szybko na nie odpowiedział: *Jedenaście.*

Po prostu spojrzał na liczby w zadaniu i je dodał. Jednak po analizie zadania oraz ułożeniu liczmanów sam szybko doszedł do tego, iż 11 to liczba grzybów Sławka. Widząc układ liczmanów, bez problemu napisał oba potrzebne działania i uzyskał właściwy wynik, a więc 17. Myślę, że konkret okazał się bardzo pomocny.

Liczby parzyste i nieparzyste

Dzieci miały również możliwość wykonywania zadań domowych dla chętnych, **daleko wykraczających poza** realizowany program (np. zwiększony zakres liczbowy lub zadania zwykle oznaczone w książkach kaktsem, supełkiem itp. lub występujące na konkursach matematycznych) oraz zaprezentowania ich pozostałym uczniom w klasie. Często dzieci proponowały własną formę zapisu rozwiązania, np. tylko za pomocą rysunku.

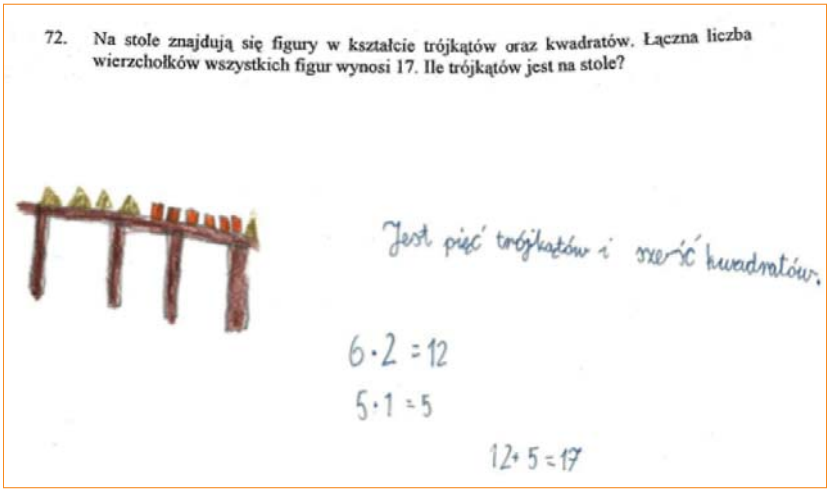




Dzięki analizie zadań na lekcji do pracy nad ich rozwiązaniem włączani byli także inni uczniowie. Wiktoria zaproponowała zastąpienie działania

8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 64, czyli 8 x 8=64

Oczywiście pojawiały się również zadania błędnie rozwiązane.



72. Na stole znajdują się figury w kształcie trójkątów oraz kwadratów. Łączna liczba wierzchołków wszystkich figur wynosi 17. Ile trójkątów jest na stole?

Jest pięć trójkątów i sześć kwadratów.

$6 \cdot 2 = 12$

$5 \cdot 1 = 5$

$12 + 5 = 17$

Daje to okazję do dalszej analizy i wspólnego szukania poprawnego rozwiązania. Powyższe zadanie rozwiązywał Mateusz, który na pytanie, ile wierzchołków ma trójkąt, a ile prostokąt, potrafił podać właściwą odpowiedź. To pytanie wystarczyło, aby bardzo szybko rozwiązał poprawnie to zadanie.

Piotruś poproszony o zaprezentowanie swojego zadania od razu stwierdził, że popełnił w nim błąd, dodając do siebie wszystkie jabłka. Bez trudu wyjaśnił, skąd wzięły się poszczególne liczby i zakończył swoją wypowiedź stwierdzeniem, iż: W sobotę Fela zerwała 31 jabłek.

Takie sytuacje uświadomiły również innym uczniom, iż mają **prawo do błędów**. Ważne jest, aby się na nich uczyć. Moją rolą było natomiast nie wskazywanie ich, ale umożliwienie uczniom uczenie się metodą prób i poprawek. Uczyłam ich wytrwałości, wysiłku w drodze do sukcesu oraz doboru właściwych, ale też własnych strategii rozwiązywania zadań. Błędy uczniowskie są często spowodowane wyborem złej strategii lub zniechęceniem się ucznia, a nie brakiem możliwości czy umiejętności. Jeśli dana strategia rozwiązywania problemu się nie powiedzie, uczeń powinien wiedzieć, że może wypróbować inną taktykę.

Korzystaliśmy także z różnych **gier strategicznych**. W jednej z nich należało naprzemiennie kolorować koła, wygrywała osoba, która pokolorowała trzy sąsiadujące.

Uczniowie bardzo szybko nauczyli się blokować przeciwnika, doprowadzając tym samym do remisu, w związku z tym po kilku rozgrywkach zakończyliśmy grę.

Za każde dobrze rozwiązane zadanie i drobne postępy w nauce **chwaliłam swoich uczniów**. Wystarczył uśmiech, pochwała słowna, wyrażenie mojego zadowolenia w formie pieczątki, które stosuję i polecam, np.: *Jestem z Ciebie dumna, Praca na medal*.

Stosowałam także ocenę opisową dostarczającą uczniowi informacji, jakie są mocne i słabe strony sposobu wykonanego zadania. Dzięki temu uczniowie mogli uwierzyć w swoje możliwości i dostrzec sens uczenia się (nie tylko matematyki). Stosowanie **informacji zwrotnej i NACOBEZU** (na co będę zwracała uwagę np. na sprawdzianie) służyło wzmocnieniu tradycyjnej oceny opisowej.

Moje doświadczenia potwierdzały, że dzieci uczą się szybciej, gdy mogą połączyć **pojęcia matematyczne z własnymi doświadczeniami**, dzięki temu chętniej podejmują wysiłek intelektualny. Starałam się o tym pamiętać. W ramach programu eTwinning (program umożliwiający współpracę szkół z wykorzystaniem Internetu) realizowaliśmy projekt „ICT in my classroom – Show me what you do with ICT in your classroom... I show you my!". Dzieci zdecydowały, iż głównym tematem działań będą nasze zwierzęta. Powstały wykresy i tabele obrazujące zarówno wybór tematu projektu, jak i pokazujące liczbę poszczególnych zwierząt w klasach partnerskich. W oparciu o nie uczniowie wymyślali zadania dla swoich rówieśników. Oto ich przykłady:

Tabela – liczba zwierząt w krajach partnerskich

Ile jest wszystkich zwierząt w polskiej klasie?
Ile jest wszystkich zwierząt?
Ile jest razem wszystkich kotów, psów i żółwi?
Ile jest razem psów, kotów, rybek, żółwi, królików, węży i myszy?

English	polski	slovenský	português	How many children?		
a dog	pies	pes	cão	12	7	12
a cat	kot	mačka	gato	4	7	5
a guinea pig	świnka morska	morča	porco da india	1	0	1
a hamster	chomik	škrečok	hamster	1	1	0
a fish	rybka	rybka	peixe	7	4	3
a rat	szczur	potkan	rato	1	0	0
a stick insect	patyczak	pakobylka	inseto	1	0	0
a turtle	żółw	korytnačka	tartaruga	0	4	0
a rabbit	królik	zajačik	coelho	0	3	6
a bird	ptak	vták	pássaro	0	3	7
a snake	wąż	had	cobra	0	2	0
a mouse	mysz	myš	rato	0	4	0

Wykres – wybór tematu projektu (rozkład liczby głosów)

Ile głosów oddano na zwierzęta?
Ile głosów oddano, wybierając temat projektu?
Ile głosów mają razem zwierzęta i kosmos?
Ile głosów mają razem zwierzęta i taniec?

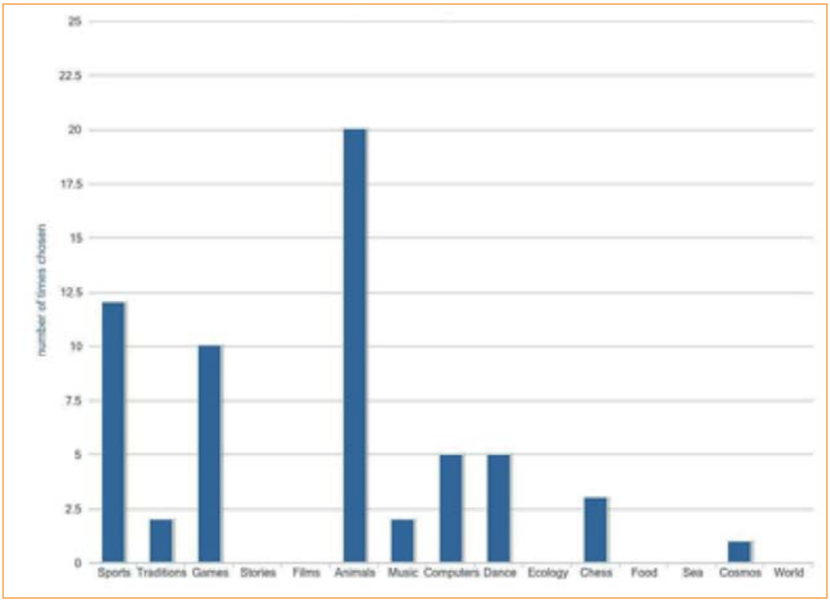
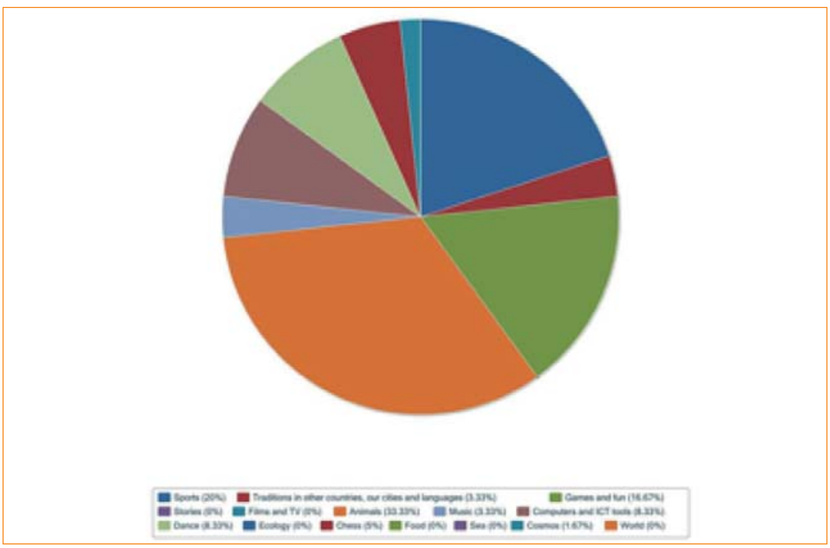


Diagram – rozkład procentowy oddanych głosów

O ile więcej procent zdobył taniec od szachów?
Ile procent zdobyły razem zwierzęta i sport?
Okazało się, że dzieci w klasie drugiej bez większego kłopotu wykonywały działania na procentach!



Korzystaliśmy także z kształtów Numicon, które świetnie pozwalają dzieciom zrozumieć pojęcie liczby oraz dostrzec związki zachodzące pomiędzy liczbami. Doskonaliliśmy na przykład umiejętność mnożenia i dzielenia w zakresie 36, grając w grę „kto pierwszy wypełni planszę?" (dwie kostki do gry oraz plansza z kształtami).

Poniżej moja propozycja gry „Numicon – pająk". Gracze kolejno rzucają kostkami, dodają do siebie obie wylosowane liczby. Mogą zakryć dwie inne liczby, których suma wynosi tyle, ile suma wyrzuconych oczek. Do obliczeń mogą używać kształtów Numicon. Np. jeśli gracz wyrzuci 4 i 5, których suma wynosi 9, może przykryć 1 i 8 albo 3 i 6. Nie wolno odkrywać wcześniej zakrytych pól. Gracze kontynuują grę, dopóki któryś z graczy nie może wykonać ruchu; druga osoba wygrywa.


Pamiętałam, iż **nieodzownym elementem dzieciństwa jest zabawa**, która umożliwia dziecku jednocześnie wzrost i rozwój w sposób holistyczny. Bawiliśmy się więc w matematyczne zabawy ruchowe, np. „Żywe liczby" – zabawa jakże pełna matematyki. Uczniowie otrzymali koszulki z liczbami 0–24, mieli się najpierw ustawić w kolejności rosnącej, później malejącej. Następnie szukali osoby, która ma liczbę większą od ich liczby o dwa, trzy, cztery czy o pięć. Ostatnim zadaniem było utworzenie grup, których suma wynosi 24. Świetna zabawa ruchowa wymagająca także uruchomienia szarych komórek. Pojawiły się ciekawe problemy i spostrzeżenia.

Dzieci szybko się przekonały, że szukając liczby o dwa większej, podzieliły klasę na dwie grupy, które potrafiły nazwać: parzyste i nieparzyste.

Szukając liczby o 3 większej odkryły, iż podzieliły się na 3 grupy, w których liczby parzyste i nieparzyste występowały naprzemiennie.

Potrafiły sformułować hipotezę, jak to będzie w przypadku poszukiwania liczby o 4 lub 5 większej, którą zweryfikowały i oczywiście miały rację. Julia C. bez chwili wahania stwierdziła, iż w przypadku poszukiwań tej ostatniej, klasa podzieli się na 5 grup, a grupy będą naprzemienne: parzysta, nieparzysta, np. 5, 10, 15, 20.

Chłopcy, którzy mieli najwyższe liczby, bardzo szybko powiedzieli, iż nie znajdą liczby od siebie większej np. o 4 większej od, lecz na pytanie, czy to oznacza, iż Bartek nie będzie się miał kogo złapać, chłopiec odpowiedział, że *wcale nie – będzie go szukała liczba o 4 mniejsza od niego, czyli 17.*

Naszym placem zabaw była również **plansza 100 liczb**, na której pionkami stali się sami uczniowie. Podzieliłam dzieci na dwie grupy. Każdy z zespołów starał się jako pierwszy postawić swoje trzy „pionki" koło siebie – pionowo, poziomo lub na ukos. Dzieci mogły wybierać pola będące wynikiem dodawania, odejmowania, mnożenia lub dzielenia dwóch uzyskanych na kostkach liczb (0–10 oraz joker zastępujący każdą liczbę).

Innym razem w czasie wyjścia na boisko szkolne grupa chłopców grała w piłkę nożną, inne dzieci w rzucankę lub próbowały swoich sił w koszykówce. W pewnym momencie podeszła do mnie Julka i stwierdziła, że jej się nudzi. Towarzyszyły jej inne dzieci. Zaproponowałam, aby zmierzyły obwód boiska do piłki nożnej. Pierwszą reakcją dzieci było: *Nie, nie mamy czym*. Zapytałam, czym mogłyby zmierzyć boisko, nie mając miary. Od razu padła odpowiedź: stopami. Propozycja upadła, gdyż była zbyt czasochłonna.

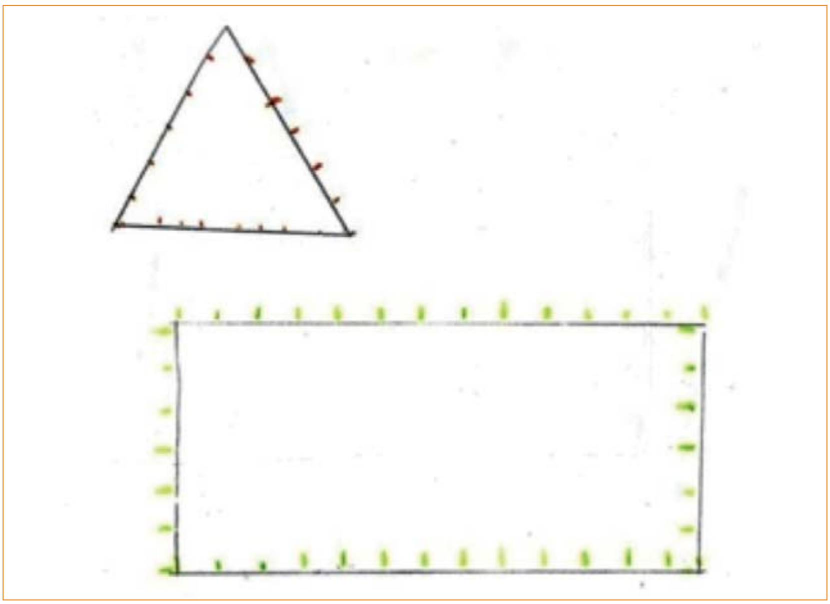
Zaproponowałam, aby „miarką" była Julia o wzroście 146 cm, a więc około 1,5 m. Spytałam dzieci, ile boków boiska należy zmierzyć. Padła odpowiedź, że 4, lecz Martynka szybko się zreflektowała i stwierdziła, że tylko dwa i pomnożyć przez dwa. Julka położyła się na boisku przy linii środkowej, co przyniosło kolejny dziecięcy wniosek – nie trzeba mierzyć całej długości, wystarczy jedną połowę i pomnożyć przez dwa. W trakcie mierzenia co chwilkę podchodziło do nas jakieś zaintrygowane dziecko z pytaniem Co robicie?. A my już wiemy, że nasze boisko ma w przybliżeniu długość 38 Julek. Świetna zabawa i ile w niej matematyki!

Ważne było dla mnie zachęcanie uczniów do odkrywania świata matematyki i matematyki na świecie poprzez prowokowanie ich do zadawania pytań i tworzenia opowiadań matematycznych. Każde dziecko lubi historyjki. Pozwalałam im na domysły, sugestie czy zaproponowanie strategii rozwiązania problemu. Stworzyłam taką atmosferę w klasie, aby uczniowie czuli, że ich sugestie były traktowane przez wszystkich z szacunkiem. Praca w grupach uczyła ich dyskusji, słuchania siebie i odpowiadania na sugestie innych z szacunkiem. Dzięki temu mogły osiągnąć sukces, wspólnie rozwiązując problem.

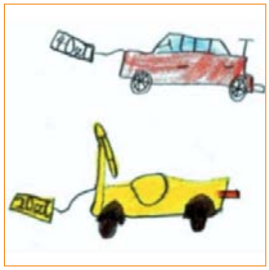
Pewnego dnia dzieci w grupach 2-, 3-, 4-osobowych rozwiązywały zadania z treścią. Każda z grup pracowała nad innym zadaniem. Oto przykładowe z nich:

Zadanie 1. ***Ania i Adam mają łącznie 56 zapałek. Ania wzięła tyle zapałek, ile potrzebne jej było do zbudowania trójkąta, którego każdy bok miał długość równą sześciu zapałkom. Zosia z pozostałych zapałek zbudowała prostokąt, którego jeden z boków miał długość równą sześciu zapałkom. Z ilu zapałek składa się każdy z dwóch dłuższych boków tego prostokąta?***

Uczniowie (Norbert, Seweryn, Martyna i Julia) układają figury z 56 patyczków, następnie wykonują rysunek. Sami sięgają po linijkę i kreślą trójkąt o boku równym 6 cm, a prostokąt o bokach 6 cm i 13 cm.



Ja: *Norbert, z ilu zapałek składa się dłuższy bok prostokąta?*
Norbert: *Dłuższy bok składa się z… Te się składają z 6, ten z sześciu, a ten… (dzieci liczą ułożone patyczki).*
Martyna: *…z 13.*
Ja: *Jak do tego doszliście?*
Norbert: *Zrobiliśmy z patyczków najpierw trójkąt. Potem dwa boki na 6 patyczków, z pozostałych połączyliśmy te dwa boki…*
Ja: *A skąd wiedzieliście, że trzeba je po równo rozdzielić?*
Norbert: *Żeby wyszedł prostokąt, a nie jakiś wygibas…*
Ja: *Super wam poszło.*

***Zadanie 2.* Krzysiu kupił motor i dwa razy droższy od niego samochód. Wydał na zabawki 60 zł. Ile kosztował motor, a ile samochód?**
Ja: *Ile kosztował motor, a ile samochód? Słucham.*
Malika: *Samochód 40… a motor 20.*
Ja: *Jak do tego doszliście?*
Mateusz, Sebastian: *Trudno powiedzieć…*
Martyna: *Auto…*
Malika: *20 jest o dwa* [w znaczeniu dwa razy] *mniejsze niż 40. I razem jest 60.*
***Zadanie 3.* Marek śpi po 9 godzin w dni powszednie, a w niedziele śpi 10 godzin. Ile godzin przesypia w ciągu tygodnia?**
Jakub: *Ileś…*
Nikodem: *Bardzo dużo…*
Ja: *Na pewno bardzo dużo, no to wyliczcie ile.*
Jakub: *Ja wiem… dziewięć, dodać dziewięć, dodać dziewięć, dodać dziewięć, dodać dziewięć… równa się tam ileś…*
Nikodem dodaje: *Dodaj dziewięć.*
Ja: *A w niedzielę ile przesypia?*
Jakub: *Dodać dziesięć.*
Ja: *Ile było tych dziewiątek?*
Tomek: *Siedem dziewiątek.*
Wojtek: *Sześć…*
Nikodem: *Sześć, bo tydzień ma 7 dni, a w niedzielę spał 10.*

$$9+9+9+9+9+9+10=64$$

Starałam się **przekazać uczniom swój entuzjazm i przyjemność z uczenia się matematyki** i rozwiązywania matematycznych problemów. Na jednej z lekcji uczniowie zastanawiali się, jakie pytania można zadać do następującego układu kostek:

1. *Jakie numerki są na tych kostkach?*
2. *Ile jest razem kropek na kostkach?*
3. *Ile jest kostek z liczbą 3?*
4. *Ile jest kostek z liczbą 5?*
5. *Jakiego koloru są kostki?*
6. Konrad: *Chcę zliczyć wszystkie kropki na 5 kostkach, nawet te niewidoczne.*
   Ja: *Od czego zaczniemy?*
   Konrad: *Najpierw trzeba policzyć kropki na jednej kostce: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.*
   Julia: *A mogę pomnożyć? 21 × 5 = 105.*
   Ja: *Jak możemy to inaczej zapisać?*
   Krysia: *21+21+21+21+21=105.*
7. *Jakiego kształtu są kostki?*
   Próby odpowiedzi – *kwadrat, sześciokąt, trójkąt, wielokąt…* i inne.
   Możliwe, że te odpowiedzi wynikały z tego, że dzieci patrzyły na tablicę, a nie manipulowały rzeczywistymi kostkami.

8. *Ile sekund kręcą się kostki?*
9. *Czy jest możliwe, aby na wszystkich kostkach pojawiła się jednocześnie liczba 5?*
10. *Na której kostce jest najwięcej oczek?*
11. *Na której kostce jest najmniej oczek?*
12. *Na których kostkach są liczby parzyste?*



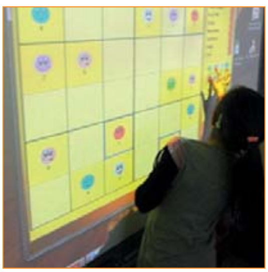
Julia tłumaczy innym uczniom, jak można to sprawdzić, łącząc w pary.

Na koniec zajęć odbyły się zawody: dzieci kontra nauczyciel oraz rozgrywki w grupach czteroosobowych, np.:

– *Kto wyrzuci najmniejszą liczbę oczek?*
– *Kto wyrzuci największą liczbę oczek?*
– *Kto wyrzuci więcej piątek?*
– *Kto wyrzuci parę np. 6 i 6, trójkę np. 1, 1 i 1.*
– *Kto wyrzuci sumę bliższą liczbie 14? itd.*

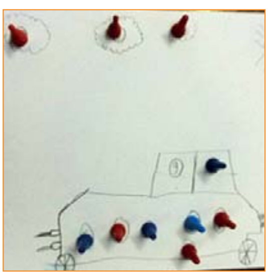
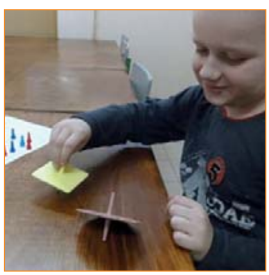
To był hazard czy matematyka?

Pozwalałam, aby dzieci swobodnie korzystały z Internetu. Istnieje wiele wartościowych stron internetowych i blogów o tematyce matematycznej. Pamiętałam o wykorzystaniu w trakcie zajęć komputera podłączonego do tablicy interaktywnej i programów edukacyjnych. Poniżej różne wersje gry sudoku oraz plansza 100 liczb:



Zachęcałam także uczniów do samodzielnego poszukiwania różnych ciekawych zadań i problemów do rozwiązania, zagadek czy łamigłówek. Odpowiednie dobranie środków dydaktycznych zapewniało zaangażowanie i pobudzało ich kreatywność. Dzieci mogły między innymi same konstruować gry matematyczne.

Obok plansza narysowana przez Tomka. Na dowolnie narysowanym obrazku umieszczamy liczby np. 1–12. Do pomocy potrzebujemy kostki, karty, ja wykorzystałam dwa kręciołki: z liczbami 1–12 oraz 1–5. Wylosowane liczby można było dodawać, odejmować, mnożyć lub dzielić. Wygrywała osoba, która zapełniła więcej pól pionkami w swoim kolorze.

Na planszy 100 liczb uczniowie umieścili swoje ulubione zwierzątka.


Następnie starali się umieścić na planszy sąsiadująco w pionie, poziomie lub na ukos trzy liczmany w swoim kolorze. Losując dwie karty od 2–9 oraz asa zastępującego jedynkę, mogli wykonywać dowolne działania.

Uczniowie mieli stały dostęp (także na przerwach) do takich pomocy dydaktycznych jak: klocki i tory drewniane, szachy, warcaby, domino, różnorodne gry planszowe i zręcznościowe, pentomino, tangramy, gry karciane, kości itp. Szeroka paleta gier i zabaw oraz odpowiednie zmotywowanie uczniów spowodowało, że sięgali po nie także na przerwie.


Tangramy, czyli naprawdę wymagające myślenia układanki. Rozwijają wyobraźnię geometryczną i zdolność kreatywnego myślenia, uczą koncentracji i spostrzegawczości.

Pentomino to układanka logiczna, która składa się z 12 różnych drewnianych klocków. Uczy przestrzennego myślenia, zapamiętywania i wytrwałości.

Domino – w trakcie zabawy dowolnej służy ćwiczeniu koordynacji ruchowo-wzrokowej, wzmacnia również koncentrację uwagi. Jeśli gramy zgodnie z zasadami, rozwija logiczne myślenie, uczy dodawania i odejmowania.


Warcaby oraz chińczyk – uczą systematyczności, rozwijają umysł i ćwiczą pamięć.



Szachy rozwijają krytyczne, logiczne i strategiczne myślenie oraz umiejętność podejmowania decyzji i analizy napotkanych problemów, a także uczenie się na własnych błędach. Uczą koncentracji, dyscypliny, cierpliwości oraz uczciwego współzawodnictwa.

Klocki drewniane i tory drewniane to nie tylko zabawa. Ich zadaniem jest stymulowanie rozwoju umysłowego dzieci, koordynacji wzrokowo ruchowej oraz pobudzanie wyobraźni i kreatywności dziecka. Czasem ciężko było uczniom przerwać ZABAWĘ. No właśnie, czy to była zabawa i „przerwy" w lekcji? A może jednak nauka? W końcu zabawa jest nauką, nauka – zabawą. Im więcej zabawy, tym więcej nauki (Glenn Doman).

Pod koniec roku szkolnego przeprowadziłam **powtórne ankietowanie**. Zadałam dzieciom następujące pytania:

– *Powiedz, co myślisz o lekcjach matematyki w tym roku.*
– *Co Ci się najbardziej podobało w zajęciach matematycznych w klasie drugiej?*
– *Co byś zmienił(a)?*

Lekcje matematyki w klasie drugiej były według dzieci *fajne*, ponieważ więcej od nich wymagały, mogły się więc więcej nauczyć. Według nich matematyka jest *bardzo fajna*, a nawet *najfajniejsza*. Dzieciom podobały się: zadania w grupie, kształty Numicon, dodatkowe zadania tekstowe, zadania z kostkami do gry, gry planszowe i karciane oraz Bingo, a także zabawy ruchowe np. Żywe liczby, zajęcia na planszy 100 liczb. Kilkoro uczniów chętnie **utrudniłoby zadania tekstowe w podręczniku**. Julka utrudniłaby wszystko: *zadania, działania i wszystko w matematyce*. Wiktoria zwiększyłaby liczbę zajęć matematycznych w stosunku do innych. Martysia zaproponowała **jeszcze mniej podręcznika i więcej zabaw**. Część uczniów, między innymi Dorian i Tomek chcieliby, aby na lekcji była tylko matematyka. Sewek jednak chciałby, aby nie było w ogóle matematyki. Bartek nie lubi zadań tekstowych, nie dlatego, że ich nie rozumie, tylko – jak sam przyznał – nie chce mu się za dużo myśleć…

Przeprowadziłam również powtórne ankietowanie. Jak widać w przypadku Julki i Seweryna niewiele się zmieniło. Julka jednak wyraźnie stwierdziła, że nie lubi rozwiązywać zadań w podręczniku i zeszycie, co potwierdzają rozmowy z dziewczynką – po prostu te zadania są dla niej za łatwe i zbyt nudne. W przypadku Sewka, mimo moich starań chłopiec nadal nie lubi matematyki. Widzę jednak na co dzień, że jest na zajęciach coraz aktywniejszy. Na razie będzie to musiało mi wystarczyć.

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.	✓		
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.		✓	
3. Jestem dobra(y) w matematyce.	✓		
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.			✓
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.		✓	
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	✓		
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.	✓		
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.	✓		

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.		✓	
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.		✓	
3. Jestem dobra(y) w matematyce.		✓	
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.		✓	
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.		✓	
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	✓		
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.			
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.			✓

Seweryn Wiśniewski

Większość uczniów z mojej klasy lubi matematykę i rozwiązywanie matematycznych łamigłówek, gry planszowe, karty itp. Dzieci sądzą, że umiejętności matematyczne są ważne w życiu. W związku z większymi wymaganiami zarówno programowymi klasy drugiej, jak i moimi dodatkowymi działaniami, czasem znacznie wykraczającymi poza program, część uczniów zwątpiła w swoje umiejętności matematyczne. Są to dzieci, które osiągały dobre i bardzo dobre wyniki z tradycyjnych sprawdzianów. Może dzięki zwiększeniu liczby bardziej atrakcyjnych, ale i stanowiących wyzwanie zadań, mogły lepiej ocenić poziom swoich umiejętności matematycznych i przekonać się, iż wiele się jeszcze muszą nauczyć? Pojawiła się także spora grupa dzieci, która stwierdziła, iż ***nie lubi wypełniać matematycznych zadań w podręczniku***. To mnie cieszy, ja też nie jestem z nich w pełni zadowolona. Tylko troje podczas zajęć matematycznych często odlicza czas do ich zakończenia, ***dla większości lekcja matematyki nie jest na szczęście ani nudna, ani trudna, ani męcząca.***

Zaznacz wybraną odpowiedź	TAK	NIE	NIE WIEM
1. Lubię matematykę.	19	3	-
2. Nauka matematyki sprawia mi przyjemność.	16	5	1
3. Jestem dobra(y) w matematyce.	15	2	5
4. Podczas zajęć matematycznych często odliczam czas do ich zakończenia.	3	14	5
5. Lubię wypełniać matematyczne zadania w podręczniku i zeszycie.	16	5	2
6. Umiejętności matematyczne są ważne w życiu.	19	-	3
7. Lekcja matematyki jest dla mnie nudna, trudna i męcząca.	1	19	1
8. Lubię rozwiązywać matematyczne łamigłówki, grać w gry planszowe, karty itp.	21	-	1

Badanie przeprowadzono w dniu 05.06.13 na 22 spośród 26 uczniów klasy 2b.

Jest to dla mnie potwierdzeniem, że **w dużej części udało mi się sprostać wyzwaniu**, które przed sobą postawiłam na początku roku szkolnego. Jestem jednak świadoma, iż czeka mnie **w klasie trzeciej dalsza praca nad stałym budowaniem motywacji do uczenia się i poczuciem wartości moich uczniów na zajęciach z edukacji matematycznej.**

Dominika Giezek
nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 63 w Bydgoszczy, w zawodzie 10 lat.

JAK SIĘ OTWORZYĆ NA MATEMATYKĘ, CZYLI O ZADANIACH W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASIE II

Bożena Gruszewska

Podczas minionego roku szkolnego byłam bardziej obserwatorem niż nauczycielem. Moi uczniowie sami sobie doskonale radzili z różnymi zadaniami, z chęcią dyskutowali między sobą, bez wciągania na siłę do rozmów, cierpliwie wyjaśniali sobie nawzajem, gdy ktoś miał kłopoty z samym zadaniem lub ze zrozumieniem jego treści. Uczniowie samodzielnie badali, poszukiwali i odkrywali sposoby rozwiązania zadania, tworzyli własne strategie dochodzenia do tego rozwiązania. Dzieci doceniały też i to z wielkim zrozumieniem, że *pani nigdy nam nie podpowiada, jak mamy rozwiązać zadanie, tylko zadaje nam kolejne pytania, żebyśmy myślały.*

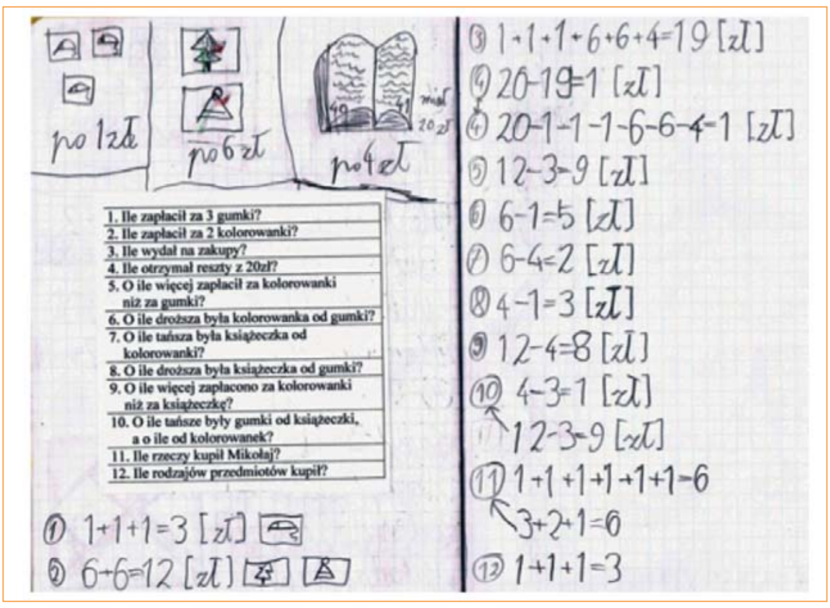
Nasze zajęcia były bardziej głośne, ale mnie to nie przeszkadza, bo wiem, że mam doskonałych „kompanów" do rozmów na zajęciach nie tylko matematycznych. Wszyscy byli bardzo zaangażowani, nawet Ci najbardziej nieśmiali. Starali się tworzyć własne pomysły, a nie tylko odtwarzać pomysły kolegów czy koleżanek z klasy. Mieli szansę wyboru własnego sposobu rozwiązania, cieszyli się, że w zadaniach może być wiele poprawnych rozwiązań i chętnie dzielili się swoimi spostrzeżeniami z każdego nawet najmniejszego odkrycia. Zadania otwarte wzbudzały wiele emocji, ogromne zaangażowanie i niezwykły wysiłek intelektualny. Może nie odkryliśmy Ameryki, ale z pewnością odkrywaliśmy matematykę na nowo: stosując różne sposoby i strartegie, otwieramy się na różnorodność, na myślenie.

Mikołajkowe zadania

Z okazji mikołajek rozwiązaliśmy wiele zadań. Zaczęłam również od zadania otwartego:

Zadanie 1. ***Mikołaj miał 20 złotych. Kupił trzy gumki po 1 zł, dwie kolorowanki po 6 zł i książeczkę za 4 złote.***

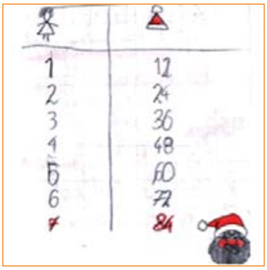
Dzieci miały samodzielnie ułożyć pytanie do tego zadania. Następnego dnia dzieci porównywały pytania ułożone przez siebie i inne dzieci oraz poszukiwały na nie odpowiedzi.



Dzieci wykonały wiele obliczeń, z pewnością bardzo prostych, ale wymagających skupienia i zrozumienia treści. Niektóre pytania wymagały dodatkowego wyjaśnienia od ich autorów, np. pytanie dziewiąte. Część dzieci odjęła od wartości kolorowanek, czyli od 12 zł, wartość książeczek, czyli 8 zł., zamiast 4 zł, gdyż nieuważnie przeczytała pytanie. Była więc również świetna okazja do analizowania błędów oraz przyczyn tych błędów przez same dzieci.

Dwa kolejne zadania to zadania zamknięte[1].

Zadanie 2. ***Zuzia ma urodziny w mikołajki. Napisała list do św. Mikołaja i zapytała, ile ma lat. List schowała pod poduszkę, a następnego dnia znalazła tam odpowiedź: „Mam tyle lat, ile Ty liczysz sobie miesięcy". Zuzia pomyślała chwilę i wykrzyknęła: „To razem mamy 91 lat". Ile lat ma Zuzia?***

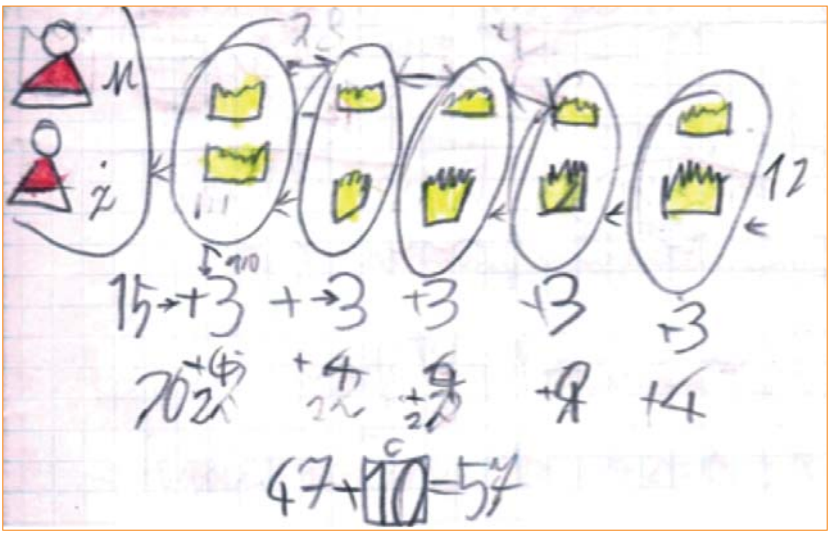


Dzieci rozwiązywały to zadanie w parach. Po przeczytaniu jego treści wiele z nich stwierdziło, że nic z tego zadania nie rozumie. Na pytanie, co w takim razie trzeba zrobić, dzieci odpowiedziały, żeby przeczytać jeszcze raz, ale uważniej. W dalszym ciągu było kilkoro uczniów, dla których zrozumienie treści okazało się trudne. Wtedy do akcji wkroczył Kamil G., który wyjaśnił, o co w tym zadaniu chodzi. Dzieci z chęcią zabrały się do pracy, ale miały trudności z zapisaniem swoich prób. Obok jedno z rozwiązań. Jest to doskonały zapis strategii zastosowanej przez dzieci i jeden z lepszych sposobów rozwiązywania tego typu zadań.

Zadanie 3. ***Mikołaj z żoną postanowili wydać przyjęcie. Zaprosili na nie 5 par królewskich. Każdej parze towarzyszyły 3 damy dworu i 2 ambasadorów z żonami. Zaproszono też grupę cyrkowców. Obecnych było 57 osób. Jak liczna była grupa cyrkowców?***

W tym zadaniu niektóre dane liczbowe zostały zmienione, w stosunku do oryginału.
Zadanie rozwiązywaliśmy wspólnie. Przy tej okazji wywiązała się ciekawa dyskusja dotycząca tego, czy Mikołaja i jego żonę liczyć, czy nie. W jej wyniku wszyscy uznali, że *należy ich liczyć wśród obecnych na przyjęciu 57 osób*.

Oto rysunkowe propozycje rozwiązanie tego zadania:

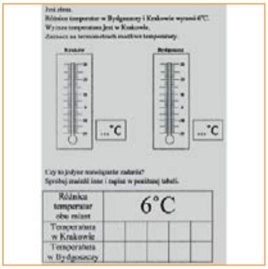


Mimo zimy za oknem, coraz goręcej na matematyce

Analizując treść zadania przedstawionego obok, dzieci korzystały z przygotowanych modeli termometrów. Po rozwiązaniu dokonały analizy swoich rozwiązań i wyjaśniały przyczyny własnych ewentualnych błędów.

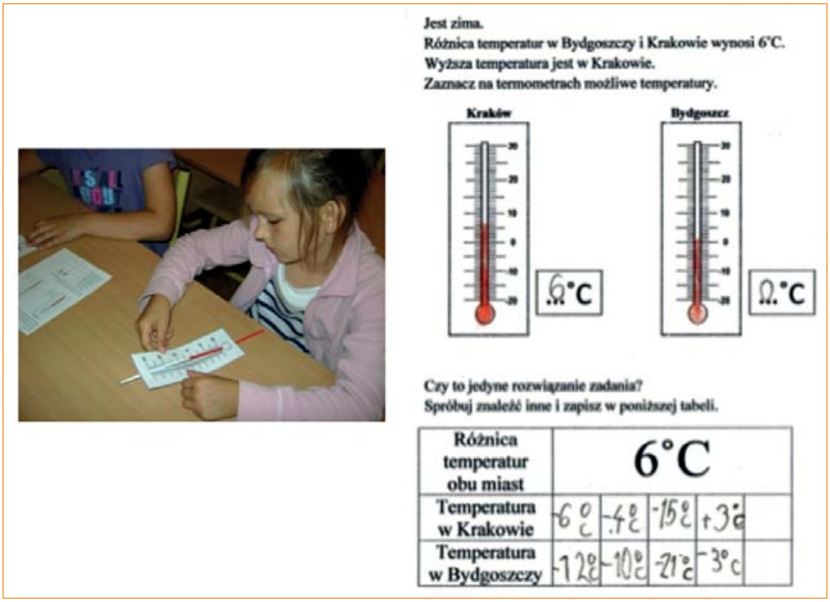
---

[1] Zadania zostały zaczepnięte ze strony: www.szkolneblogi.pl/blogi/sp-19-elblag/mikolajkowe-zadania; są to konkursowe zadania matematyczne dla klas IV–VI.



Według dzieci, błędy mogły wynikać:
1. Z braku uwagi podczas czytania polecenia.
2. Z braku rozumienia czytanego tekstu zadania,
3. Z nieuwzględnienia wszytkich warunków zadania, tzn.
– pory roku,
– miasta, w którym jest wyższa temperatura,
– różnicy temperatur w obu miastach,

Ida i Wiktoria spełniły wszystkie kryteria.



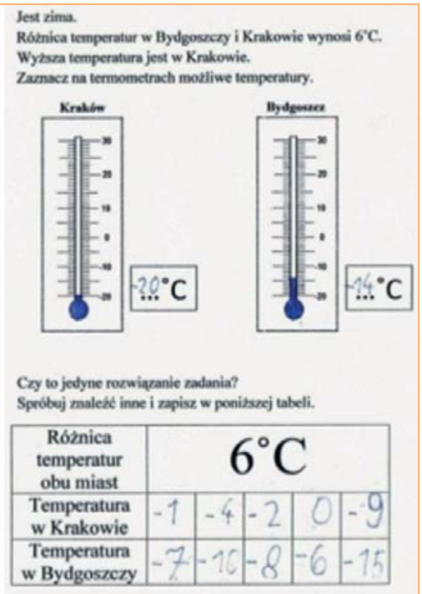
Jest zima.
Różnica temperatur w Bydgoszczy i Krakowie wynosi 6°C.
Wyższa temperatura jest w Krakowie.
Zaznacz na termometrach możliwe temperatury.

Kraków 6°C
Bydgoszcz 0°C

Czy to jedyne rozwiązanie zadania?
Spróbuj znaleźć inne i zapisz w poniższej tabeli.

Różnica temperatur obu miast	6°C				
Temperatura w Krakowie	-6°C	-4°C	-15°C	+3°C	
Temperatura w Bydgoszczy	-12°C	-10°C	-21°C	-3°C	

Kamil i Szymon zauważyli, że na termometrze zaznaczyli temperatury odwrotnie, wyjaśniając od razu, że wyższa to znaczy, że jest cieplej, a dotyczy to Krakowa.

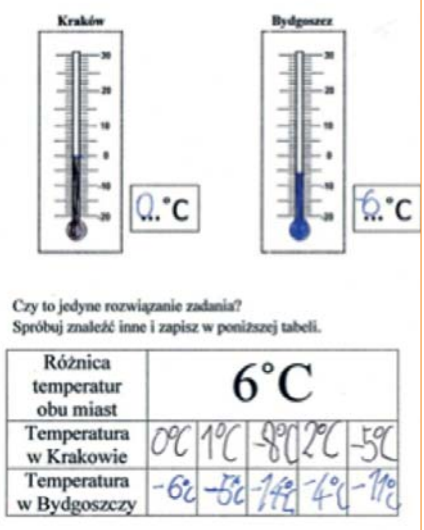


Jest zima.
Różnica temperatur w Bydgoszczy i Krakowie wynosi 6°C.
Wyższa temperatura jest w Krakowie.
Zaznacz na termometrach możliwe temperatury.

Czy to jedyne rozwiązanie zadania?
Spróbuj znaleźć inne i zapisz w poniższej tabeli.

Różnica temperatur obu miast	6°C				
Temperatura w Krakowie	-1	-4	-2	0	-9
Temperatura w Bydgoszczy	-7	-10	-8	-6	-15

Hania i Marcela były pewne, że zadanie wykonały poprawnie.

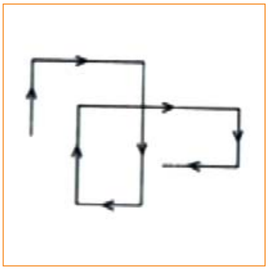


Czy to jedyne rozwiązanie zadania?
Spróbuj znaleźć inne i zapisz w poniższej tabeli.

Różnica temperatur obu miast	6°C				
Temperatura w Krakowie	0°C	1°C	-8°C	2°C	-5°C
Temperatura w Bydgoszczy	-6°C	-5°C	-14°C	-4°C	-11°C

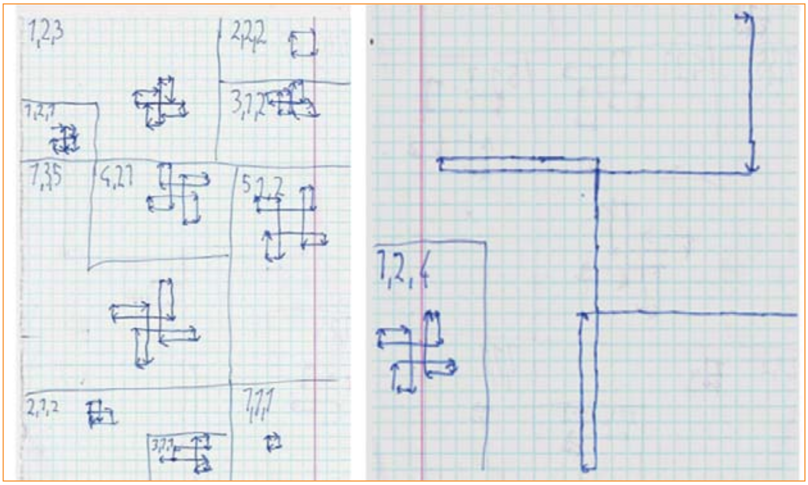
Każda para analizując wyniki swego zadania, miała możliwość sprawdzenia pracy pozostałych uczniów. Przeglądając wyniki kolegów i koleżanek, dzieci uznały, że zadanie to ma wiele poprawnych rozwiazań i to najbardziej je w nim zaciekawiło.

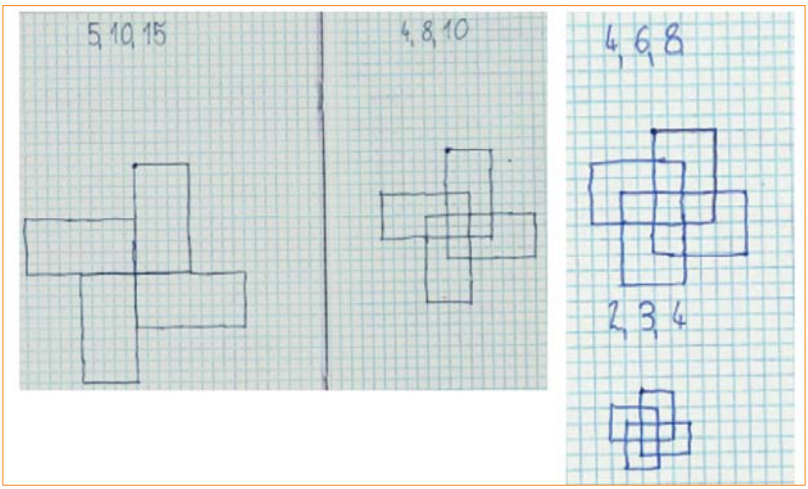
Czy to na pewno matematyka? – badamy ślady różnych dżdżownic[2]



Zadanie: ***Pełzając w mule, dżdżownice pozostawiają ślady. Dżdżownica posuwa się przez chwilę prosto, pozostawiając za sobą ślad, po czym skręca pod kątem prostym, znowu rusza przed siebie, tworząc nowy fragment śladu, skręca, tworzy nowy fragment, skręca… Rysunek powyżej pokazuje ślad pozostawiony przez dżdżownicę 1, 2, 3; to znaczy taką, która posuwa się o „krok" do przodu, skręca, robi dwa „kroki", skręca, robi trzy „kroki", skręca, robi jeden „krok",… Zbadaj ślady różnych dżdżownic.***

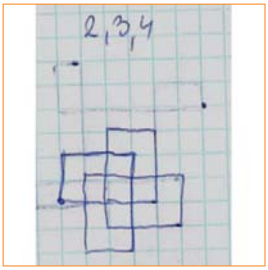
Poniżej przedstawiam kilka rozwiązań dzieci. Dla liczb 1,10 i 20 zabrakło Kamilowi miejsca na kartce, ale wiedział, jak będą wyglądały ślady.





---

[2] Źródło: „Ziarenka matematyczne", wybór David Cain.



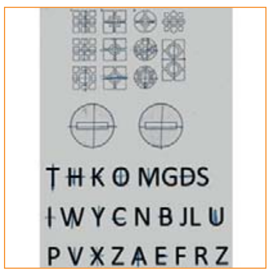
Dzieci chętnie badały ślady kolejnych dżdżownic, tworząc nowe wzory. Potrafiły skupić uwagę i doskonaliły spostrzegawczość, próbowały wnioskować na podstawie śladów swoich dżdżownic. Bez kłopotu zauważyły, że ślady dżdżownic o jednakowych liczbach będą miały kształt kwadratu. Przewidywały też, jak będzie wyglądał ślad, gdy będą to kolejne liczby, lub gdy każda następna będzie większa o tę samą liczbę.

Wzorki z lusterka

Z osią symetrii spotykaliśmy się wielokrotnie na zajęciach plastycznych w pracach malarskich i podczas składania papieru techniką orgiami. W ramach przypomnienia dzieci szukały osi symetrii na ilustracjach umieszczonych na tablicy.

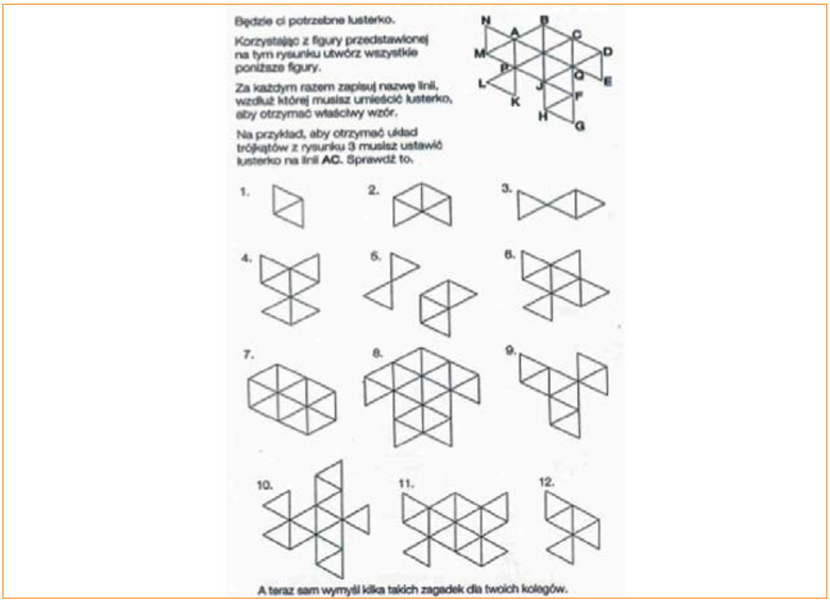


Później wszyscy, po otrzymaniu kartki z wzorami rabatek kwiatowych, znaków drogowych i drukowanych wielkich liter zaznaczali oś symetrii, wykorzystując do tego lusterka.

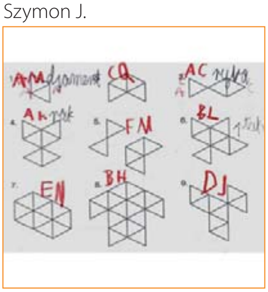




To była doskonała zabawa, ale za jeszcze lepszą dzieci uznały tworzenie własnych wzorów i ich nazywanie.
I tak, np. Julka znalazła w literze W doniczkę z kwiatami, a Mateusz znalazł w literze U serduszko:

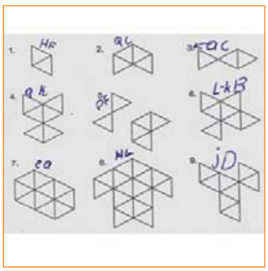
Zadanie z lusterkami tak bardzo spodobało się dzieciom, że postanowiły zbadać kolejne wzory[3]. Tym razem trzeba było przyjrzeć się pokazanej figurze i tak ustawić lusterko, by odszukać podane jej elementy. Dzieci przystawiały lusterko w różnych miejscach zaprezentowanej figury, odwracały kartkę z zadaniem, bo odkryły, że z innej strony też można odszukać wskazane elementy. I znów okazało się, że zadanie ma kilka rozwiązań.



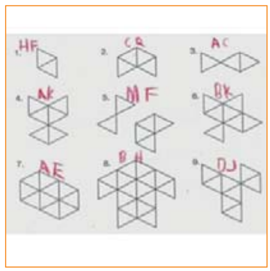
Szymon J.



Daria



Ida



Dla dzieci była to świetna zabawa, a przy okazji doświadczały symetrii. Dzieci zaczęły wymyślać nazwy dla wyszukiwanych za pomocą lusterka elementów. Podawały wiele różnych nazw, z którymi kojarzył im się wskazany rysunek. Znalazły się tam: strzałka, samolot, rybka i ryba z otwartą buzią, ptak, walizka, odrzutowiec, kot, pistolet, wstążka, muszka, wściekły Chińczyk, miska do owoców, klepsydra, kryształek, spławik, odwrócona głowa kota, rzeźba, karton, fontanna, bluzka, kołyska, szmaragd, rakieta, spodnie, romb, paczka. Zaaferowane zabawą dzieci nawet nie usłyszały dzwonka na przerwę.

Dzieci działały, odkrywały, poszukiwały same, bez mojego udziału. Ale mam mądrych i aktywnych uczniów!

Robimy siedmiomilowe kroki w matematyce

Naprawdę je robimy, nie tylko podczas czytania fragmentu wiersza Jana Brzechwy[4]:
Pojechał Michał pod Częstochowę,
Tam kupił buty siedmiomilowe.

---

[3] Źródło: „Łamigłówki z Manchesteru, cz. 1", wybór i tłumaczenie E. Dawidziak i M. Dąbrowski.

[4] Zadanie z kółka matematycznego klas IV–VI prowadzonego przez mgr Jolantę Brzozowską: www.zsswietoszow.oswiata.org.pl.

Co stąpnie nogą –
siedem mil trzaśnie, (mila to około 8,5 km)
Bo Michał takie buty miał właśnie.
Szedł pełen dumy, szedł pełen buty,
W siedmiomilowe buty obuty.
W piętnaście minut był
już w Warszawie:
„Tutaj - powiada – dłużej zabawię!"... (Jan Brzechwa)

1. Jaką odległość w kilometrach pokonywał Michał, robiąc jeden krok?
2. Ile kroków musiał zrobić Michał, aby przejść z Częstochowy do Warszawy (około 240 km)?
3. Z jaką prędkością szedł Michał?

Rozwiązywaliśmy te zadania wspólnie. A oto kilka odpowiedzi dzieci:

1. *Jeden krok to 7 mil, a mila to 8 i pół kilometra, więc trzeba dodać 7 razy po 8,5 km.* Mimo że dzieci nie uczyły się jeszcze w szkole mnożenia, używały zwrotu 7 razy po… i dodawały tyle razy. Mało tego, intuicyjnie zastosowały rozdzielność mnożenia, najpierw dodając 7 razy po 8, a potem 7 razy po pół, czyli wyszło im 59,5 km. Ustaliliśmy wspólnie, że to około 60 km.
2. Szymon J. powiedział, że trzeba sprawdzić, ile razy 60 km zmieści się w 240 km. Dzieci obliczyły dzielenie, mnożąc, czyli dodając 60 tyle razy, aż uzyskały 240. Stwierdziły, że Michał musiał zrobić cztery kroki. Dzieci miały doskonałą zabawę. Zaczęły wyobrażać sobie, gdzie i w jakim czasie poszłyby, gdyby miały takie czarodziejskie buty. Pomysłów było co niemiara.
3. Na moje pytanie, jak mierzy się prędkość, odpowiedziały, że w kilometrach na godzinę. *W 15 minut Michał przeszedł 240 km, a w godzinie mieszczą się cztery piętnastki, więc Michał szedł z prędkością 4 razy po 240 km, czyli 960 km/godz.*

To zadanie uświadomiło mi, że im prostsze zadanie, tym częściej dzieci popełniały błędy rachunkowe, a w takim zadaniu nietypowym odnalezienie poprawnej odpowiedzi okazało się proste.

Nasza przygoda z sekwencjami

W swojej pracy często wykorzystywałam sekwencyjność na zajęciach muzycznych. Ćwiczenia rytmiczne to doskonała okazja do wspólnej zabawy, odkrywania powtarzającego się motywu. Sekwencje w matematyce wykorzystywałam dotychczas raczej na zajęciach koła matematycznego, czasem z całą klasą, ale dopiero w klasie trzeciej.

Spotkania „Bąbla bydgoskiego" w ramach projektu „Dzieci myślą" skłoniły mnie do próby przepracowania sekwencji na początku klasy drugiej (liczyliśmy wtedy w zakresie 20, w klasie było sześcioro dzieci we wczesnym wieku szkolnym – sześciolatki). Wyniki tej próby przeszły moje najśmielsze oczekiwania i wyniosły dzieci na najwyższe podium. Zawsze uważałam, że mam bardzo zdolnych uczniów, ale nie spodziewałam się, że odkryję w nich prawdziwych naukowców. Pracę z sekwencjami obrazkowymi mieliśmy już za sobą, działaliśmy z nimi już od pierwszej klasy i szło nam doskonale, szczególnie w liczeniu po 2, 5 czy 10. Czas na TRUDNIEJSZE sekwencje.

Zadanie[5]. Przyjrzyj się uważnie tej serii obliczeń: Zbudowano ją zgodnie z pewną regułą. Odgadnij, jaka to reguła. Dopisz dwa kolejne działania z tej serii.

$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$3 + 5 + 7 = 15$$
$$5 + 7 + 9 = 21$$
$$7 + 9 + 11 = 27$$

Zadanie to uczniowie rozwiązywali indywidualnie. Siedemnastu uczniów dopisało poprawne dwa działania z tej serii, stwierdzając, że to było bardzo łatwe: *takie na pierwszą klasę, bo tylko dodawały po dwa do kolejnych liczb w każdym działaniu, a wyniku nie obliczały, tylko do poprzedniego dodawały po 6, bo przecież każdy następny wynik był większy o 6.*

Zadanie to uczniowie rozwiązywali indywidualnie. Siedemnastu uczniów dopisało poprawne dwa działania z tej serii, stwierdzając, że to było bardzo łatwe: takie na pierwszą klasę, bo tylko dodawały po dwa do kolejnych liczb w każdym działaniu, a wyniku nie obliczały, tylko do poprzedniego dodawały po 6, bo przecież każdy następny wynik był większy o 6.

Dzieci zauważyły regułę i w prosty sposób ją opisały, dodatkowo wypracowały własną strategię dojścia do tego wyniku, a także intuicyjnie rozumiały porównywanie różnicowe, chociaż tego zagadnienia jeszcze nie wprowadzałam. Dwóch uczniów z tej siedemnastki popełniło błąd, obliczając sumę, ale przecież zadaniem nie było obliczenie, ale dopisanie dwóch kolejnych działań z tej serii.

Czterech uczniów odkryło tylko, że wynik zawsze zwiększa się o 6 i zapisało kolejne dwa działania z serii, jako działania na dodawanie dowolnych liczb, ale tak by w wyniku była zawsze liczba większa o 6 od poprzedniej.

---

[5] „O dostrzeganiu związków" A. Kalinowska, www.trzecioklasista.edu.pl/artykuly.

Zadanie.
Przyjrzyj się uważnie tej serii obliczeń. Zbudowano ją zgodnie z pewną regułą.
Odgadnij, jaka to reguła. Dopisz dwa kolejne działania z tej serii.

1 + 3 + 5 = 9 18 + 8 + 7 = 33
3 + 5 + 7 = 15 25 + 5 + 9 = 39
5 + 7 + 9 = 21
7 + 9 + 11 = 27

Dwóch uczniów zapisało działania na dodawanie za pomocą dwóch dowolnych liczb i nie odkryło żadnej reguły.

Kolejne pytanie do tego samego zadania brzmiało: *Jak będzie wyglądać 10 działanie z tej serii?*

Jedenaście osób poprawnie zapisało dziesiąte działanie z tej serii: 19 + 21 + 23 = 63. Sześciu uczniów zapisało poprawnie to działanie, ale popełniło błąd w wyniku. Dzieci wyjaśniały, że *do dziesiątego działania z serii można dojść, numerując sobie działania i dodając po dwa do kolejnych pierwszych liczb poprzednich działań. Wiktor M. stwierdził, że można też liczyć piątkami, bo tak się powtarzają cyfry w jednościach.*

1	11	21	31	41
3	13	23	33	43
5	15	25	35	45
7	17	27	37	47
9	19	29	39	49
	↑		↑	

dziesiąte i dwudzieste działanie z serii

Pozostali uczniowie nie podjęli próby zapisania działania.
Kolejne pytanie brzmiało:
Jak będzie wyglądać 20 działanie z tej serii?
Osiem osób zapisało dwudzieste działanie z drobnymi błędami, a jedna Daria zapisała i obliczyła je poprawnie:

Zadanie. Daria Bogacka
Przyjrzyj się uważnie tej serii obliczeń. Zbudowano ją zgodnie z pewną regułą.
Odgadnij, jaka to reguła. Dopisz dwa kolejne działania z tej serii.

1 + 3 + 5 = 9 9 + 11 + 13 = 33
3 + 5 + 7 = 15 11 + 13 + 15 = 38
5 + 7 + 9 = 21
7 + 9 + 11 = 27

b) Jak będzie wyglądać 10 działanie z tej serii? Zapisz je.
19 + 21 + 23 = 63

c) A jak będzie wyglądało 20 takie działanie? Zapisz je.
39 + 41 + 43 = 123

***Zadanie.* Te liczby zapisano zgodnie z pewną zasadą. Odkryj, jaka to zasada.**
1 10 100 1000

- ***Jaka liczba będzie na szóstym miejscu?***
- ***Jaka liczba będzie na dziewiątym miejscu?***
- ***Jak można opisać liczbę, która znajduje się na 56 miejscu?***
- ***O ile większa jest liczba na drugim miejscu od liczby na miejscu pierwszym?***
- ***O ile większa jest liczba na trzecim miejscu od liczby na miejscu drugim?***
- ***O ile większa jest liczba na czwartym miejscu od liczby na miejscu trzecim?***
- ***O ile większa będzie liczba na szóstym miejscu od liczby na miejscu piątym?***
- ***Opisz, jak szybko wskazać, o ile większa jest liczba na następnym miejscu od liczby na poprzednim miejscu.***

Uczniowie rozwiązywali to zadanie w 5 zespołach – 4 zespoły czteroosobowe i jeden zespół pięcioosobowy.

Zespół I.

Szymon J., Szymon W., Mateusz i Kacperek rozpisali to zadanie następująco:

+ 9 + 90 + 900 + 900 + 900

1 →10 →100 →1000 →1900 →2800

Chłopcy odkryli zasadę zapisywania liczb, które stanowią różnicę między podanymi liczbami, ale popełnili błąd w ilości zer w tych liczbach i nie potrafili sobie dalej poradzić, mimo moich sugestii. Potrafili za to obliczyć sumę liczb 1000 + 900 = 1900 i 1900 + 900 = 2800. Dopiero słuchając analizy sposobów rozwiązania zadania przez inne zespoły, chłopcy zorientowali się, gdzie popełnili błąd i jak go naprawić.

Zespół II.

Asia, Wera, Jula i Dominika odkryły zasadę, zapisując kolejne liczby, ale nie potrafiły dokonać uogólnienia.

Zespół III.

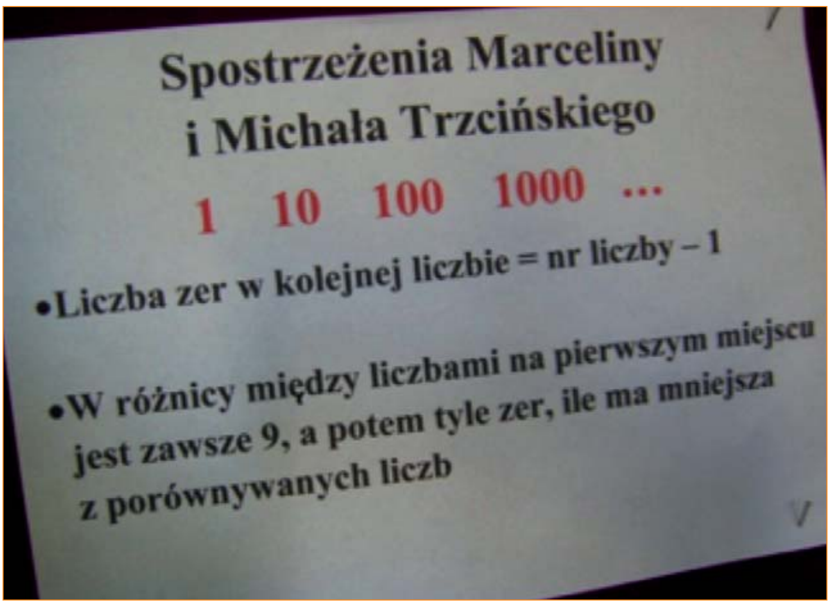
Wiki Ś., Kamil, Marcela i Michał rozwiązali poprawnie zadanie poprzez zapisywanie kolejnych liczb zgodnie z zasadą, którą odkryli i doszli do uogólnienia. Liderem grupy była dziewczynka, której pomysły zostały w trakcie pracy podważone, więc jeden z chłopców powiedział, że skoro dobre pomysły ma Michał, to on powinien nim zostać, ale po chwili, kiedy Marcela podsunęła świetny pomysł, sami doszli do wniosku, że przecież wszyscy są odpowiedzialni za rozwiązanie zdania grupowego i nie ma to znaczenia, kto jest liderem grupy.

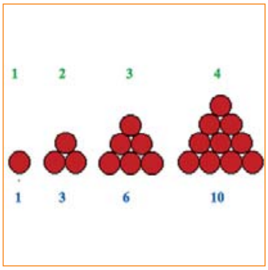
Zespół IV.

Wiktor, Michał L., Kacper A., Igor i Kacper Sz. początkowo próbowali nazwać kolejną zapisaną liczbę – nazwali ją miliard. Później zapisali szóstą liczbę i od razu przeszli do uogólnienia.

Zespół V.

Ida, Hania, Dominika B. i Zuzia zapisały szóstą, siódmą, ósmą i dziewiątą liczbę i od razu przeszły do uogólnienia. Rozpisały też liczbę na 56 miejscu, bo „chciały zobaczyć jaka będzie długa w zapisie". Zapisały ją tak: 1 i 55 zer, czyli wymyśliły własną „notację wykładniczą".





Zadanie [6]***. Wykonajcie poniższe polecenia po kolei:***

1. Ułóżcie z żetonów poniższe wzory, które zbudowane są zgodnie z pewną zasadą. Odkryjcie, jaka to zasada.
2. Ile kół będzie w kolejnym wzorze? Ułóżcie ten wzór z żetonów. Z jaką prędkością szedł Michał?
3. Ile kół będzie w dziesiątym wzorku? Ułóżcie ten wzór z żetonów.
4. Co mogą oznaczać liczby nad wzorkami?
5. Liczby pod wzorkami to tak zwane liczby trójkątne. Czy potraficie wyjaśnić, dlaczego tak się je nazywa?
6. Przyjrzyjcie się uważnie tabeli. Wyjaśnijcie, w jaki sposób powstaje kolejna liczba trójkątna. Spróbujcie uzupełnić tabelę

……	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Liczby trójkątne	**1**	**3**	**6**	**10**							…

Uczniowie rozwiązywali to zadanie w pięciu zespołach.






Na pytanie: *Co mogą oznaczać liczby nad wzorkami? dzieci odpowiadały:*

- Asia: kolejne numery wzorków,
- Szymon J.: to kolejne piętra dodawane do poprzedniego wzoru,
- Szymon W.: to liczba „figurowa",
- Kacper Sz.: to liczba pięter i numer wzoru – piąty wzór ma 5 pięter.

W odpowiedzi na pytanie: *Dlaczego liczby 1, 3, 6, 10… nazywa się liczbami trójkątnymi?* dzieci odpowiedziały, że *można z nich zbudować wzór w kształcie trójkąta; tak jak w bilardzie*. Wiedziały też, dlaczego liczby *cztery, pięć …* nie są liczbami trójkątnymi: *bo nie tworzą trójkąta*.

Dzieci układały od razu dziesiąty wzór, ponieważ jak mówiły: *każdy następny różni się od poprzedniego jednym dolnym piętrem, w którym jest tyle kół, ile wskazuje numer wzoru*. Wszystkie zespoły poprawnie uzupełniły tabelkę i doskonale wiedziały, jak powstaje kolejna liczba trójkątna.

[6] „O dostrzeganiu związków" A. Kalinowska, www.trzecioklasista.edu.pl/artykuly.

Liczba pięter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Liczby trójkątne	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Liczba figurowa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Liczby trójkątne	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Hania stwierdziła, że *w czwartym wzorze jest 10 kół, bo do trzeciej liczby trójkątnej dodała 4 koła (numer wzoru), czyli 6 + 4 = 10.*

Amelka, uczennica, która była nieobecna na początku badania liczb trójkątnych, stwierdziła, że *aby obliczyć kolejną liczbę trójkątną, dodajemy kolejne piętra, czyli aby obliczyć dziesiątą liczbę trójkątną dodajemy wszystkie kolejne piętra: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.*

Wykorzystujemy to, co badaliśmy i odkryliśmy sami

Sumy kolejnych liczb

15 = 7 + 8
9 = 2 + 3 + 4 **9 = 4 + 5**
10 = 1 + 2 + 3 + 4

Te trzy liczby można zapisać jako sumy dwóch lub większej ilości kolejnych liczb naturalnych.

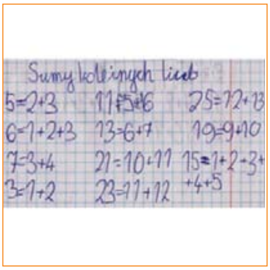
- **Czy są liczby, których nie można zapisać w ten sposób?**
- **Jakie liczby, podobnie jak 9 powyżej, można otrzymać na kilka różnych sposobów?**
- **Czy biorąc jakąś liczbę, np. 42, można ustalić, czy może być ona zapisana w postaci sumy kolejnych liczb i w jaki sposób?**

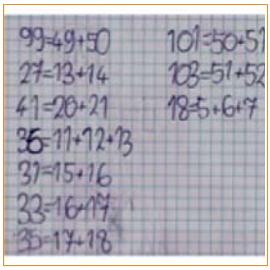
Większość dzieci po samodzielnym przeczytaniu zadania[7] nie zrozumiała jego treści. Po moim naprowadzającym pytaniu, czy rozumieją tytuł zadania, czyli co to jest suma i czy wiedzą, jakie liczby są kolejne, wszystko stało się jasne. Dzieci stwierdziły, że *suma ma związek z dodawaniem, a kolejne liczby to takie, które po sobie następują i każda następna jest większa od poprzedniej o 1.*

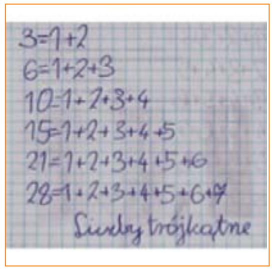
Takiej aktywności na zajęciach tylko można pozazdrościć. Dzieci pracowały jak mróweczki, wszyscy podchodzili do tablicy i zapisywali swoje propozycje. Jeden uczeń nawet się rozpłakał, bo chciał już dawno *iść do tablicy, a chodzi ciągle ktoś inny*, ale zrozumiał, że skoro chodzi ciągle ktoś inny, to znaczy, że na niego też przyjdzie kolej. W końcu i on doczekał się swojej kolejki i to kilkakrotnie.

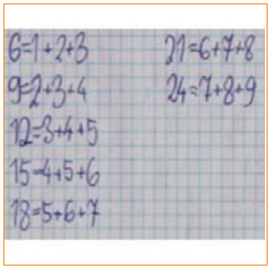
[7] Źródło: „Ziarenka matematyczne", wybór David Cain.

Dzieci same wytyczały sobie kierunek postępowania. Podawały różne propozycje, najpierw sumy dwóch składników i stwierdziły, przekrzykując się z emocji, że można tak zapisać tylko liczby nieparzyste, ponieważ *kolejno po sobie następują parzysta i nieparzysta, a parzysta plus nieparzysta daje w sumie liczbę nieparzystą*. Następnie bardzo szybko stwierdziły, że za pomocą sumy kolejnych liczb można zapisać liczby trójkątne. Zaskoczyło mnie to bardzo, ponieważ badanie liczb trójkątnych było już dość odległe w czasie. Moim zdaniem jest to efekt tego, że jeśli dziecko dochodzi do czegoś samo – a tak było dla liczb trójkątnych – pamięta i potrafi wykorzystać swoją wiedzę i umiejętności w innych sytuacjach zadaniowych.









Dzieci zapytane, które liczby można zapisać jako sumę trzech kolejnych składników, po podaniu tylko kilku przykładów wręcz wykrzyknęły, że *to liczby BUM z zabawy z wielokrotnościami liczb*. Hania i Wiktor stwierdzili, że *to każda liczba, która jest wynikiem mnożenia przez 3*. Marta zaś uznała, że są to liczby podzielne przez 3.

I tu zaczęły się propozycje, co dalej z naszym zadaniem. Dzieci zaproponowały tabelkę (łącznie z „główkami"), by zapisywać w niej wszystkie nasze propozycje (por. dalej). Liczbę 27 dzieci zapisały jako sumę kolejnych sześciu liczb: 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, ale nie mieliśmy już miejsca w tabeli.

Dzieci stwierdziły, że można teraz wybrać liczby, które zapisujemy na kilka sposobów, np. 21, bo jest nieparzysta (czyli za pomocą dwóch składników) i dzieli się przez 3 (czyli za pomocą trzech składników). Za pomocą czterech kolejnych składników można zapisać, według Kacpra Sz., liczby od 10 co czwartą: *wystarczy zabrać pierwszy składnik z poprzedniej i dodać na końcu kolejny*. Kacper, który ma kłopoty ze skupieniem uwagi, był dumny ze swego spostrzeżenia, a dzieci zaczęły mu bić brawo, doceniając jego mądrą wypowiedź. Hania zauważyła, że biorąc np. liczbę 42, można ustalić, czy może być ona zapisana w postaci sumy kolejnych liczb. Trzeba stwierdzić, czy jest parzysta, czy nieparzysta, czy jest podzielna przez 3.

Powiem szczerze, że sama musiałam bardzo uważać na wyjaśnienia dzieci, które choć czasem zawiłe, były trafne i przede wszystkim własne. Dzieci nie poszły w kierunku, jaki ja sobie zaplanowałam, ale świetnie się bawiły, proponując, co jeszcze można z tym zadaniem zrobić. Bawiły się swoim myśleniem.

Sumy kolejnych liczb

Liczby	Dwa składniki	Liczby trójkątne	Trzy składniki	Cztery składniki	Pięć składników
1	0 + 1				
3	1 + 2	1 + 2	0 + 1 + 2		
5	2 + 3				
6		1 + 2 + 3	1 + 2 + 3		
7	3 + 4				
9	4 + 5		2 + 3 + 4		
10		1 + 2 + 3 + 4			
11	5 + 6				
12			3 + 4 + 5		
13	6 + 7				
14				2 + 3 + 4 + 5	
15	7 + 8	1 + 2 + 3 + 4 + 5	4 + 5 + 6		
17	8 + 9				
18			5 + 6 + 7	3 + 4 + 5 + 6	
19	9 + 10				
20					2 + 3 + 4 + 5 + 6
21	10 + 11	1+2+3+4+5+6	6 + 7 + 8		
22				4 + 5 + 6 + 7	
23	11 + 12				
24			7 + 8 + 9		
25	12 + 13				3 + 4 + 5 + 6 + 7
26				5 + 6 + 7 + 8	
27	13 + 14		8 + 9 + 10		

Słodka matematyka na zakończenie roku szkolnego

Dzieci układały cukierki po cztery i zostawiały jeszcze dwa. Potem niektóre dobierały cukierki z talerza i rozdzielały je po pięć, nie bardzo wiedząc, co dalej zrobić. Potrzebowały wsparcia. Polecenie nie było wystarczająco jasne dla wszystkich, stąd niewielkie moje wyjaśnienie. Wystarczyło. Sądzę, że polecenie byłoby bardziej zrozumiałe, gdyby w zadaniu było sformułowanie: *Gdy tę samą liczbę cukierów grupował po pięć, to* …. Słowo: **je** ze zdania: *gdy grupował* ***je*** *po pięć*… nie zostało przez niektórych uczniów wychwycone, dzieci nie wiedziały, że to słowo dotyczy tej samej liczby cukierków, co na początku, przy grupowaniu ich po cztery.

Gdy chłopiec liczył cukierki układając je kupkami po cztery, zostały mu w ręku dwa. Gdy grupował je po pięć, to został mu tylko jeden.
Ile miał cukierków?
Zbadaj inne tego typu sytuacje.

Obecni na zakończeniu roku szkolnego rodzice uważnie przypatrywali się działaniom swych pociech i byli oczarowani, że niewielka tylko sugestia sprawiła, że prawie natychmiast znalazły się dwa różne rozwiązania i oba poprawne. Badanie, grupowanie, wnioskowanie zajęło uczniom trochę czasu. Dzieci dodawały, mnożyły, sprawdzały poprawność swoich hipotez. Uznały, że chłopiec mógł mieć 6 cukierków, 26 cukierków, a czy może jeszcze inne liczby mogą spełniać warunki zadania, trzeba sprawdzić. Mamy więc wakacyjne otwarte zadanie matematyczne i do tego słodkie. Z całą pewnością wrócimy do niego we wrześniu i znowu zaczniemy „słodką matematykę".

Bożena Gruszewska
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w SP nr 61 w Bydgoszczy; ma ponad trzydziestoletni staż; w roku szkolnym 2012/2013 pracowała z klasą drugą

A POZASZKOLNE TEŻ MOŻNA... ? – CZYLI REFLEKSJE I PRZEMYŚLENIA NA TEMAT PYTAŃ UCZNIÓWKLASY II W PROCESIE EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Agata Kazimierczak

KILKA SŁÓW WSTĘPU

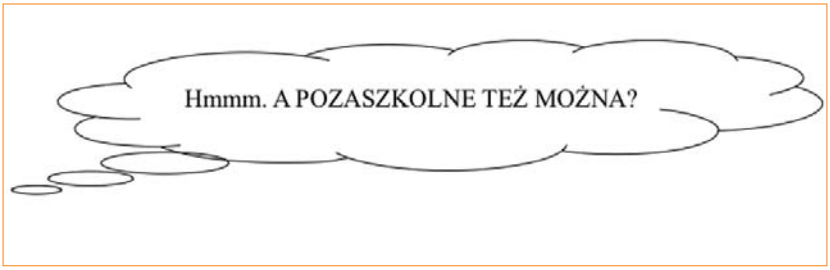
Ważne jest, by nigdy nie przestać pytać. Ciekawość nie istnieje bez przyczyny. Wystarczy więc, jeśli spróbujemy zrozumieć choć trochę tej tajemnicy każdego dnia. Nigdy nie trać świętej ciekawości. Kto nie potrafi pytać, nie potrafi żyć[1].

Albert Einstein

Refleksje, które poczyniłam na ten temat w ciągu ostatniego roku, potwierdziły tylko moje przypuszczenia. Przypuszczenia, które podpowiadały mi, że kiedy z ust zaciekawionego dziecka pada pytanie, nie powinno ono pozostać bez odpowiedzi. Czy jednak tej odpowiedzi zawsze powinien udzielać dorosły, nauczyciel? Pytania, które kierują do nas uczniowie, często nas zaskakują i zadziwiają. Wspaniale byłoby, gdyby jeszcze zachęcały nas nauczycieli do refleksji i obrania właściwego kierunku postępowania. Co to oznacza? Łatwo jest zamknąć się w schemacie wykonywanych przez siebie działań. Jest to bezpieczne, niewymagające i… asekuracyjne. Jednak czy gwarantuje to możliwość wszechstronnego rozwoju naszych uczniów? Myślę, że nie. Dużo ciekawiej jest otworzyć się na nieoczekiwane pytania i umożliwiać uczniom samodzielne poszukiwanie odpowiedzi. Samodzielne doświadczanie i przeszukiwanie świata gwarantuje zatrzymanie wiedzy w „szufladkach myślowych" i wykorzystanie jej w odpowiednim momencie. A chyba właśnie na tym powinna polegać nasza misja uczenia. Umożliwiać budowanie takiej wiedzy, którą będziemy mogli wykorzystać później – cokolwiek to później oznacza.

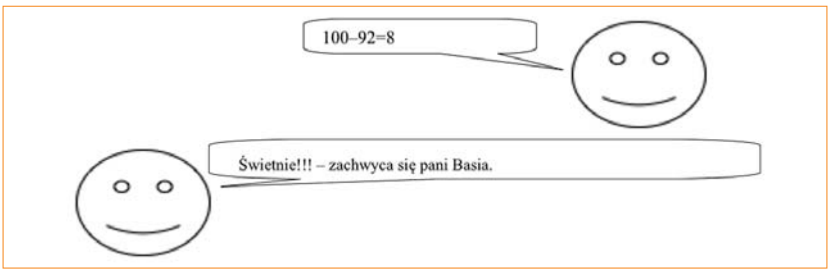
[1] www.cytaty.eu.

PYTANIA I SYTUACJE , KTÓRE MNIE ZACIEKAWIŁY I… OTWORZYŁY MI OCZY



Było to na lekcji matematyki w klasie drugiej. Z ust pani Basi, wychowawczyni klasy, padło polecenie:
– *Zapiszcie liczbę 8 jako wynik dowolnego dodawania lub odejmowania.*

Uczniowie ochoczo zabrali się do pracy. Refleksyjna pani nauczycielka analizuje wymyślane przez dzieci działania. Obserwuje, jak jej uczniowie zapisują działania, których wynikiem będzie liczba 8. Działania te mieszczą się w zakresie określonym przez podstawę programową. Wychowawczyni, kierowana chęcią sprawdzenia,w jak „dużym" zakresie liczbowym potrafią poruszać się uczniowie, próbuje zachęcić dzieci do poszukania innych działań na większych liczbach, które spełnią postawiony warunek, czyli dadzą wynik równy 8. Nieśmiało pyta jednego ze swoich uczniów:
– *Jakie jeszcze inne działania mógłbyś wskazać, Tomku?*



Tomek, równie nieśmiało, podaje działania wykraczające poza pierwszą 20, zachęcony przez panią dalej podaje działania. I nagle pada propozycja:

W tym momencie już większość klasy podejmuje próby wskazania działania w zakresie większych liczb. Przykłady się mnożą, wywołują uśmiech podziwu na twarzy pani Basi.

Liczby stają się coraz większe, bardziej różnorodne, gdy nagle Tomasz pyta:
– *To pozaszkolne liczby też można?*

To zdarzenie, o którym usłyszałam, otworzyło mi nie tylko szeroko usta i oczy, ale przede wszystkim umysł. My nauczyciele XXI wieku bardzo często tkwimy w schematach, z których nasi uczniowie już dawno wyszli. Powody opuszczania świata schematycznego uczenia się przez dzieci wynikają z naturalnej chęci poszukiwania, doświadczania i rozwoju. To wiedza, która otacza dzieci zewsząd, a na którą to uczniowie nie pozostają obojętni. Chętnie jej doświadczają, jeżeli tylko mają ku temu możliwości.

REFLEKSJE Z WŁASNEGO PODWÓRKA

Zainspirowana zdarzeniem, którym podzieliła się z nami Basia, postanowiłam poddać próbie moich uczniów, również drugoklasistów. Byłam pewna, że sobie poradzą, przecież to wyjątkowe dzieciaki, ciekawe świata, myślące, chętne do działania. Jednak to, czego doświadczyłam, przerosło moje oczekiwania.

Było to na zajęciach, na których doskonaliliśmy biegłość wykonywania działań. Ile działań i różnorodnych zadań wykonaliśmy, nie wiem. Pamiętam natomiast to, że nagle Kuba zapytał:

– *Czy każde działanie można rozwiązać?*
– *A co rozumiesz przez określenie „każde działanie"? – zapytałam.*
– *No na przykład takie jak 6 – 8 = ?*

Trudno było mi powstrzymać się od natychmiastowej odpowiedzi na to pytanie, ale… udało się i co więcej okazało się, że taki stan rzeczy był całkiem przyjemny i przyniósł radość nie tylko mnie, ale również uczniom.

– *No właśnie, jak myślicie, czy to działanie można rozwiązać?* – powtórzyłam pytanie Jakuba.

W klasie zapanowała cisza. Kilkoro uczniów wpatrywało się we mnie z pytaniem w oczach. Pozostali „coś" usilnie rachowali. A byli i tacy, którzy myślami byli zupełnie gdzieś indziej. Długo zastanawiałam się, czy „zadanie" to nie jest jednak zbyt trudne, kiedy odezwała się Kasia.

– *To będzie –2* – zdecydowanie odpowiedziała.

Moje zdziwienie było niewymierne – skąd drugoklasistka zna liczby ujemne? Widząc jednak zdecydowanie Kasi, postanowiłam sprawdzić, czy dziewczynka rzeczywiście rozumie swoje obliczenia. Poprosiłam uczennicę, by spróbowała wszystkim w klasie wytłumaczyć, skąd wzięło się to –2.

– *Dobrze – powiedziała Kasia. – To jest tak. Mam 6 lizaków, ale Jankowi muszę oddać 8 lizaków. Oddaję mu teraz te 6, a te 2 mam jeszcze do oddania, taki dług, czyli minus* – wyjaśniła Kasia.

Z wielką uwagą spojrzałam na Kasię. Lekko powątpiewając, zerknęłam na klasę w poszukiwaniu znaku, który świadczyć by mógł, że wszyscy zrozumieli. W oczach dzieci odnalazłam zrozumienie, ale aby upewnić się, raz jeszcze zapytałam, czy to co wyjaśniła Kasia, jest dla klasy jasne.

– *Tak!* – zgodnym chórem odpowiedzieli uczniowie.

Kasia raz jeszcze przytoczyła swoje wyjaśnienie, czym zupełnie niewymuszenie sprowokowała Mikołaja do podsumowania:

– *To znaczy, że kiedy od mniejszej liczby odejmuję większą, to wynik będzie na „długu", to znaczy na minusie* – z wielkim urokiem stwierdził Mikołaj.

Wyjaśnienie chłopca zadziwiło mnie swoją przenikliwością i precyzją. W moje głowie wyraźnie zarysowała się myśl „Moi uczniowie myślą! Hurra".

Liczby ujemne najczęściej są „przydatne" uczniom, kiedy zimowym rankiem odczytują temperaturę powietrza. Tematy, które podejmujemy, nie są dla nich zbyt poważne, są za to interesujące. Prowokują ich do myślenia i eksperymentowania. A kiedy mnie ktoś zapyta: po co? dlaczego? – odpowiedź jest jedna:

– *Tego oczekują ode mnie uczniowie!*

Zaczęłam uważnie słuchać i umożliwiać uczniom samodzielne dochodzenie do wiedzy. A pytania mnożyły się:

∞

– *Czy to jest znak nieskończoności liczby? – zapytał Dominik.*
– *A ile to będzie nieskończoność dodać nieskończoność?*
– *A jak myślisz?* – prowokowałam chłopca do samodzielnego poszukania odpowiedzi.
– *To takie dwie nieskończoności… albo taka jedna, ale taka wielka* – podsumował Dominik, po czym zapisał to w swoich notatkach.

Dominik 7 lat klasa 2d, zapisy w zeszycie

Świetnie! Pomyślałam i uśmiechnęłam się do swoich myśli, kiedy Dominik z wielkim zaangażowaniem przekonywał mnie do swoich racji.

Z każdym dniem kolejne zajęcia matematyczne przynosiły nieoczekiwane i zaskakujące pytania. Jak się okazało, matematyka stała się niewyczerpalnym źródłem i sposobnością do zadawania pytań – pytań, które zdecydowanie były poważne, a jednocześnie interesujące dla uczniów.f

OBLICZENIA KALENDARZOWE I INNE ZNAKI RZYMSKIE

Nowy rok kalendarzowy jest świetną sposobnością do przybliżenia uczniom nazw miesięcy, ich kolejności i oznaczenia znakami rzymskimi. Nieoczekiwanie padło dość intrygujące pytanie:

– *Jak zapisać zero znakiem rzymskim?*

Pytanie to nie wywołało już mojego niepokoju. Było ono intrygujące już nie tylko dla mnie, ale również dla reszty klasy, która wpatrywała się teraz we mnie z wielką uwagą. Bez wahania zaproponowałam uczniom, by samodzielnie poszukali odpowiedzi na postawione przez kolegę pytanie. Udostępniłam tylko „literaturę fachową" i możliwość przeszukania stron Internetu, a sama usunęłam się w kąt sali. Uważnie śledziłam to, co działo się przy stolikach i na tablicy interaktywnej, kiedy uczniowie przeszukiwali przestworza matematycznej krainy w poszukiwaniu rzymskiego zera. Wtedy Piotr natrafił na wyjaśnienie, które głośno odczytał:

– *…w rzymskim systemie znaków liczba zero nie ma własnego odpowiednika, ponieważ „nic" nie było powszechnie uważane za wartość…*

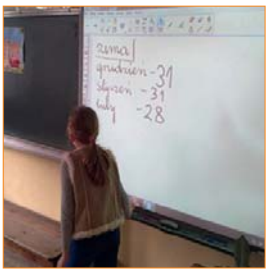
Uznawszy, że wyjaśnienie to może być mało zrozumiałe dla uczniów, zapytałam, jak rozumieją ten zapis. Przez dłuższą chwilkę nikt się nie odezwał. I kiedy już myślałam, że nie znajdą odpowiedzi, Piotr głośno stwierdził:

No jak czegoś nie było, to po co to oznaczać?

Wyjaśnienie proste i jak się okazało bardzo trafne. Uczniowie potakując głowami, przyznali Piotrowi rację. Uważając temat za zamknięty, postanowiłam kontynuować zajęcia. Szybko jednak pojawiły się kolejne pytania.

– *Która pora roku jest najdłuższa?*

Sposoby obliczenia, a jednocześnie wskazania właściwej odpowiedzi na tak postawione pytanie, ukazały różnorodność procesów myślowych dzieci.



Zuzia 8 lat, klasa 2d

W ten sam sposób, jak pokazany wyżej, uczniowie wykonali obliczenia dotyczące miesięcy jesiennych i letnich. Z obliczeń uczniów wynikało, że: miesiące zimowe mają 90 lub 91 dni (w zależności od tego, czy luty ma 28 czy 29 dni), wiosenne mają 92 dni, letnie miesiące również mają 92 dni, a miesiące jesienne 91 dni. Suma dni w roku wynosi 365 lub 366 i uzależniona jest od tego, ile dni ma w danym roku luty. Do takich wniosków doszli uczniowie, wskazując, że najdłuższymi porami roku jest wiosna i lato. Właściwie już wszystko było wiadome, gdy ktoś zapytał:

– *Czy wyniki będą takie same, jak zaczniemy obliczenia od dni, w których dana pora roku się zaczyna?*

I tu zaczęły się kolejne obliczenia, sprawdzania dokładnie kiedy zaczyna się kolejna pora roku. Zapisy uczniów wyglądały mniej więcej tak:

wiosna: 20 marca do 21 czerwca
*marzec **11** dni + kwiecień **30** dni + maj **31** dni + czerwiec **21** dni = **93** dni wiosna*
lato: 21 czerwca do 23 września
*czerwiec **9** dni + lipiec **31** dni + sierpień **31** dni + wrzesień **23** dni = **94** dni lato*
jesień: 23 września do 21 grudnia
*wrzesień **7** dni + październik **31** dni + listopad **30** dni + grudzień **21** dni = **89** dni jesień*

Według takich obliczeń zimowych dni było również 89 lub 90. Zależało to oczywiście od liczby dni w lutym. Rachunki, których dokonały dzieci, wskazały im teraz bardzo wyraźnie, że najdłuższą porą roku jest lato. Ucieszyło to oczywiście wszystkich uczniów, gdyż perspektywa tak długiego wypoczynku (tak wydawało się dzieciom) ucieszyłaby chyba każdego z nas. Łączna suma dni w roku wyszła dokładnie taka sama, jak wynikało z pierwszego sposobu obliczania.

A co wynikało z zajęć matematycznych? Okazuje się, że są świetną sposobnością, prowokującą uczniów do nieszablonowego myślenia. Myślenia o matematyce, która jak się okazało, wcale nie musiała być nudna, trudna i „nie dla mnie". Matematyce, która uczyła precyzować pojęcia.

O MATEMATYCE NIE TYLKO NA MATEMATYCE…

Zbliżały się święta Bożego Narodzenia, czas wspólnie spędzany w gronie najbliższych. W szkole ten okres obfituje w tematykę mikołajkowo-świąteczną. Ten rok zapowiadał się podobnie do poprzednich. Z okazji mikołajek do naszej klasy przywędrowała choinka. Dzieci zapytały: Możemy ozdobić choinkę? Pudełko z ozdobami szybko trafiło w ręce dzieci, które zawieszały gwiazdki na gałązkach świątecznego drzewka. Przyglądałam się tej czynności z zaciekawieniem , gdy niespodziewanie usłyszałam:

– *Brzydko!!!*

Zdziwiłam się, skąd tak krytyczny osąd pracy innych dzieci.

– *Czy nie lepiej byłoby powiesić je symetrycznie?* – padło pytanie, które wyrwało mnie z zamyślenia.

– *Symetrycznie? To znaczy jak?* – podjęłam próbę „sprowokowania" Wiki do wyjaśnienia mi tego pojęcia.

Na efekty nie musiałam długo czekać. Dziewczynki zabrały się do „porządkowania" choinki. Po chwili moim oczom ukazało się drzewko choinkowe z wyraźnie zaznaczoną linią symetrii (właściwie płaszczyzną symetrii), a gwiazdki po jej prawej i lewej stronie układały się w zgodny obrazek. Nie wiem, czy wszystkim ten „wzór" się spodobał, wiem natomiast, że dziewczynki były z siebie bardzo dumne. Nadal jednak nie wiedziałam, czy samo pojęcie symetrii jest zrozumiałe dla wszystkich. Krótką chwilę rozmawialiśmy na temat tak zawieszonych gwiazdek. Byli zwolennicy i przeciwnicy tej radykalnej zmiany, która zaszła na drzewku choinkowym. Mnie nadal intrygowało jednak pytanie: czy i jak widzą tę symetrię? Wiktoria podjęła próbę wyjaśnienia:

– *Bo gwiazdki ułożone są tak równo. Widzi pani te cztery największe gwiazdki od czubka choinki po doniczkę?*

– *Tak* –odpowiedziałam.

– *Resztę gwiazdek zawieszałyśmy równo po prawej i lewej stronie tych dużych gwiazd* – zakończyła swoje wyjaśnienia Wiki.

– *Tak, a ja mówiłam Wiki, czy wyżej, czy niżej. I teraz jest tak równo* – powiedziała Kasia.

Nie pozostało mi nic innego, jak potwierdzić słowa dziewczynek. Chłopcy dorzucili jeszcze, że w pierwszej klasie też mówiliśmy o symetrii, wtedy gdy przy okazji tematu wiosny wycinaliśmy z kolorowego papieru motyle i ozdabialiśmy je „takimi kleksami, które później odbijały się na drugim skrzydle motyla". W tym momencie uznałam, że samo pojęcie symetrii jest jasne i zrozumiałe dla wszystkich uczniów.

A nasze drzewko choinkowe jeszcze nieraz dało nam sposobność do mówienia o matematyce.

ŁAŃCUCHY CHOINKOWE-SEKWENCJE

Dekorowanie drzewka choinkowego zachęciło nas do wykonania różnorodnych łańcuchów choinkowych. Materiał przyniesiony przez dzieci rozpoczynał się od różnorodnych pod względem wielkości i koloru koralików, poprzez guziki, słomki i kolorowy papier, kończąc na makaronie różnego koloru i kształtu.

Paweł 8 lat, klasa 2d

Kasia 8 lat i Janek 8 lat, klasa 2d

Zachwycałam się pomysłowością dzieci i urokiem wykonanych przez nie łańcuchów. Z uwagą śledziłam też rozmowy, które toczyły się w klasie w trakcie tworzenia tych małych dzieł.

– *O! Czy to nie jest taki wzór? Taki jak w matematyce?*

– *Ładny rytm mi wyszedł?*

– *A teraz będzie biała kulka czy……? Biała ……*

Właśnie w toku takich rozmów powstawał łańcuch za łańcuchem, sekwencja za sekwencją. Biała kulka, słomka, biała kulka, słomka itd. Kiedy zapytałam, jaki element łańcucha będzie znajdował się na 12 miejscu, usłyszałam, że „będzie to słomka". Gdy dopytałam o miejsce 22 w łańcuchu, znów padła szybka odpowiedź i bez wątpliwości: „to też będzie słomka". Następnie zapytałam dzieci o miejsce białej kulki, a one odpowiedziały: „najbliższa, biała kulka będzie na jedenastym miejscu". „A kolejne" – dopytałam. „Kolejne na trzynastym, piętnastym itd., co dwa". Inni uczniowie pytani o kolejny element łańcucha również właściwie wskazywali ich nazwę, kształt i kolor. Przy okazji z wielką satysfakcją porównywali długości wykonanych przez siebie łańcuchów. Na zakończenie wszystkie łańcuchy (rytmy) przyozdobiły klasową choinkę. Dopiero teraz wyglądała strojnie.

GDZIE JEST WODA?

Pojęcie wody, czy ogólniej rzecz biorąc, płynów, odmierzanie litrów i przelewanie wody także wiąże się z matematyką. Niekiedy jednak rozmowa na temat różnorodnych zbiorników wodnych, miejsca występowania wody w przyrodzie i jej roli w świecie roślin, zwierząt i ludzi prowadzi do dość poważnych obliczeń matematycznych. A było to tak…

Tematem zajęć edukacji przyrodniczo-społecznej było miejsce występowania wody w świecie.

– *Zbiorniki wodne to oceany, morza, rzeki, jeziora, stawy, oczka wodne, baseny* – padały odpowiedzi uczniów.
– *Tak, mamy zbiorniki wodne naturalne i sztuczne, czyli te wytworzone przez człowieka. A czy wiecie, gdzie jeszcze występuje woda?* – zapytałam

– *W roślinach, owocach, pod ziemią* – padały odpowiedzi.
– *Zgadzam się. A czy wiecie, że dziecko w 75% zbudowane jest z wody?* – zapytałam.
– *To tak mniej więcej tyle jest tej wody?* – zapytał Paweł pokazując poziomą linię na wysokości klatki piersiowej.
– *To ile to kilogramów te 75% wody?*

Pytanie to nie tylko zaciekawiło mnie, ale wprowadziło mnie wręcz w stan osłupienia i wielkiego szoku. Jak teraz ukierunkować pracę, by dzieci zbudowały sobie wiedzę w zakresie jednostek miar, ich przekształcania, szacowania? Jak poruszyć temat procentów w klasie drugiej tak, by każdy uczeń zrozumiał ich istotę? Postanowiłam rozwiązanie tego problemu pozostawić w rękach uczniów. Zapytawszy dzieci, czy mają pomysł, jak sprawdzić, ile kilogramów człowieka stanowi 75% wody w jego organizmie, oczekiwałam na propozycje uczniów, którzy teraz przeszukiwali „szufladki myślowe". Z sali padały różnorodne pomysły. Paweł raz jeszcze obrazowo pokazał, ile to 75% człowieka, kolejny raz zarysowując na wysokości klatki piersiowej poziomą linię. Ktoś inny dodał, że „zapewne to dużo kilogramów". Któryś z uczniów zaproponował, by do obliczeń wykorzystać wzrost człowieka. To wszystko nie było wystarczającym wyjaśnieniem dla Jasia. Aby wesprzeć myślicieli w poszukiwaniu właściwej drogi, zasugerowałam pytaniem:

– *Jak myślicie, co musimy wiedzieć o człowieku, by wskazać, ile kilogramów jego ciała stanowi te 75% wody w jego organizmie?*

Wtedy worek pomysłów się rozwiązał. Najwyraźniej i chyba najczęściej pojawiającą się odpowiedzią była:

– *Musimy znać jego wagę* – powiedział Kuba.
– *Ale każdy z nas ma inną wagę* – dopowiedziała Kasia.
– *Czy to ma dla nas jakieś znaczenie?* – zapytałam.
– *Nie* – powiedział Janek. – *To tylko będzie znaczyło, że każdy z nas będzie miał inny wynik* – dopowiedział po chwili.
– *Aha! A jak możemy to sprawdzić?* – dalej prowokowałam do działania.

Wtedy Janek zaproponował, by sprawdzić, ile kilogramów waży jego 75% wody. Z chęcią podał swoją wagę (34 kg) i zakomunikował:

– *To cały ja.*
– *A ile to procent Ciebie?* – zapytałam z obawą w głosie.

– *To cały ja, więc 100% mnie* – bez wahania odpowiedziała Janek.
– *Zatem te 75% to będzie więcej czy mniej Twoich kilogramów?* – dopytałam.
– *Pewnie, że mniej* – szybko wyjaśnił Jaś.
– *A jak to obliczyć?* – pytałam dalej.

Bardzo szybko na moje pytanie odpowiedział Kuba, który podszedł do tablicy i sprawnie zaczął wykonywać na niej obliczenia. To co zapisał na tablicy, wyglądało tak:

Skoro Janek waży 34 kg to 34 kg to 100%, połowa tego to będzie 50% czyli 17 kg i druga połowa, czyli drugie 50% czyli 17 kg. Teraz jedną z połówek raz jeszcze podzielę, to będzie po 25%, czyli 8 i pół kg i 8 i pół kg. Teraz tylko dodam te 17 kg i 8 i pół. Wynik to będzie 25 i pół kg i właśnie tyle kilogramów to jest 75% wody w organizmie Janka – wytłumaczył.

Podane wyjaśnienie sprawiło, że pozostała część klasy zaczęła we własnym zakresie obliczać swoje 75% wody w organizmie. Ktoś z klasy zawołał, że nie musi wykonywać obliczeń, bo jego 75% wody to 25,5 kilogramów. Odpowiedź klasy była oczywista:

– *Bo ważysz tyle samo co Janek.*

Większość klasy samodzielnie dokonywała obliczeń. Tylko dwoje dzieci poprosiło o pomoc. Moja pomoc polegała na zadawaniu pytań, które miały sprowokować uczniów do samodzielnego myślenia. Dzieci wykonały obliczenia i widać było na ich twarzach zadowolenie z „eksperymentu", którego dokonali. Pozostała część dnia upłynęła nam w wyjątkowo dobrych humorach.

Kolejny raz okazało się, że to co jest punktem zainteresowań uczniów, sprawia im dużo więcej frajdy niż tematy i działania narzucone z góry. I nawet kiedy trzeba wykroczyć poza pewien szablon, zmienić trochę kierunek myślenia, nie jest to ze szkodą dla uczniów. Wręcz przeciwnie, takie odpowiedzi na oczekiwania wspomagają rozwój naszych dzieci.

Uczniowie kolejnego dnia chętnie dokończyli ze mną temat WODA, utrwalając sobie przy okazji to, o czym już zdążyliśmy powiedzieć poprzedniego dnia.

SPOTKANIE Z CALINECZKĄ I… TELEWIZOREM

Świat bajek i baśni, nieoczekiwanych zwrotów akcji. Świat pełen morałów i przemyśleń stał się kolejnym polem do działań matematycznych.

Wprowadzając uczniów w temat kolejnych zajęć, poinformowałam dzieci o spotkaniu z H.Ch. Andersenem i jedną z jego bohaterek „Calineczką". Uczniowie wcześniej zapoznali się z treścią lektury. Pracowali chętnie, wskazując i wymieniając głównych bohaterów książki i ich cechy charakteru.

W trakcie zajęć usłyszałam pytanie, które nierozerwalnie wiązało się z treścią lektury:

– *Dlaczego Calineczka nazywała się Calineczką? Czemu miała takie imię?*

Z odpowiedzią na to pytanie pospieszył Kuba, który przytoczył wiadomości uzyskane jeszcze w klasie pierwszej.

– *To tak jak w średniowieczu, mieli takie przydomki np.: Władysław „Łokietek", bo był mały* (czyli niski).
– *Tak, a pani mówiła, że wtedy była taka miara długości – łokieć* – dopowiedziała Zuzia.

Właściwie nie pozostało mi nic innego, jak potwierdzić i podsumować, że imię Calineczka też pochodzi od miary długości. Dzieci zapytane, czy słyszały kiedykolwiek nazwę cal, szybko odpowiedziały, że mają przecież w domach telewizory w różnych rozmiarach calowych. Przebieg zdarzeń, który się właśnie zaczął ostatecznie kształtować, ukierunkowało pytanie Kuby:

– *Ile centymetrów ma telewizor 40"?*

Kolejne pytanie z zakresu „trudnych" – pomyślałam. Trudnych i zarazem bardzo ciekawych. Poszukiwanie odpowiedzi na postawione pytanie uczniowie rozpoczęli od przeszukiwania stron Internetu.

– *Cal – to jednostka miary długości, odpowiadająca potrójnej długości średniego ziarna jęczmienia* – odczytał Mateusz.
– *1" to 2,54 cm* – odnalazła informacje Marta.
– *O!!! Cal miał różne długości* – zaciekawił się Mikołaj.

Ta informacja, na chwilę zatrzymała nas przy samym calu. Uczniowie odczytywali, jak to na przestrzeni wieków i w różnych częściach świata zmieniała się długość 1" w porównaniu do centymetrów. Zastanawiali się, dlaczego właśnie tak dynamicznie cal był poddawany zmianom.

Po dłuższej wymianie zdań debatę zakończyła Malwinka, która roztropnie zapytała:

– *I co w końcu, ustalili jedną długość?*

Kiedy odnaleźliśmy informację mówiącą o tym, że ostatecznie ustalono międzynarodową wartość 1", którego odpowiednikiem jest 2,54 cm, jak bumerang powróciło pytanie:

ILE CENTYMETRÓW MA TELEWIZOR 40"?

Poprosiłam uczniów, by spróbowali zastanowić się nad sposobem obliczenia tej wartości. Padła propozycja, by 40" pomnożyć przez 2,54 centymetra. Powiem, że mnie zaskoczyła. Ciekawsze jednak dla mnie było, jak poradzą sobie uczniowie z przeliczeniami. Mnożenie liczb „po przecinku". To mogło być interesujące, zważywszy, że zmierzyć się z tym mieli uczniowie drugiej klasy szkoły podstawowej.

Kuba 8 lat, klasa 2d, w trakcie obliczeń…

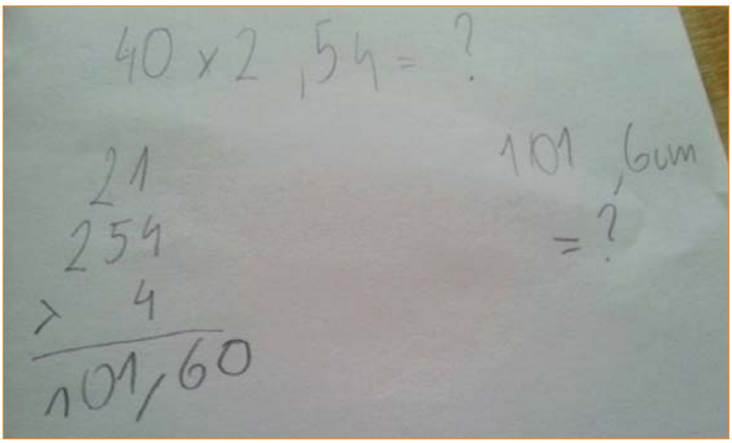
Pierwsza część rachunku nie sprawiła Kubie trudności. Sprawnie dokonał mnożenia. 2 razy 40 dało mu wynik 80. Jednak kiedy trzeba było pomnożyć 0,54 razy 40, pojawił się drobny problem. Z pomocą Kubie przyszedł Janek, który powiedział, że obliczenie to wykona, korzystając z kalkulatora. I tak też zrobił:

40 x 0,54 = 21,6

Janek podał obliczoną wartość Kubie, na co chłopiec zareagował uśmiechem i powiedział, że wystarczy teraz tylko dodać te dwa wyniki i będziemy już mieli wynik naszego obliczenia. Na tablicy pojawił się zapis 80 + 21,6 = 101,6 centymetra. Byłam pełna podziwu dla zaradności Kuby i Janka.

Zaciekawił mnie jednak jeszcze inny sposób wykonania tych obliczeń, którego autorem był inny Kuba. Chłopiec zaproponował sposób, który znał, bo: „pokazała mi go mama”. Poprosiłam, by chłopiec zapisał swój sposób.

Tak przedstawiały się obliczenia Kuby.



Poprosiłam ucznia, by wytłumaczył mi swój sposób myślenia.

– *Zapisuję 2,54 bez przecinka i mnożę przez 4, ponieważ mnożenie przez zero daje zero. Pamiętam o przecinku i o zerze. Kiedy mam wynik 1016 dopisuję zero i stawiam przecinek* – tłumaczy Kuba.
– *Gdzie stawiasz ten przecinek?* – pytam dociekliwie.
– *Między 1 a 6. Dwa miejsca od końca.*
– *A dlaczego właśnie dwa miejsca od końca?* – pytam.
– *Bo tak było w liczbie 2,54* – tłumaczy już trochę zmęczony chłopiec.

Podczas podsumowania tematu usłyszałam, że 40” telewizor ma 101,6 centymetra. Zastanowiło mnie jednak, czy uczniowie wiedzą, która długość w telewizorze określana jest w calach. Postanowiłam nie czekać dłużej i zapytałam wprost.

– *A jak myślicie, która długość w telewizorze określona jest za pomocą cali?*

Poprosiłam uczniów, by spróbowali wskazać mi tę długość, wykorzystując do tego celu tablicę interaktywną w naszej klasie. Do tablicy podszedł Paweł, który wskazując przekątną tablicy, powiedział:

– *To tak jakby przeciąć telewizor po skosie.*

Dokładność i obrazowość wyjaśnienia zaproponowana przez Pawła wyczerpująco odpowiedziała na postawione przeze mnie pytanie. Po tak dokładnej prezentacji uczniowie postanowili zmierzyć przekątną w swoich telewizorach domowych. Zadanie domowe zapowiadało się znów ciekawie i widać było, że nie będzie to przykry obowiązek, lecz wielka frajda zamiany cali na centymetry.

Cały rok pracy przyniósł wiele podobnych sytuacji, które sprowokowane były pytaniami uczniów. Za każdym razem mój sposób wychodzenia z tych sytuacji był podobny, a kończył się samodzielnym poszukiwaniem drogi przez uczniów. Każda nowa sytuacja przynosiła nowe doznania i nową wiedzę. Wiedzę, którą z łatwością uczniowie będą mogli wykorzystać „później".

REFLEKSJE KOŃCOWE

Wydawało mi się, że moim głównym zadaniem jest przekazywanie wiedzy, utwierdzanie dzieci w tym, czego już dokonały, stawianie kropki nad i w procesie edukacyjnym uczniów. Oczywiście zawsze starałam się umożliwiać uczniom doświadczanie wiedzy, konstruując tak proces lekcyjny, by możliwości eksperymentowania były jak największe. Dzieci chętnie działają, a później z jeszcze większym zaangażowaniem opowiadają o swoich doświadczeniach. Podróż w krainę pytań matematycznych postawiła mnie jako nauczyciela trochę w innym punkcie niż dotychczas.

Bardziej jako drogowskaz niż wyrocznia…

Może tak… …? A co myślisz… …?

Świetnie… …!

...i miejsce to naprawdę mi odpowiada.

Zmiany, które zaszły w ciągu minionego roku szkolnego (2012/2013), dotyczyły nie tylko mojego postrzegania rzeczywistości matematycznej. Objęły one również uczniów. Wzrosła ich pewność i otwartość oraz chęć podejmowania wyzwań. Zajęcia nie stanowiły już tylko obowiązku. Dawały możliwości samodzielnego budowania wiedzy matematycznej, przeszukiwania świata i labiryntów królowej nauk. Priorytetem dla uczniów stało się eksperymentowanie, analizowanie i wnioskowanie – jednym słowem doświadczanie. Doświadczanie, które pozostaje na długo w pamięci, które stanowi początek czegoś nowego. Zajęcia te dały nową jakość nauczanej przeze mnie matematyce. Już w trakcie roku szkolnego zauważałam wzrost umiejętności w zakresie tego przedmiotu. Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie nie stanowiły już sedna zajęć matematycznych dzieci, które uczyłam. Owszem, każdą z wymienionych wcześniej operacji rachunkowych uczniowie doskonalili w ciągu całego roku, jednak pojawiły się umiejętności, których przecież wcale nie oczekiwałam. Umiejętności w zakresie „wyższej" matematyki, które zaskoczyły mnie samą. Jakie? Wnioskowanie, dostrzeganie prawidłowości, analizowanie zadań, sytuacji, umiejętność działania na liczbach w rozszerzonym zakresie, biegłość wykonywania działań, umiejętność konstruowania praw i prawideł zauważonych podczas pracy nad danym zagadnieniem matematycznym, umiejętność operowania jednostkami miar, przekształcanie tych miar do „własnych" potrzeb. Doskonalenie zdobytych już umiejętności w tak szerokim zakresie będzie przekładało się na kolejne sukcesy uczniów, na ich pewność w dokonaniu analizy zadania nietypowego, chęć działania na liczbach dziesiętnych i ułamkach. Na pewność poradzenia sobie z geometrią przestrzenną, bez obawy o efekty tego doświadczenia. I co równie istotne, moją pewność co do celowości procesów, w których uczniowie biorą i będą brali udział.

Któż mógłby przypuszczać, że tak istotne miejsce w tej nowej jakości samodzielnego budowania wiedzy matematycznej zajmują pytania matematyczne, które stawiali, stawiają i zapewne będą stawiać uczniowie. To właśnie pytania wskazały na procesy myślowe dzieci, ich wiedzę w zakresie matematyki i sposoby radzenia sobie z sytuacjami nietypowymi. Wystarczy pozwolić dzieciom myśleć, działać, doświadczać, zadawać pytania, być z nimi i wspomagać w poszukiwaniu odpowiedzi. Otworzymy w ten sposób kolejne drogi do budowania samodzielnego świata wiedzy i nauki. Drogi umożliwiające uczniom swobodne poruszanie się i pewne przeszukiwanie labiryntów matematyki i nie tylko matematyki.

Większość nauczycieli traci czas na zadawanie pytań, które mają ujawnić to, czego uczeń nie umie, podczas gdy nauczyciel z prawdziwego zdarzenia stara się za pomocą pytań ujawnić to, co uczeń umie lub czego jest zdolny się nauczyć[2].

Albert Einstein

Pozostawiam Was, drodzy Czytelnicy, z myślą wielkiego uczonego, życząc wielu ciekawych pytań na ścieżkach edukacji matematycznej.

---

[2] www.cytaty.eu.

Agata Kazimierczak
nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej Szkoły Podstawowej nr 14 im. gen. Władysława Sikorskiego w Bydgoszczy,
refleksyjna entuzjastka, w zawodzie 13 lat.

NIE ZAWSZE 5 + 6 JEST RÓWNE 11,CZYLI MOJE METODY PRACY NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ W KLASIE DRUGIEJ

Dorota Kubiak

Opiszę wybrane sytuacje edukacyjne, w których zastosowane **sposoby pracy** przyniosły interesujące efekty, zaskoczyły mnie lub innych. Postaram się pokazać, w jaki sposób wzbogaciły mnie i moich uczniów. Tak więc główną bohaterką (choć nie tytułową) mojej pracy będzie ZMIANA. Jest ulotna i kapryśna, pojawia się i znika, trudno ją zmierzyć i opisać. Będziemy ją obserwować poprzez działania grupy dynamicznych drugoklasistów ze Szkoły Podstawowej nr 14 w Bydgoszczy oraz mnie – ich wychowawczyni, która postanowiła się ze ZMIANĄ zaprzyjaźnić.

Jacy byliśmy przed ZMIANĄ? Czego i w jaki sposób się uczyliśmy?

Grupa 20 uczniów (9 dziewczynek i 11 chłopców), z których pięcioro rozpoczęło naukę w klasie pierwszej, mając sześć lat. Klasa jest zróżnicowana; 13 dzieci osiąga bardzo dobre wyniki w nauce, 4 przejawia trudności w opanowaniu czynności czytania i pisania, jedno w uczeniu się matematyki. Na początku klasy pierwszej przeprowadziłam diagnozę wstępną, dotyczącą gotowości do uczenia się matematyki. Tylko pięcioro dzieci wykazało się rozumowaniem na poziomie operacyjnym, dziewiętnaścioro stosowało zasady związane z liczeniem, siedemnaścioro miało w pełni ukształtowane intuicje dotyczące dodawania i odejmowania. Ponieważ jestem także terapeutką trudności w uczeniu się, skupiłam się w pierwszym roku nauki na działaniach stymulujących rozwój myślenia operacyjnego. Podczas zajęć matematycznych bardzo często stosowałam gry i zabawy dydaktyczne z wykorzystaniem kart, domina, i kostek. Poza tym kierowałam się programem nauczania, nie rozszerzałam nadmiernie planowanego zakresu liczbowego. Dzieci rozwiązywały zadania tekstowe zawarte w pakiecie, sprawnie układały, rozwijały i przekształcały zadania, a ja miałam poczucie dobrze zorganizowanej pracy dydaktycznej. Większość dzieci deklarowała, że woli zajęcia matematyczne od polonistycznych (prawdopodobnie dlatego, że matematyka była dla nich łatwa i atrakcyjna ze względu na dużą liczbę gier). Gdy rozpoczynały naukę w drugiej klasie, szesnaścioro uczniów osiągnęło poziom myślenia operacyjnego. Większość dzieci uczestniczyła w zajęciach Odysei Umysłu (program rozwijający umiejętność twórczego rozwiązywania problemów – www.odyseja.org) i elementy tego programu wplatałam w zajęcia lekcyjne. Miałam wrażenie, że charakteryzowały się większą niż przeciętnie płynnością, giętkością i oryginalnością myślenia. Dość sprawnie współpracowały w grupach, a nawet potrafiły mierzyć jakość pracy zespołowej współpracometrem (narzędzie stosowane przez uczestników programu „Odyseja Umysłu").

Taki był właśnie stan mojej klasy, kiedy nadszedł listopad 2012 roku, a wraz z nim nadeszła ZMIANA.

Klasa 2b gotowa na ZMIANĘ

Opowieść o różnych sposobach rozwiązywania zadań o głowach i nogach oraz o nieoczekiwanym efekcie matematycznym akcji „Owoce w szkole"

Pewnego dnia zaproponowałam uczniom rozwiązanie zadania nowego typu. Dzieci pracowały w parach. Zapisałam dwa zadania do wyboru.

Zadanie 1. ***Po zielonej trawie chodzą sarny i pawie. Razem mają 6 głów i 20 nóg. Ile jest saren, a ile pawi?***

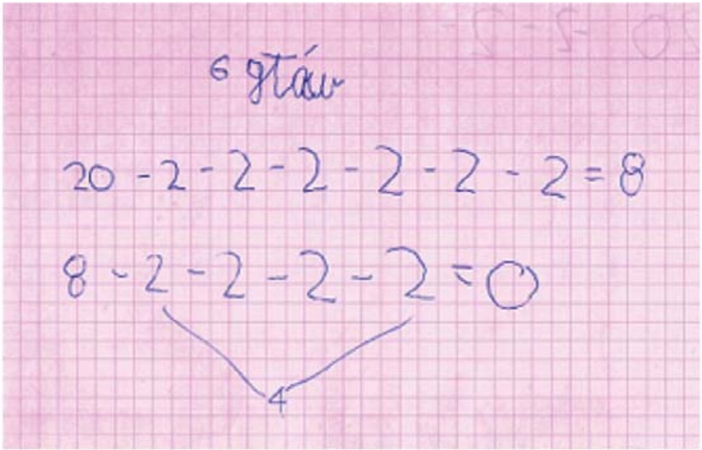
Zadanie 2. ***Po kwietniowej łące chodzą bociany i kicają zające. Razem mają 4 głowy i 12 nóg. Ile jest bocianów, a ile zajęcy?***

Dzieci dyskutowały nad sposobem rozwiązania. Jedna z dziewczynek zapytała, czy można zrobić rysunek. Większość grup skorzystała z tej sugestii. 8 na 10 par wykonało zadanie prawidłowo. Pojawiły się różne sposoby rozwiązania, które zostały zaprezentowane przed całą klasą.

1. Olivia i Natalia: *Rysowałyśmy i mazałyśmy, rysowałyśmy i mazałyśmy, bo albo robiło nam się za dużo głów albo nóg. Aż wreszcie się zgodziło* (zadanie 1).

Tak rysowały i mazały Olivia i Natalia

2. Jana i Weronika: *Myśmy narysowały 4 głowy, a potem do każdej po jednej kresce i jeszcze jednej. Potem policzyłyśmy, ile zostało i znów, ale już po dwie* (zadanie 2.).
3. Kacper i Karolina: *A my trochę jak Jana i Wera, ale od razu wszystkim głowom daliśmy dwie nogi. A potem tyle, ile starczyło* (zadanie 1.).
4. Dawid i Filip: *Myśmy dodawali dwójki i czwórki, tak żeby było 20. Tylko na początku zapomnieliśmy, że tych liczb musi być 6 i przez to jeden paw nam wyszedł bez głowy* (zadanie 1.).
5. Julka i Martyna: *Pomnożyłyśmy 4 zwierzęta razy 2 nogi i jeszcze zostały 4. To wystarczyło dla 2 zajęcy. Więc były 2 bociany i 2 zające* (zadanie 2.).
6. Miłosz i Michał: *Odejmowaliśmy od 20 po 2 sześć razy. I to co zostało znowu po 2 aż do zera. I wtedy już było widać* (zadanie 1.).



Pomysłowe rozwiązanie Michała i Miłosza

7. Kacper i Kevin: *Wzięliśmy swoje jabłka i jeszcze 2 od Michała, a potem wziąłem swoje palce i 2 pożyczyłem od Kevina i tak je przytykaliśmy* (zadanie 2.).

Matematyczny efekt akcji „Owoce w szkole"

Sposób rozwiązania zadania przez Kacpra i Kevina ogromnie mnie zaskoczył. Twórcze wykorzystanie jabłek i palców przez chłopców było absolutnie nie do przewidzenia. Jeszcze większym zaskoczeniem była aktywność Kacpra, który, jak zaobserwowałam, był motorem tego przedsięwzięcia. Prawdę mówiąc, nie spodziewałam się, że właśnie ta para prawidłowo wykona zadanie. Obaj chłopcy przejawiali trudności w nauce. Badanie z października 2012 r. wykazało u nich poziom myślenia przedoperacyjnego. Poza tym, w sytuacjach zadaniowych przejawiali bierność i wycofywali się, jeżeli musieli dokonać wysiłku intelektualnego. Tym bardziej zachwyciła mnie ich inwencja. Wykonali skomplikowane zadanie, posługując się po prostu nietypowymi konkretami zastępczymi i rozwiązując je w sposób dostępny dla logiki przedoperacyjnej. Dzieci nagrodziły chłopców brawami, których wyraźnie to uszczęśliwiło i prawdopodobnie było momentem przełomowym, jeśli chodzi o motywację do uczenia się matematyki.

Opowieść o tym, że 5 + 6 to nie zawsze 11, czyli o rozwiązywaniu zadania z danymi bardziej ukrytymi niż myślałam

Czytaliśmy „Kubusia Puchatka". Lektura ta stała się źródłem inspiracji do przygotowania przeze mnie zadania tekstowego z danymi ukrytymi:

Kubuś Puchatek i Prosiaczek postanowili wspólnie wyprawić swoje urodziny. Kubuś zaprosił 5 przyjaciół, a Prosiaczek 6. Ile osób uczestniczyło w przyjęciu?

Celem zadania było wdrożenie dzieci do uważnego czytania oraz analizowania tekstu wraz z wyszukiwaniem danych ukrytych, które nie są wyrażone liczbą, natomiast wpływają na rozwiązanie. Treść zapisałam na tablicy. Dzieci miały przeanalizować zadanie w parach i rozwiązać je. Zgodnie z przewidywaniami większość zrobiła zadania dosłownie w minutę. Podawały propozycje rozwiązania i błyskawicznie zgłaszały gotowość. Poprosiłam o przedstawienie rozwiązania Dawida i Filipa, którzy na ogół doskonale radzą sobie z rozwiązywaniem złożonych zadań tekstowych.

Dawid: *Zrobiliśmy dodawanie 5 + 6 = 11.*

Ja: *Dlaczego? Co oznaczają poszczególne liczby w zapisanej przez was formule?*

Filip: *5 to goście Kubusia, a 6 Prosiaczka.*

Ja: *A 11?*

Filip: *To wszyscy na tym przyjęciu.*

Ja (z przedwczesnym poczuciem triumfu *Aha, mam was!*): *Rozumiem, że Kubusia i Prosiaczka na tym przyjęciu nie było i goście bawili się sami bez gospodarzy?*

Teraz nastąpił moment, którego w zasadzie mogłam się spodziewać. Dawid jest jednym z klasowych mistrzów w twórczym rozwiązywaniu problemów. W takich sytuacjach nie poddaje się, tylko próbuje błyskawicznie znaleźć logiczne uzasadnienie swego rozwiązania. Obserwacja tego procesu jest fascynująca.

Dawid: *Byli, byli. Tylko że Prosiaczek jest przyjacielem Kubusia, Kubuś przyjacielem Prosiaczka, byli na liście gości, więc ich nie liczyliśmy osobno.*

Miłosz: *Ale oni mogli mieć więcej wspólnych gości. Jakby obaj zaprosili Krzysia, to wtedy osób jest 10.*

Michał: *A Królik? To by było jeszcze mniej.*

Dawid: *No tak, bo gdybyśmy my z Filipem robili razem imprezę, to byśmy mieli dużo tych samych gości.*

Filip: No na pewno Huberta i Oskara.

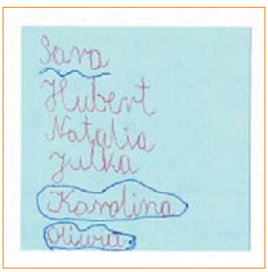
Dawid: *I Michała, i jeszcze Julkę.*

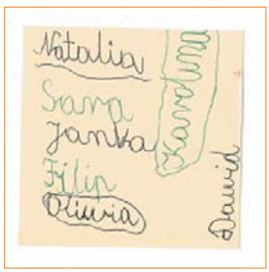
Ja: *W takim razie zastanówcie się i powiedzcie, jaka będzie najmniejsza i największa możliwa liczba gości?*

Michał: *Najwięcej 13, a najmniej chyba 7.*

Dawid: *Albo 6*

Zaproponowałam, aby wszyscy spróbowali sytuację z zadania zmienić w sytuację życiową. Dzieci podzieliły się na dwie grupy. Uczniowie z pierwszej grupy mieli zapisać imiona pięciu osób z klasy, które chcieliby zaprosić na przyjęcie, a druga grupa sześciu (każdy pisał indywidualnie na swojej kartce). Następnie uczniowie losowo dobrali się w pary, przeanalizowali zapisy na karteczkach, a dane zapisali w tabeli na tablicy.





Lista gości Sary i Natalii

Imiona	Liczba gości wyłącznie 1. gospodarza	Liczba gości wyłącznie 2. gospodarza	Liczba wspólnych gości	Liczba gospodarzy, jeśli nie są gośćmi	Razem
Natalia Sara	4	3	2	0	9

Na podstawie analizy danych w tabeli okazało się, że najmniejsza liczba gości to 7, największa to 13. To zadanie ma 7 możliwych rozwiązań. Nie wszystkie rozwiązania pojawiły się w tabeli, ale Martyna i Kacper podali prawidłowo oba brakujące.

Praca nad przedstawionym zadaniem trwała około dwóch godzin lekcyjnych. Nie był to jednak czas stracony.

Gdy podsumowywaliśmy zajęcia, zadałam pytanie o to, co ich zaskoczyło, co zapamiętają, o czym chcieliby opowiedzieć innym. Oskar stwierdził: *Najdziwniejsze było to, że nie zawsze 5 + 6 jest równe 11*.

Opowieść o tym w jaki sposób zabawa w sklep uczy matematyki i przygotowuje przyszłych rekinów biznesu

Zabawa w sklep jest jedną z bardziej ulubionych form aktywności matematycznej moich drugoklasistów. Rozpoczęła się już w pierwszej klasie. Początkowo miała być to jednorazowa zabawa tematyczna przy okazji obliczeń pieniężnych. Dzieci podzieliły się na pięć grup czteroosobowych. Każda z nich otrzymała 200 złotych w różnych nominałach jako kapitał początkowy zakładanego sklepu. Z gazetek reklamowych mogli wyciąć po 15 artykułów, nakleić na tekturki i wycenić od 1 do 20 złotych. Następnie kierownicy sklepów wyznaczyli sprzedawcę i kupców. Kupcy zajmowali się zakupami interesujących ich produktów w innych sklepach. Dzieci płaciły należność, wydawały resztę, rozmieniały monety i banknoty. Zabawę powtarzałam wielokrotnie na ich prośbę, tym chętniej, że widziałam, z jakim zapałem wykonują obliczenia pieniężne (również z zamianą jednostek).


Pracownica sklepu przy kasie

Następnie zespoły sklepowe po zakończeniu zabawy obliczały zysk i część przeznaczały na pensje dla pracowników albo inwestowały w towary z hurtowni. Za określoną kwotę można było bowiem w hurtowni (czyli u mnie) kupić stronę z gazetki „w ciemno” (tu pojawiało się ryzyko, że część artykułów będzie nieatrakcyjna i będzie je trudno sprzedać), za wyższą wskazane artykuły, za jeszcze wyższą wycięte i naklejone na tekturki.

W klasie pojawiła się waluta, za którą można było kupić nie tylko towary sklepowe lecz również dobra limitowane (związane z tradycją funkcjonującą w naszej klasie) np. przywilej losowania patyczków do oceniania kształtującego, miękkie krzesło, gwarantowane miejsce w pierwszej parze, wybór zabawy na zakończenie tygodnia aktywności, wypożyczenie gry klasowej na weekend, rysowanie na tablicy itp. Cennik został skrupulatnie spisany za porozumieniem stron. Chęć skorzystania z przywilejów sprawiła, że dzieci starały się sprzedać jak najwięcej towarów, także tych, które zalegały na wyimaginowanych półkach. Dlatego też co pewien czas ogłaszano przeceny i promocje. Oto niektóre z nich:

1. Wszystkie produkty 50% taniej (okazało się, że rozumienie 50% jako połowy jest powszechne i większość dzieci sprawnie oblicza wartość przecenionych produktów. Gdy zadałam pytanie dotyczące 25%, Oskar stwierdził, że to: *połowa połowy*).
2. Jeżeli suma cen dowolnej liczby produktów jest podzielna przez 10, to produkt najtańszy otrzymujesz gratis.
3. Jeśli sumę cen produktów można podzielić przez 2, płacisz 50%, jeśli przez 4 – 25%, jeśli przez 5 – 20%, jeżeli przez 10 – 10%.

Dwie pierwsze promocje były pomysłem dzieci, ostatnia moim, ponieważ zwrócił moją uwagę poziom intuicji dotyczący procentów i byłam ciekawa, jakie są możliwości dzieci w tym zakresie. Większość swobodnie radziła sobie z przecenami 50%, a kilkoro dzieci zrozumiało od razu sens matematyczny pozostałych. Ponieważ były to przeceny bardzo korzystne dla potencjalnych klientów, wobec tego dzieci miały ogromną motywację, żeby z nich skorzystać i same szukały ekspertów, którzy potrafiliby im to wytłumaczyć. W efekcie niemal wszyscy zrozumieli zasady promocji. Jedna z kasjerek poprosiła o kalkulator, aby móc sprawdzać obliczenia klientów, więc tego dnia kalkulatory stały się elementem wyposażenia sklepowego. Obserwowałam, w jaki **sposób** dzieci uczą się od siebie i jak motywacja wewnętrzna wpływa na efekty uczenia się.

Opowieść o tym, że dziecko ma prawo…, czyli o matematycznej aktywności naukowej potencjalnych noblistów

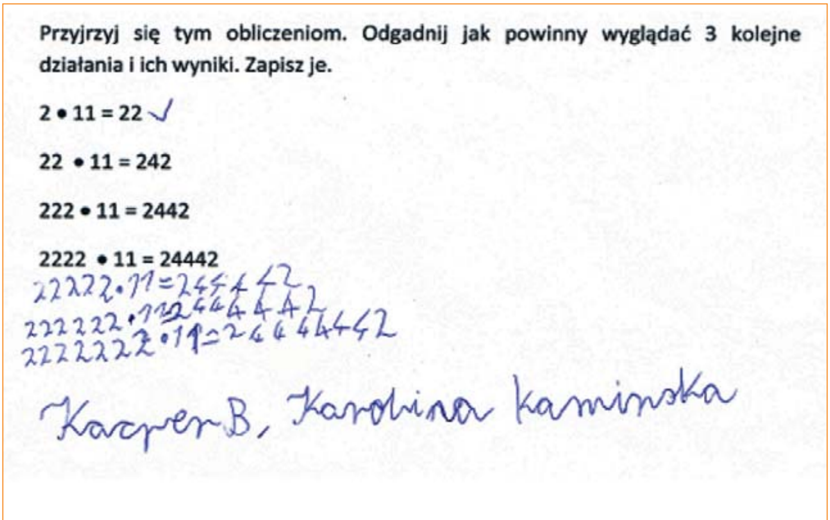
W klasie powstał **K**ącik **W**spierania **A**ktywności **N**aukowej i **T**wórczej (KWANT). Pewnego dnia w tym właśnie miejscu zaczęły się pojawiać kartki formatu A4 z zapisanymi prawami matematycznymi. Stanowiły efekt wysiłku intelektualnego siedmio- i ośmiolatków, którzy dostrzegli jakieś prawidłowości podczas rozwiązywania rozmaitych problemów matematycznych. Autor formułował je ustnie, prezentował przed całą klasą przykłady, wyjaśniał je, a potem odpowiadał na ewentualne pytania. Jeśli prawo zostało zatwierdzone, młody naukowiec zapisywał je własnoręcznie, a ja przepisywałam je na komputerze. Odbywała się sesja fotograficzna i dopiero wówczas kartkę z prawem nazwanym imieniem jego autora wieszaliśmy na tablicy.

Mam wrażenie, że do spostrzegania prawidłowości przy okazji działań matematycznych przyczynił się przede wszystkim cykl zajęć z sekwencjami. Okazało się, że dzieci błyskawicznie zrozumiały zasadę, a możliwość szybkiego określenia w sekwencjach dwójkowych, piątkowych i dziesiątkowych, jaka liczba, litera lub obrazek znajdują się na np. 1784 miejscu (przypominam, że zgodnie z programem wykonywać powinny wówczas zadania w zakresie 30), była dla nich źródłem radości i satysfakcji. Chętnie się więc popisywały, traktując to trochę jak intelektualną sztuczkę cyrkową. Między innymi seria zadań z różnokolorowymi kwiatami, ułożonymi w sekwencje piątkowe stanowiła element programu prezentowanego podczas Święta Rodziny i wzbudziła aplauz.

Jeden z chłopców przystępnie wyjaśnił wówczas zasadę i zaprosiliśmy zachwyconych rodziców do wspólnej zabawy. lektualną sztuczkę cyrko

– Jaki kwiatek znajduje się na 1 898 989 898 miejscu? – Pomarańczowy!

Dostrzeganie prawidłowości było niezbędne do wykonania zadań przedstawionych poniżej. Niektóre dzieci stwierdziły, że działania na tak dużych liczbach są za trudne, więc zaproponowałam im kalkulatory. Wkrótce większość dzieci je odłożyła, ponieważ zauważyli, że mogą sobie poradzić bez nich.


Przyjrzyj się tym obliczeniom. Odgadnij jak powinny wyglądać 3 kolejne działania i ich wyniki. Zapisz je.

2 • 11 = 22

22 • 11 = 242

222 • 11 = 2442

2222 • 11 = 24442

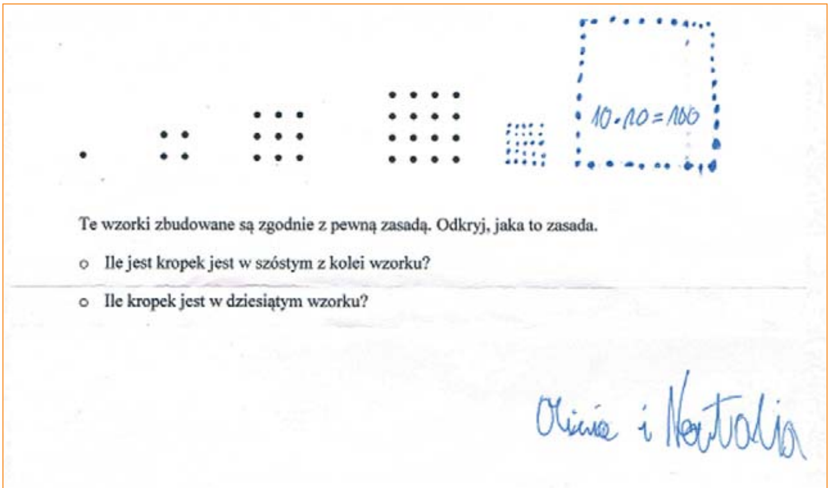
22222·11=244442

222222·11=2444442

2222222·11=24444442

Kacper B, Karolina Kaminska

Rozwiązanie – bez kalkulatora

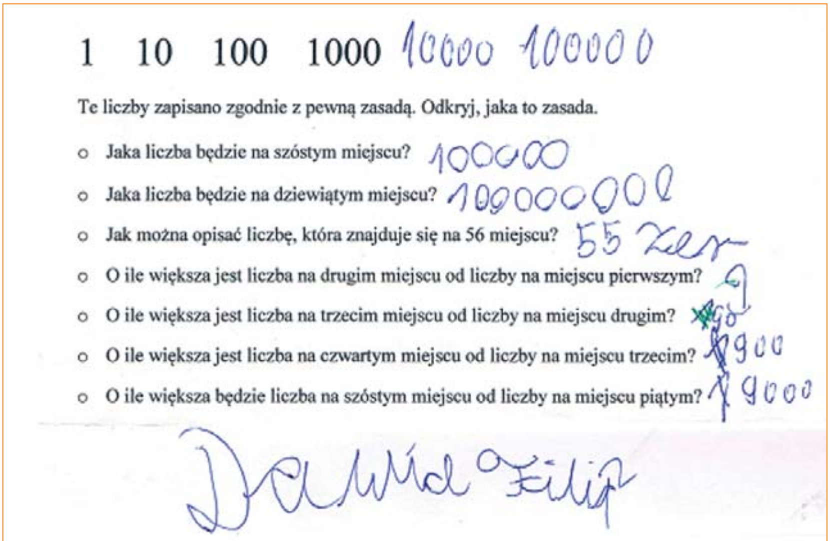


Te wzorki zbudowane są zgodnie z pewną zasadą. Odkryj, jaka to zasada.

- Ile jest kropek jest w szóstym z kolei wzorku?
- Ile kropek jest w dziesiątym wzorku?

Olivia i Natalia

Olivia i Natalia zmęczyły się rysowaniem kropek
i przedstawiły rozwiązanie mieszane arytmetyczno-graficzne


1 10 100 1000 10000 100000

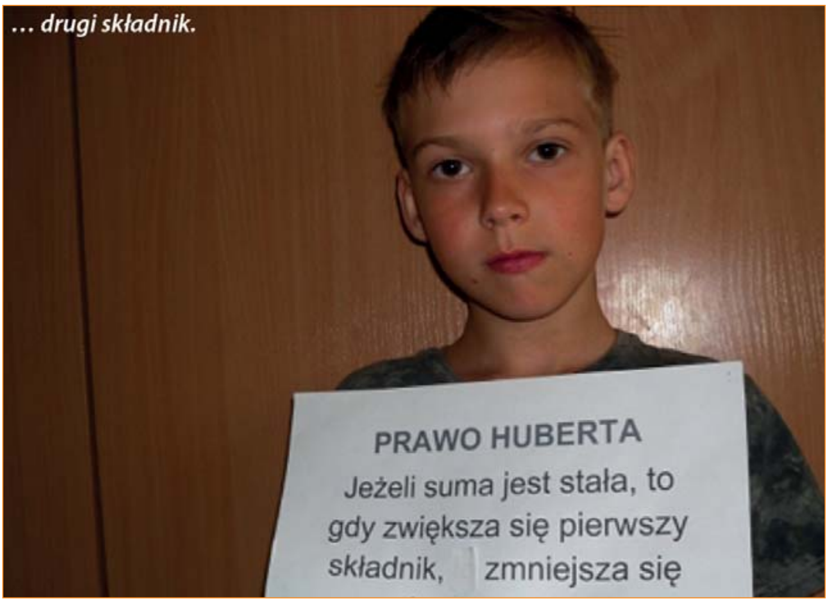
Te liczby zapisano zgodnie z pewną zasadą. Odkryj, jaka to zasada.

- Jaka liczba będzie na szóstym miejscu? 100000
- Jaka liczba będzie na dziewiątym miejscu? 100000000
- Jak można opisać liczbę, która znajduje się na 56 miejscu? 55 zer
- O ile większa jest liczba na drugim miejscu od liczby na miejscu pierwszym? 9
- O ile większa jest liczba na trzecim miejscu od liczby na miejscu drugim? 90
- O ile większa jest liczba na czwartym miejscu od liczby na miejscu trzecim? 900
- O ile większa będzie liczba na szóstym miejscu od liczby na miejscu piątym? 9000

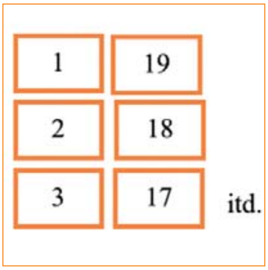
Dawid Filip

Dawid i Filip opisując liczbę na 56 miejscu skupili się na liczbie zer

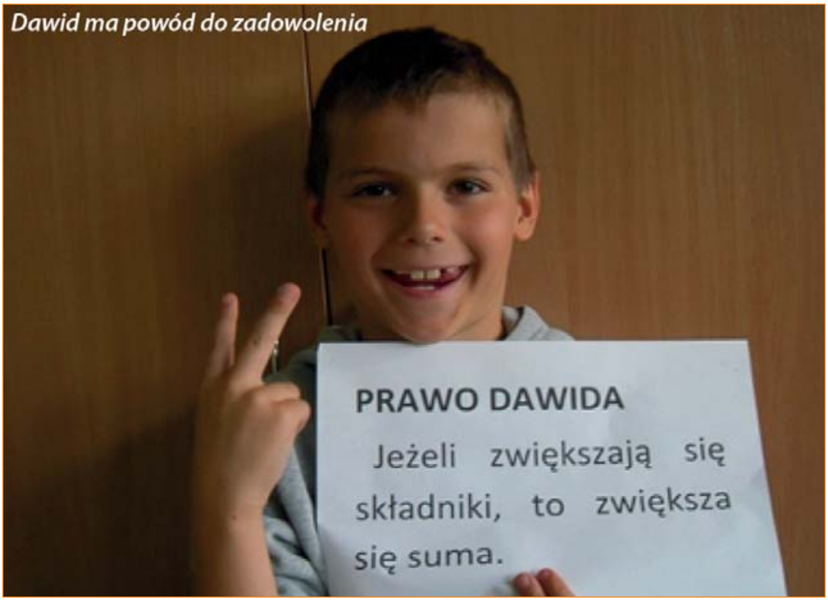
Mam wrażenie, że praca z sekwencjami sprawiła, że dzieci zaczęły kierować uwagę na regularności. Pierwsze zostało sformułowane ***prawo Huberta***:



Hubert, podobnie jak Newton i paru innych wybitnych naukowców, swojego odkrycia dokonał przypadkiem. Duże przerwy spędzamy na boisku szkolnym lub sali gimnastycznej. Tego dnia część dzieci chciała grać w piłkę w sali gimnastycznej, natomiast pozostali zdecydowanie optowali za boiskiem. Zarządziłam głosowanie. Zwolennicy boiska wygrali glosowanie w stosunku 11:9. Rozgorzała dyskusja, dotycząca tego, co by było, gdyby... Wykorzystałam tę sytuację i poprosiłam, aby zapisali, jak inaczej mogłyby się rozłożyć głosy (każdy na osobnej kartce), a następnie ułożyli na podłodze w sposób uporządkowany:



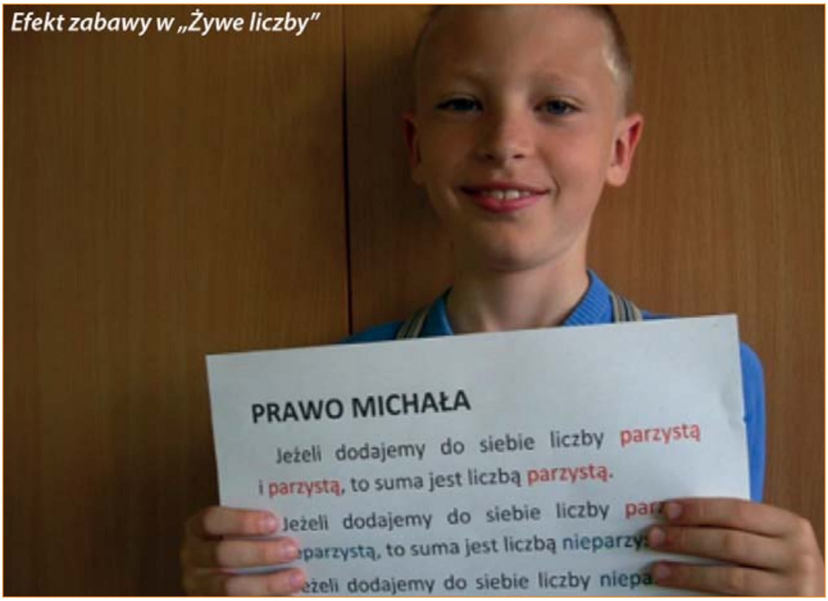
Wtedy właśnie Hubert zauważył, że jeśli zwiększa się pierwszy składnik, to zmniejsza się drugi.



Dawid ma powód do zadowolenia

Prawo Dawida. Dzieci rozwiązywały zadanie z niedoborem danych: *Adam miał 4 samochody, Kuba też pewną liczbę aut. Ile mieli razem samochodów?* Możliwe rozwiązania przedstawiono w formie tabeli, na podstawie której Dawid sformułował swoje prawo.

Samochody Adama	**Samochody Kuby**	**Razem**
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
itd.	...	...



Efekt zabawy w „Żywe liczby”

Prawo Michała. Michał sformułował swoje prawo podczas zabawy w „Żywe liczby”. Dzieci (z przyklejonymi liczbami) dobierały się parami w taki sposób, aby suma ich liczb była liczbą parzystą. Następnie pary dobierały się tak, aby suma była liczbą nieparzystą. Bystry obserwator już po kilku powtórzeniach zauważył prawidłowości.

Kolejna próba stworzenia własnego prawa skończyła się powodzeniem

Prawo Miłosza. Mieć swoje własne prawo było wielkim i przez długi czas niespełnionym marzeniem Miłosza. Dwukrotnie ktoś go ubiegł, kilka razy podejmował próbę sformułowania prawa, ale bez sukcesu. Rozwiązywaliśmy jakieś standardowe zadanie tekstowe. Zadałam pytanie, jak można sprawdzić, czy zadanie zostało poprawnie wykonane i otrzymałam odpowiedź, którą widzimy na zdjęciu. Chcę zaznaczyć, że było to jeszcze przed wprowadzeniem na zajęciach mnożenia i dzielenia.

Opowieść o tym, (w) co jest grane i czego można się w ten sposób nauczyć

Gry i zabawy uatrakcyjniają zajęcia matematyczne. Wykorzystujemy do nich karty, domino, kostki, fasolki, miary krawieckie, plansze wykonane przez dzieci. Źródłem pomysłów jest literatura, warsztaty, strona www.trzecioklasista.pl, pomysły własne i innych Bąblowiczek oraz propozycje uczniów. Sam pomysł uczenia matematyki za pomocą gier i zabaw nie jest efektem ZMIANY. Zmienił się natomiast sposób pracy z grami. Miałam głębokie przekonanie, że podstawowym warunkiem nie tylko atrakcyjności, ale też efektywności jest przerywanie zabawy w momencie, kiedy dzieci były bardzo nią zainteresowane. Zazwyczaj tego samego dnia nie powtarzaliśmy gry, nawet jeśli dzieci o to prosiły. W zamian proponowałam kolejną lub przechodziliśmy od zabawy do treningu, ponieważ większość z nich miała na celu usprawnianie biegłości liczenia.

„Wyprawa po skarb” jest inspirowana opowieścią jednej z Bąblowiczek. Mogą grać w nią dwie osoby lub dwie grupy. Potrzebna jest miara krawiecka i 2 spinacze biurowe lub klamerki do bielizny. Jeden spinacz wpinamy w pole startowe (czyli 1). Drugi wpina się w ustalone pole na miarce (tam znajduje się skarb). Następnie gracze na zmianę przesuwają spinacz z pola startowego o jedno lub dwa pola. Ten, kto dotrze na pole ze skarbem, wygrywa. Gra wymaga kilku powtórzeń.

Była to jedna z pierwszych gier, w którą graliśmy po ZMIANIE (grudzień 2012 r.). Po raz pierwszy zagrałam SAMA przeciw całej klasie. Każdy miał swoją miarę, aby móc śledzić postęp wyprawy. Skarb znajdował się na polu 20. Ustaliliśmy losowo, że to ja ją rozpocznę. Na zmianę przesuwaliśmy spinacz i wygrałam. Dzieci poprosiły o rewanż. Tym razem one rozpoczynały. Gdy stanęłam na polu nr 17, Oskar zawołał: *No to już pani wygrała!*

Ja: *Skąd wiesz?*

Oskar: *Teraz my dodamy 1 i staniemy na 18, albo 2 i będziemy na 19. To bez znaczenia. Potem pani ruch i już po nas!*

Ja: *Rozumiem, że ten co stanie na polu 17, wygrywa. Zastanówcie się, na której liczbie trzeba stanąć, aby znaleźć się na polu 17. Porozmawiajcie o tym w parach i sprawdźcie na miarach.*

Michał (po chwili): *Na czternastce.*

Ja: *Weźcie dodatkowe spinacze i wepnijcie je w pola 14 i 17. Przyjrzyjcie się mierze. Czy coś zauważyliście?*

Jana: *One są tak ułożone: spinacz, dwa pola, spinacz, dwa pola, spinacz. Ułożył się taki wzorek.*

Dawid: *Te spinacze są na polach, z których się wygrywa.*

Ja: *To być może, jest więcej takich pól. Zastanówcie się i wepnijcie w nie spinacze.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Cztery pary wpięły spinacze we wszystkie zaznaczone pola, trzy tylko w pole 11. Dwie w 11 i dwa inne przypadkowe. Zaproponowałam, aby teraz rozegrały wyścig między sobą. Następnie zapowiedziałam rozgrywkę ostateczną, ale przedtem wszystkie dzieci zebrały się w kręgu na dywanie, aby omówić strategię. Tym razem rozpoczynali uczniowie, ponieważ Hubert zauważył, że ten kto rozpoczyna, ma większą szansę na wygraną. Cóż, tym razem przegrałam i sprawiło mi to pełną satysfakcję. Do tej gry wracaliśmy jeszcze kilkakrotnie, zmieniając warunki, np.:

– Które liczby dadzą zwycięstwo, jeśli skarb zostanie umieszczony na polu 21?
– Które liczby dadzą zwycięstwo, jeśli skarb pozostanie na polu 20, ale będzie można przesuwać spinacz o 1, 2 lub 3 pola?

Dzieci formułowały hipotezy, a potem weryfikowały je w czasie gry. Jednym z zadań domowych było rozegranie zwycięskiego pojedynku z rodzicami oraz wytłumaczenie im strategii. Jedna z mam przytoczyła słowa swojego syna: Mamusiu, jeśli chcesz wygrać, musisz się uczyć matematyki!

Miarę krawiecką i spinacze wykorzystałam także w zabawie ***„Grzybobranie”***. Tym razem potrzebne były jeszcze dwie kostki i dwie klamerki. Na metrowej mierze dzieci wpinały umówioną liczbę spinaczy (sugeruję 20–25), a na polach krańcowych klamerki, które pełniły funkcje pionków. Dwaj gracze na przemian rzucali kostkami i przesuwali swoje klamerki, zgodnie z wynikiem działań. Oczka na kostkach można dodawać, odejmować, mnożyć lub dzielić, w zależności od podjętej decyzji. Jeśli gracz trafi na pole ze spinaczem, zdejmuje go. Gra kończy się w momencie, gdy obaj uczestnicy dotrą do przeciwległego końca miary. Wygrywa ten, który zbierze więcej spinaczy.


Rywalizacja przeradza się we współpracę


Miłosz odkrywa strategiczną moc liczb ujemnych

Oddzielny temat stanowią gry planszowe, tworzone na zajęciach przez dzieci. Czytaliśmy lekturę „Karolcia". Dzieci przygotowały w związku z tym grę pt. ***„Karolcia i zaczarowane koraliki"***. Zasady są zbliżone do „Grzybobrania", ponieważ w niej także wygrywa osoba, która zbierze najwięcej koralików. Ma do dyspozycji 3 kostki, na których wykonuje działania tak, aby wynik pozwolił na zebranie z pola jak największej liczby koralików, które załadowuje się do pojazdów (na jednym polu może znajdować się więcej niż jeden koralik). Chłopcy postanowili zdynamizować grę i zaproponowali, aby gracz, który wjedzie na pole zajęte, przejmował koraliki przeciwnika.

Tym razem zwróciłam uwagę na aktywność matematyczną podczas tworzenia plansz. Warunki były następujące:

1. Plansza musi mieć kształt stadionu, czyli jest formą zamkniętą.
2. Do odrysowywania pól służą sześciokątne klocki, które później będą pionkami – pojazdami.
3. Planszę rysują naraz dwie osoby, w szczególnych wypadkach trzy. Grupa tak musi zaplanować pracę, aby każdy narysował taką samą liczbę pól.
4. Na połowie narysowanych przez siebie pól, zaznaczamy premie, czyli miejsca, w których będzie można zbierać koraliki.
5. Na połowie pozostałych pól rysujemy pułapki – jeżeli w nie wjedziesz, tracisz połowę posiadanych koralików.


Olivia i Natalia – autorki gry

Już w trakcie pracy nad planszą dzieci poczyniły następujące obserwacje:

1. Jeżeli planszę rysuje dwoje dzieci, liczba pól jest parzysta.
2. Jeżeli planszę rysuje troje dzieci, liczba pól może być parzysta lub nieparzysta.
3. Jeżeli liczba pól w „sektorze" danego dziecka jest parzysta, może dokładnie na połowie pól zaznaczyć premie (*Czyli na 50% ?* – upewnił się Oskar, specjalista od procentów).
4. Żeby można było dokładnie na połowie wolnych pól zaznaczyć pułapki, liczba pól w „sektorze" dziecka musi być „podwójnie parzysta", czyli można ją podzielić przez 2 i jeszcze raz przez 2.


Jana i Weronika zbierają koraliki

Podsumowując tę opowieść, pragnę zwrócić uwagę na zmianę w **sposobie** pracy z grami:
1. Po każdej z gier następuje jej omówienie.
2. Gry stanowią punkt wyjścia do analizy problemów matematycznych.
3. Dzieci często grają w grę kilkakrotnie. Dzięki temu mogą dostrzec prawidłowości i opracować strategię.
4. Przeważają gry decyzyjne nad grami losowymi.
5. Przeważa współpraca nad rywalizacją.
6. Coraz częściej dzieci stają się autorami lub współautorami gier.

Niezmiennie gry są atrakcyjne dla dzieci, a przez to, że mogę obserwować przy okazji ich procesy myślowe, gry stają się coraz bardziej atrakcyjne także dla mnie.

Opowieść na zakończenie o tym, (że to) co dobre … może mieć dalszy ciąg

Moja praca dobiega końca. Czas na podsumowanie. Przedstawiłam różne **sposoby** pracy po ZMIANIE. Początkowo nawet usiłowałam przyporządkować rodzaje **metod** do poszczególnych opowieści; tu słowne, tam aktywizujące, ekspozycji, działaniowe. Po analizie doszłam do wniosku, że każda z nich jest właściwie metodą problemową. Działania dzieci służą bowiem jako punkt wyjścia do analizowania i rozwiązywania problemów matematycznych, dostrzegania prawidłowości, związków przyczynowo-skutkowych.

Efekty ZMIANY **sposobów** nauczania obserwuję u moich uczniów. Oprócz dobrze opanowanych umiejętności przewidzianych programem moi uczniowie:
1. Rozwiązują nietypowe zadania tekstowe, posługując się własnymi strategiami.
2. Dokonują operacji na liczbach w znacznie rozszerzonym zakresie.
3. Prowadzą poważną działalność naukową. W oparciu o spostrzeżenia dokonują uogólnień i formułują prawa matematyczne.
4. Posługują się w praktyce procentami np. potrafią obliczyć procent danej liczby.
5. Posługują się pojęciami pole i obwód, dostrzegają związki między nimi.
6. Rozumieją pojęcie liczby ujemnej.
7. Rozwijają intuicje w zakresie geometrii przestrzennej.

Zaobserwowałam istotne zmiany u uczniów: rozpoczęli formułowanie praw matematycznych, chętnie pomagali sobie wzajemnie, nabywali biegłości w liczeniu.


Kacper w nowej roli

ZMIANY dokonały się także we mnie. Poszerzyłam repertuar ćwiczeń, które wprowadzam na zajęciach matematycznych. Najważniejsze zmiany dotyczą przekonań i związanej z tym organizacji nauczania nie tylko matematyki:

1. Im częściej dzieci rozwiązują zadania, które zdają wykraczać poza ich możliwości, tym bardziej te granice się przesuwają i mogą być zdecydowanie odległe od tego, co przewiduje program.
2. Warto chwytać okazje matematyczne, które wynikają z różnych sytuacji życiowych. Dzieci mając przed sobą problem dla nich istotny, pracują znacznie efektywniej na swojej motywacji wewnętrznej.
3. Zadania skomplikowane mogą rozwiązywać wszystkie dzieci. Należy tylko dać im czas i pozwolić, ewentualnie wspomóc w znalezieniu odpowiedniej strategii.
4. Wszelkie metody, bez względu na miejsce w oficjalnych klasyfikacjach, mogą stać się metodami problemowymi.
5. Warto jak najczęściej organizować pracę dzieci w niewielkich grupach. Motorem ich wspólnych działań powinna być chęć rozwiązania problemu a nie rywalizacja.

W klasie trzeciej czeka nas jeszcze wiele zaskoczeń i odkryć w fascynującej krainie matematyki.

Dorota Kubiak
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej Szkoły Podstawowej nr 14 w Bydgoszczy, wychowawczyni klasy 2b, miłośniczka gier i zabaw matematycznych, w zawodzie 26 lat.

LICZBY BEZPIECZNE I NIEBEZPIECZNE, LICZBY BUM I POZASZKOLNE, PARZYSTE I NIEPARZYSTE KWADRATY, CZYLI O DOSTRZEGANIU PRAWIDŁOWOŚCI I REGUŁ ORAZ POSŁUGIWANIU SIĘ NIMI PRZEZ UCZNIÓW KLASY II NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Barbara Kowal

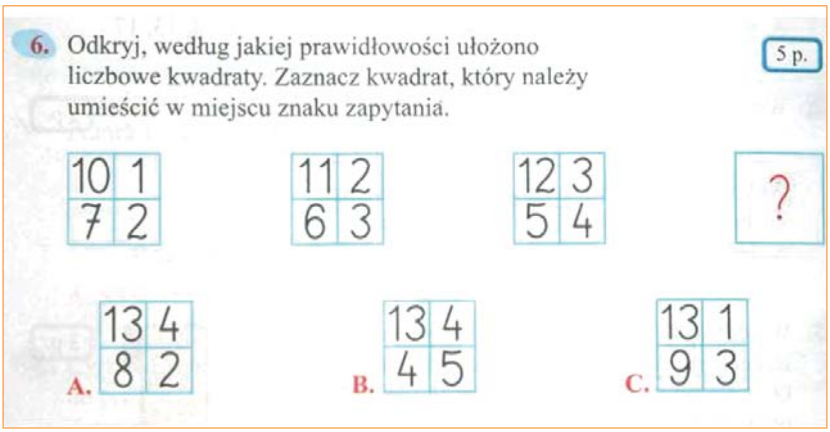
Matematyka jest pełna reguł, zasad, praw i własności. Trzeba je poznać, by prawidłowo poruszać się po jej królestwie. Co zrobić, by dzieci zapamiętały te reguły i z przyjemnością buszowały po krainie pełnej niespodzianek? Może pozwolić im samym odkrywać, badać, sprawdzać, a nawet popełniać błędy? Niech stawiają hipotezy, przewidują, szukają strategii, niech pytają i udzielają odpowiedzi.

A czy trzeba coś robić, by dzieci w ogóle zaczęły „coś" dostrzegać? Nie, bo dzieci naprawdę widzą wiele i tylko nam dorosłym wydaje się, że wszystko musimy im powiedzieć. Dzieci przecież lubią rozwiązywać zagadki. A czyż matematyka nie jest dla nich wielką zagadką? Niech więc każde zadanie stawia przed nimi wyzwanie do rozwiązania, a nie tylko kolejną „wypełniankę". Zadanie, gry, które proponowałam, miały więc na celu ćwiczenie rachunku pamięciowego innym sposobem, gimnastykę umysłu, naukę dostrzegania i, co ważne, opowiedzenie o swoich odkryciach.

Poniżej przedstawiam zadania, które miały wpływ na zmiany zarówno w uczniach, jak i we mnie.

Nietypowe słupki z regułą w tle

Zaproponowane uczniom zadanie[1] miało dotyczyć odkrywania reguł. Wyglądało na proste, łatwe i przyjemne. Takie zadanie „na chwilę", po którym zaraz przechodzi się do kolejnego ćwiczenia. Wyszło inaczej.



Wiktor: *W lewym, górnym rogu w pierwszym okienku jest 10, w drugim okienku 11, a w trzecim okienku 12. Czyli w pustym okienku musi być 13.*
Patryk: *Ale w każdym rozwiązaniu masz 13 w tym okienku, musimy jeszcze spojrzeć na okienko obok. A tam jest po kolei 1,2,3, więc teraz musi być 4, więc odpada „C". A na dole, w lewym okienku mamy liczby w dół 7, 6, 5, czyli musi teraz być 4, czyli odpowiedź B.*
Ja: *A co z tą ostatnią liczbą, w prawym dolnym rogu?*
Wiktor: *One rosną 2,3,4, więc teraz 5 i wszystko się zgadza.*
Brawo! Dzieci odkryły prawidłowość zawartą w tym zadaniu. Ale, czy jest to jedyna prawidłowość?
Ja: *A może znajdziecie jeszcze inny dowód na to, że wybraliście właściwą odpowiedź?*

[1] Zadanie zaczerpnięte z podręcznika Jadwigi Hanisz, „Wesoła szkoła i przyjaciele", matematyka, klasa 2, część 2, s. 52, WSiP, Warszawa 2012.

Karina: *W każdym okienku największa liczba jest wynikiem dodawania pozostałych, czyli 7 + 2 + 1 = 10; 2 + 6 + 3 = 11; 5 + 3 + 4 = 12. A w odpowiedzi B też tak jest.*
Ja: *Zgadza się, ale sprawdźmy pozostałe odpowiedzi.*
8 + 4 + 2 = 14 – odpada, bo w tym okienku największą liczbą jest 13;
4 + 4 + 5 = 13 – może być poprawną odpowiedzią wg założenia Kariny;
9 + 1 + 3 = 13 – może być poprawną odpowiedzią wg założenia Kariny.

Dzieci stwierdzają, że to nie jest dobry sposób, bo mamy dwie poprawne odpowiedzi, co nie zmienia faktu, że spostrzeżenie Kariny było interesujące i sprowokowało dzieci do wykonywania kolejnych obliczeń. Następna propozycja:
Tomek: *Jak odejmujemy na skos 10 – 2; 11 – 3; 12 – 4, to wychodzi 8.*
Marcin: *A na „drugi" skos trzeba dodawać 7 + 1; 6 + 2; 5 + 3 i też wychodzi 8.*
Ja: *Sprawdźmy w odpowiedziach.*

Dzieci sprawdzają i okazuje się, że tylko w odpowiedzi B wyniki „po skosach" są równe 8. Jest to kolejny, dobry sposób na rozwiązanie tego zadania.

Uczniowie nie chcą rezygnować z zadania, bo bardzo ich zaciekawiło. Dalej szukają.
Dominika: *Jeżeli spojrzę na te okienka po kolei, ale od tyłu i dodam 3 i 2, a potem odejmę 1, to wychodzi mi 4. Liczba, którą trzeba wpisać w tym miejscu w pustym okienku. I jeżeli zrobię to samo z pozostałymi liczbami, to też mi wyjdzie, co mam wpisać w kolejne okienka.*

Sprawdzamy spostrzeżenie Dominiki:

Świetnie. Dominika odkryła kolejną prawidłowość, i to dość zawiłą.

I jeszcze jedna propozycja dzieci.
Jessica: *Liczby u góry w każdym okienku dają 9, jeśli je odjąć.*
Mateusz: *A liczby na dole trzeba dodać i też wychodzi 9.*
W odpowiedzi B też tak jest, a w A i C nie.

Dzieci w tym zadaniu dochodząc do swoich rozwiązań, wykonały wiele operacji matematycznych, począwszy od szukania prawidłowości (liczby maleją, liczby rosną), po różnorodne obliczenia: dodawały po dwa składniki, po trzy, odejmowały, a nawet wystąpiło działanie mieszane: dodawanie z odejmowaniem. Przy tym świetnie się bawiły.

Gramy i odkrywamy „liczby bezpieczne i niebezpieczne"

***Gra:* Dodaj 2 lub 1**
Liczba graczy: 2.
Pomoce: Nie są potrzebne, ale może się przydać kartka i ołówek (żeby rozpisać strategię).
Reguły: Gracze podają na przemian liczby od 1 do 20, dodając 1 lub 2 do liczby przeciwnika, czyli pierwszy gracz może podać liczbę 1 lub 2, drugi gracz podaje kolejną liczbę większą o jeden lub o dwa od liczby przeciwnika. I tak na zmianę. Przegrywa ten gracz, który powie 20.
Np. 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20
Czyli tym razem przegrał czerwony gracz.

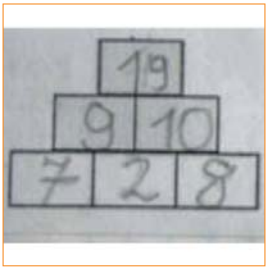
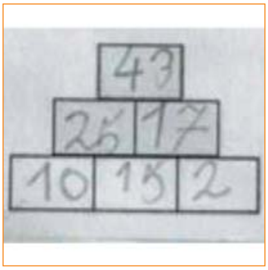
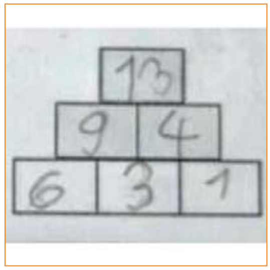
Ponieważ tego dnia w klasie była nieparzysta liczba osób, byłam zmuszona zagrać z jednym z uczniów, zagrałam z Weroniką. Przy czwartej rozgrywce Weronika stwierdziła, że nie powie 17. Zastanowiła się chwilę i powiedziała 18. Też przegrała. Już wiedziała, że nie wolno powiedzieć ani 17, ani 18, jeśli chce się wygrać. Pozostałe dzieci w klasie też już to wiedziały. Weronika liczby 17 i 18 nazwała „niebezpiecznymi".
Ja: *To jaka liczba jest „bezpieczna"?*
Tomek: *16.*
Ja: *Co zrobić, żeby powiedzieć 16 i móc wygrać? Zagrajcie kilka razy i sprawdźcie, może jest jeszcze jakaś liczba bezpieczna.*
Po kilku grach Patryk stwierdza, że 13. Sprawdzamy. Tak, 13 jest bezpieczna. Dzieci grają dalej i ustalają kolejne bezpieczne liczby. Przy 10 Mateusz zauważa, że to są liczby o trzy mniejsze począwszy od 16. Sprawdza to, grając dalej z kolegą i wszystkie partie wygrywa.

Paweł i Kacper wyjmują kartkę i badają grę, zapisując swoje obliczenia. Pod koniec lekcji dzieci znają już wszystkie bezpieczne liczby. Ale odkryły coś jeszcze. Do końca gry trzeba być czujnym, bo można przegrać przez zwykłą nieuwagę, nawet jeśli się zna bezpieczne liczby.

Która liczba jest najważniejsza?

***Zadanie:* Piramidki**

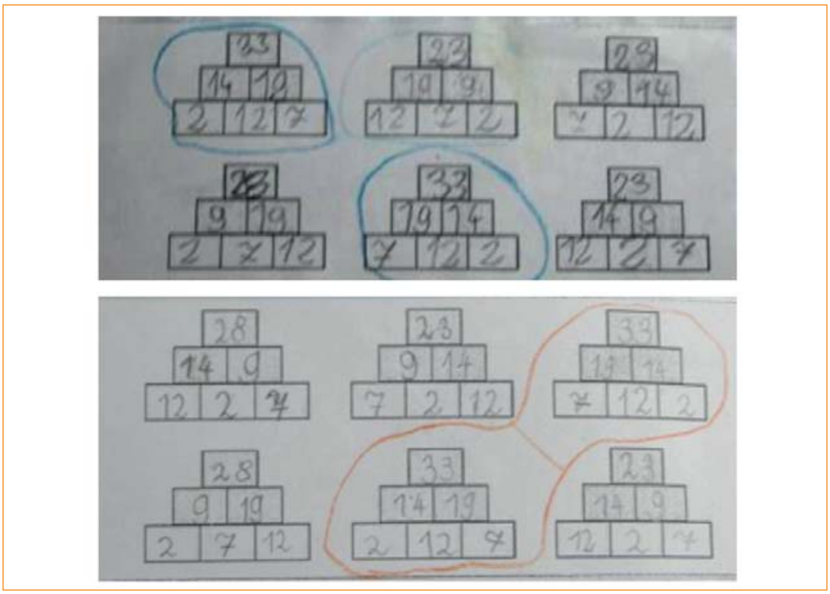
Żeby dzieci lepiej zrozumiały, o co będzie chodziło w zadaniu, które za chwilę miały dostać, w ramach ćwiczeń uzupełniliśmy sobie trzy piramidki:

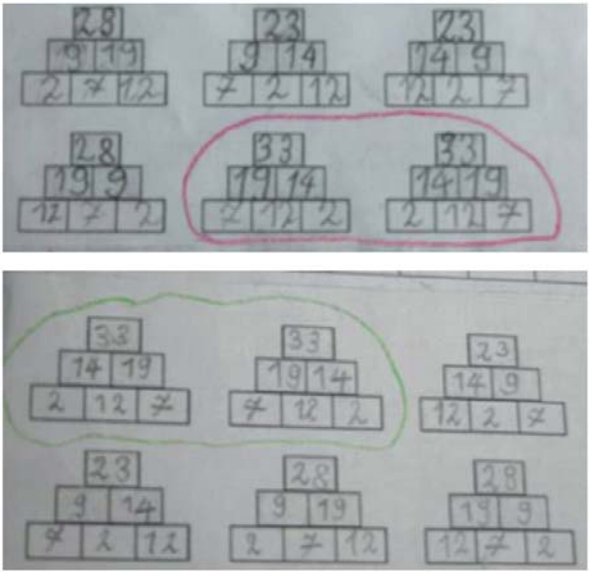
Następnie dzieci dostały zadanie[2] i puste piramidki do uzupełniania:

Jak należy wpisać liczby 2, 7, 12 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była jak największa? Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki.

A oto efekty ich pracy:



[2] Zadaniepochodzi z badań umiejętności trzecioklasistów prowadzonych przez CKE, por. www.trzecioklasista.edu.pl.

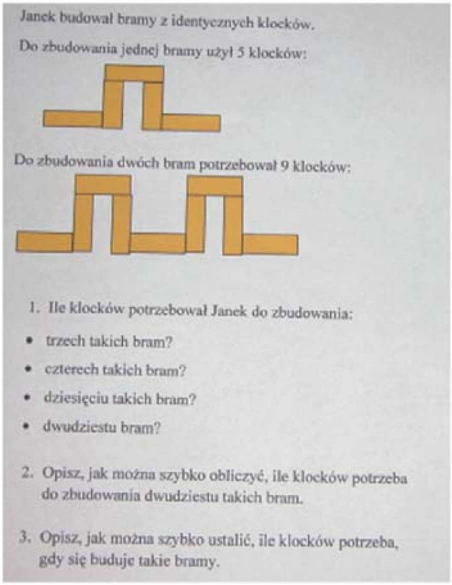


Dzieci wypełniały piramidki, stosując różne ustawienie liczb w dolnym rzędzie i zaobserwowały, gdzie jest największy wynik. Brawo! Ale dlaczego tak się dzieje?
Paweł: *Bo 12 jest w środku.*
Ja: *I co z tego, że jest w środku?*
Tomek: *No i jest dwa razy dodane, bo najpierw do 2, a potem do 7.*
Julka: *I to daje największe wyniki w środkowym poziomie.*
Ja: *Więc dlaczego 12 musi być w środku?*
Dominika: *Bo 12 jest największą liczbą z tych trzech i dwa razy dodane powiększa wynik.*

Świetnie. A co właściwie dzieci robiły? Można by powiedzieć, że doskonaliły rachunek pamięciowy, czyli liczyły „słupki". Były to jednak nieco inne słupki. Dzieci musiały pilnować się, żeby liczby wpisywać w innym ustawieniu, a jednocześnie wiedziały, że do czegoś zmierzają, że mają rozwiązać jakiś problem. Rozwiązały go i były z siebie bardzo zadowolone.

Mnożenie bez mnożenia

Zadanie ***„Bramy”:***



Janek budował bramy z identycznych klocków.

Do zbudowania jednej bramy użył 5 klocków:

Do zbudowania dwóch bram potrzebował 9 klocków:

1. Ile klocków potrzebował Janek do zbudowania:
   - trzech takich bram?
   - czterech takich bram?
   - dziesięciu takich bram?
   - dwudziestu bram?
2. Opisz, jak można szybko obliczyć, ile klocków potrzeba do zbudowania dwudziestu takich bram.
3. Opisz, jak można szybko ustalić, ile klocków potrzeba, gdy się buduje takie bramy.

Ja: *Z ilu klocków zbudowaliście 3 bramy?*
Dominika: *Z 13.*
Ja: *Dlaczego z 13?*
Dominika próbuje wyjaśnić: *Dwie bramy na dole połączyć z tą z góry i odjąć z tego z góry klocek będący na dole…*
Ja: *Hmm, nie bardzo rozumiem, może ktoś nam pomoże?*
Oliwia: *Od pięć zabraliśmy jeden klocek.*
Agnieszka: *Liczyliśmy drugą bramę i doliczyliśmy jeszcze jedną bramę, to zauważyliśmy, że z brzegu jest więcej klocków niż w środku…*
Tomek: *Dodaliśmy cztery następne klocki, bo jeden już był.*
Ja: *No dobrze, a cztery bramy? Z ilu klocków?*
Damian: *Z 18.*
Ja: *Jak policzyłeś?*
Damian: *Do dwóch dodałem jedną, to wyszło mi 13, a jak dodałem jeszcze jedną, to wyszło 18.*
Ja: *Sprawdź, czy jest na pewno 18.*

Damian sprawdza i odkrywa, że się pomylił w liczeniu. Ale nie on jeden.

Julka i Nikola też mają wynik 18:

Dodawałyśmy po 5, bo z pięciu klocków zbudowana jest brama… Nie, jedna brama jest zbudowana z czterech i połowy…

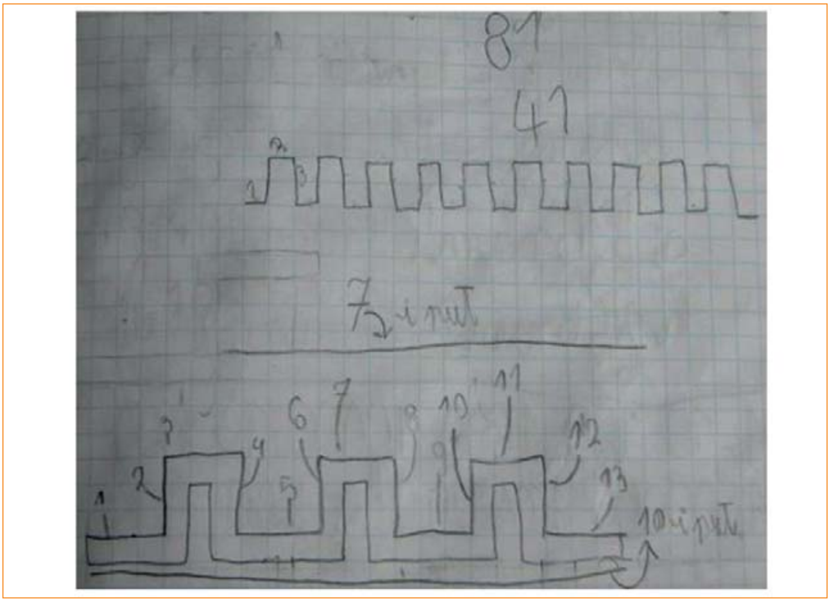
Dziewczynki układają i liczą od początku.

Oliwia: *Pierwsza brama jest zbudowana z pięciu klocków, a druga i trzecia z czterech.*
Ja: *A czwarta?*
Marcin: *Też z czterech, czyli przy czterech bramach mamy 17 klocków.*
Ja: *No to sprawdźmy teraz 10 bram. A może ktoś już wie?*

Tomek natychmiast odpowiada:

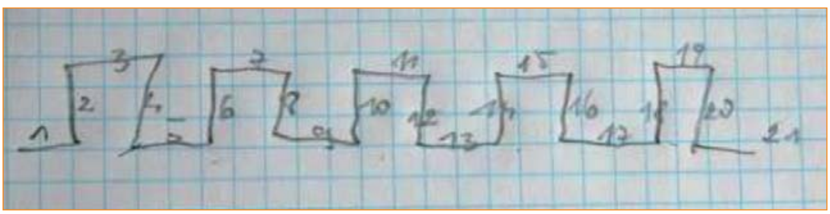
Z 58. Nie, z 57 klocków.
Ja: *Jak to policzyłeś?*
Tomek: *10 razy cztery dodać 17.*
Ja: *A dlaczego dodać 17?*
Tomek: *Bo to było z tamtych czterech bram.*
Ja: *No dobrze. Zacznijmy od początku i powoli. Dlaczego razy 4?*

Tomek: *Bo każda brama składa się z czterech klocków.*
Ja: *Dobrze, a dlaczego razy 10?*
Tomek: *Bo miało być 10 bram.*
Ja: *Dobrze, a dlaczego dodać 17?*
Tomek: *Ojej, niepotrzebnie, bo już mam dziesięć bram. No to wynik jest z 40 klocków.*
Przemek: *Nie, bo z 41.*
Ja: *Jak to policzyłeś?*
Przemek: *Narysowałem i policzyłem.*
Oto rysunek Przemka:



Julka i Dominika też narysowały i przeliczyły, jest 41. Kacper i Paweł zaczęli od 17 (4 bramy) i dodali 6 czwórek: 17 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 41. Agnieszka narysowała 5 bram i stwierdziła, że one są zbudowane z 21 klocków, a w kolejnej piątce będzie o jeden klocek mniej, więc 21 + 20 = 41.

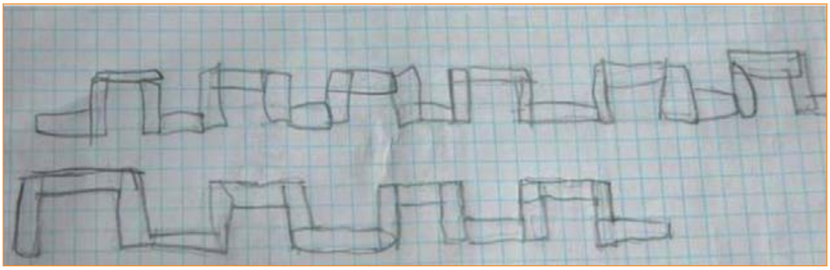
Rysunek Agnieszki:



Ja: *A skąd się wzięło to 1, które opuścił w swoich obliczeniach Tomek?*
Dominika: *Bo na końcu trzeba dodać 5, a nie 4 i wychodzi 41.*
Tomek: *To 20 bram będzie zbudowanych z 82 klocków.*

Dzieci nie zgadzają się z Tomkiem. Do zbudowania dwudziestu bram trzeba 81 klocków. Tomek jest niepocieszony, znowu się pomylił. Może za szybko działa? Może trzeba przemyśleć i sprawdzić, zanim się powie?

Dzieci wyjaśniają Tomkowi, korzystając z rysunku:



Teraz Tomek już rozumie i stwierdza:
Trzeba było sobie narysować.
Ja: *A jak to szybko policzyć?*
Jula: *W myślach dodawać czwórkami… i na końcu dodać 5.*
Tomek tym razem po chwili zastanowienia:
To będzie tak:
10 bram, to cztery razy 10 dodać jeden,
a 20 bram, to 4 razy 20 dodać jeden,
a 60 bram, to będzie 4 razy 60 dodać jeden
Ja: *Świetnie, właśnie tak.*

To nie było łatwe zadanie, jeśli ktoś chciał zapisać działanie bez rysunków czy zabawy klockami. A tak właśnie chciał Tomek. Pozostałe dzieci rysowały, przeliczały klocki i dochodziły do prawidłowych wyników, chociaż i one popełniały błędy nawet w przeliczaniu. To Tomek jednak na końcu przedstawił szybki sposób obliczenia liczby klocków przy dowolnej liczbie bram. Wprowadził nawet mnożenie, a my jeszcze tego działania nie znaliśmy na tym etapie nauki. Tomek przekonał się, że warto wykonywać rysunek do zadania.

Podczas rozwiązywania tego zadania dzieci miały kłopot z wytłumaczeniem swojego sposobu, co jest całkiem naturalne, bo trzeba się tego nauczyć, a szkoła jest doskonałym do tego miejscem.

Całkiem nieznane działania i co dalej?

Zajęcia komputerowe[3]. Dzieci ze „szkolnych działań" wykonują dodawanie i odejmowanie w zakresie 20, o mnożeniu i dzieleniu jeszcze nic nie wiedzą.

Tego dnia na zajęciach komputerowych pojawiło się zadanie, w którym dzieci miały „zebrać" baryłki miodu z planszy, ale żeby to zrobić, miały najpierw wykonać pojawiające się działania matematyczne. Między innymi pojawiło się także mnożenie i dzielenie.

Uczniowie siedzieli po dwoje lub troje przy jednym komputerze, czyli w naturalny sposób powstało 8 grup. Na mnożenie dzieci w ogóle nie zwróciły uwagi, po prostu dodawały. Natomiast w dzieleniu pojawił się kłopot, bo nie umiały odczytać znaku (czytały razy zamiast podzielić), no i przeraziło je, że mają pomnożyć taką dużą liczbę. Powiedziałam im, że jest to znak dzielenia i czytamy: 16 podzielić na 4. Nic więcej nie mówiłam i byłam bardzo ciekawa, co z tym zrobią.

W dwóch grupach uczniowie wstawiali liczby po kolei tak długo, aż wpisana liczba okazała się poprawnym wynikiem. W pozostałych grupach dzieci poradziły sobie w inny sposób.

Janka i Paula dodawały po 4. Jedna dodawała, a druga na palcach liczyła, ile jest czwórek.

Agnieszka i Julka stwierdziły, że muszą policzyć, ile czwórek jest w 16 i zrobiły to.

Mateusz od razu powiedział grupie: to znaczy, że musimy wpisać, ile czwórek mieści się w 16. Paweł liczył po cichu w głowie i podawał właściwe wyniki. Jessica natomiast odejmowała po 4 i zliczała, ile czwórek już odjęła. Robiła to zupełnie sama, bo jej koleżanka zupełnie nie wiedziała, o co chodzi.

Analogicznie dzieci wykonywały drugie działanie na dzielenie.

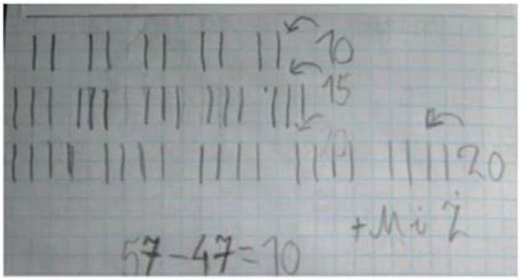
Świetnie poradziły sobie z tymi nieznanymi działaniami. Byłam tym zaskoczona, ale jednocześnie miałam pełną świadomość, że nie wszystkie dzieci wiedziały, co się właściwie dzieje. W grupach udało im się wykonać to zadanie, więc postanowiłam pójść nieco dalej i już wkrótce miały spróbować rozwiązać kolejne zadania.

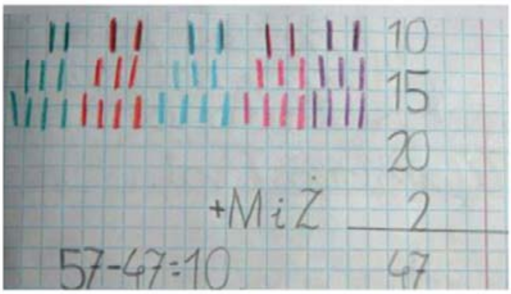
[3] Podręcznik: „Wesoła szkoła i przyjaciele", zajęcia komputerowe, s. 35, wydanie III, WSiP, Warszawa 2012, płyta dla ucznia.

6 grudnia – odwiedzamy Mikołaja… ale jeszcze nie mnożymy

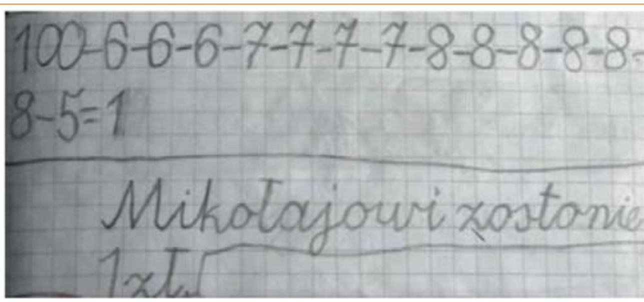
I kolejne **dwa zadania**:

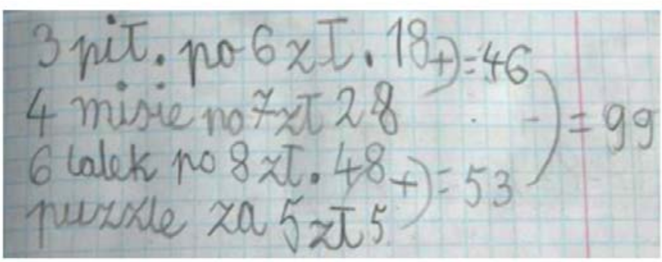
Mikołaj z żoną postanowili wydać małe przyjęcie. Zaprosili na nie 5 par królewskich. Każdej parze królewskiej towarzyszyły 3 damy dworu i 2 ambasadorów z żonami. Zaproszono też grupę cyrkowców. Obecnych było 57 osób. Jak liczna była grupa cyrkowców?

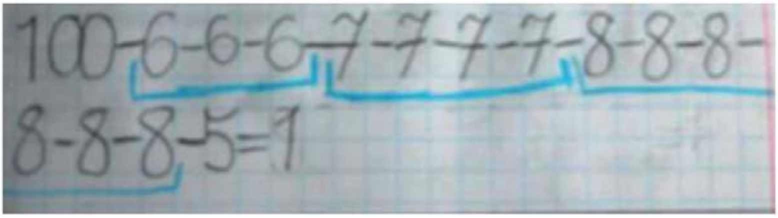


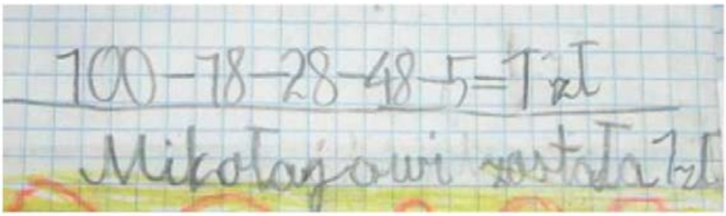


Św. Mikołaj kupował dzieciom prezenty. Miał 100 zł. Kupił 3 piłki po 6 zł, 4 misie po 7 zł, 6 lalek po 8 zł i puzzle za 5 zł. Czy wystarczyło Mikołajowi pieniędzy? Pomóż mu policzyć.









Rozwiązywanie tych zadań sprawiło dzieciom ogromną przyjemność. Jak widać zespoły liczyły różnie. Wydaje się, że nie wszyscy doprowadzili zadanie do końca. Czy obliczenie wartości zakupów wystarcza? Sadzę, że dzieciom wystarczyło. Przecież wiadomo, że jeśli zakupy kosztowały 99 zł, to Mikołajowi wystarczyło 100 zł, które miał. Tok rozumowania dzieci jest czytelny i pokazuje, jak bez wyuczonej w szkole umiejętności mnożenia stworzyły własną regułę postępowania i doskonale sobie poradziły, nawet w zakresie liczbowym wykraczającym poza „szkolną dwudziestkę”. Niektórzy liczyli w pamięci, inni sięgnęli po patyczki, klocki, nawet po monety przy drugim zadaniu. Ponieważ rozwiązywali te zadania w parach lub czwórkami, mieli okazję dyskutować, przekonywać się i uczyć się od siebie nawzajem. Mnie natomiast cieszyło, gdy patrzyłam na ich zapał i energię.

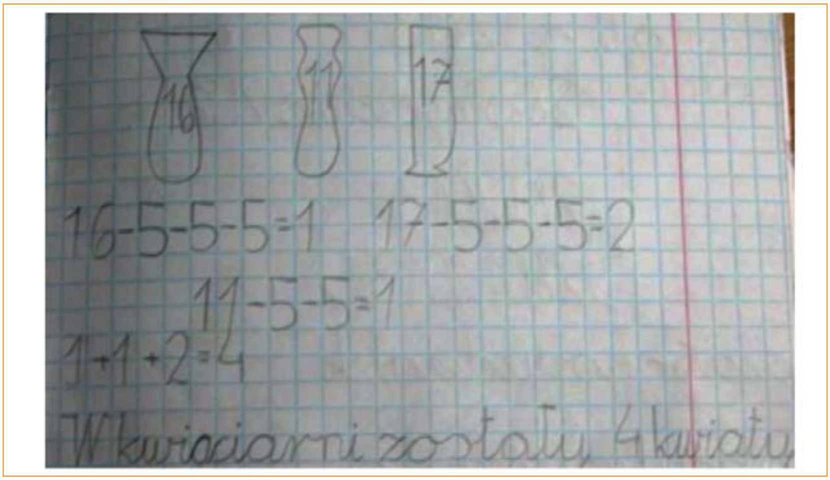
W styczniu z „Kangurkiem”[4] pomagamy kwiaciarce… nadal nie mnożymy

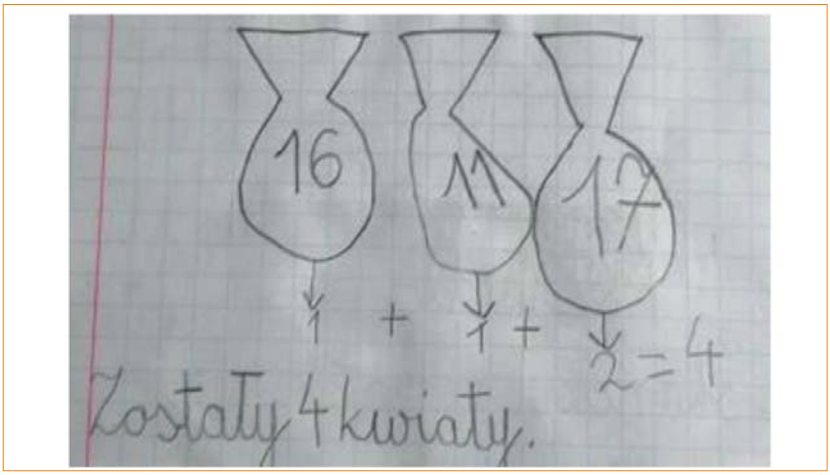
Tym razem zadanie do samodzielnej pracy:
Kwiaty w kwiaciarni znajdowały się w trzech wazonach. W pierwszym było 16 kwiatów, w drugim 11, a w trzecim 17. Kwiaciarka sprzedawała tylko bukiety utworzone z 5 kwiatów. W pewnej chwili stwierdziła, że nie może już wykonać kolejnego takiego bukietu. Ile kwiatów zostało w kwiaciarni?

Większość dzieci poradziła sobie z tym zadaniem bez kłopotów.
Dominik liczył tak: 44 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 = 4; przy tym cały czas zliczał sobie piątki, żeby wiedzieć, czy jeszcze musi odejmować. Czyli nie odejmował tak naprawdę po 5, tylko dodawał te piątki i sprawdzał, czy nadal musi odejmować. Oj, napracował się przy tym dodawaniu i odejmowaniu.

Inne dzieci rozumowały na przykład tak:

[4] Zadanie zaczerpnięte z Międzynarodowego Konkursu Matematycznego „Kangurek”.





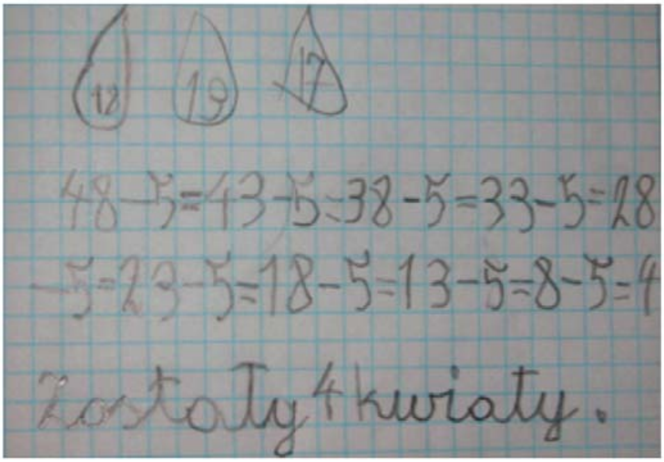
Drugi sposób jest bardzo prosty. Na rysunku doskonale widać, ile zostało. Dzieci w tym zadaniu dzieliły z resztą na swój własny sposób, nie używając wcale słowa dzielenie, bo przecież odejmowały albo dodawały (Dominik).

Na drugi dzień sposoby dzieci zostały omówione na forum. Wybraliśmy najłatwiejszy sposób (nr 2), a mnie przyszedł do głowy pomysł, by to samo zadanie zrobić za jakiś czas, zmieniając dane tak, żeby reszta z wazonów zawierała jeszcze jedną piątkę. Czy dadzą się „złapać"???

Po miesiącu (!) dzieci otrzymały takie zadanie:

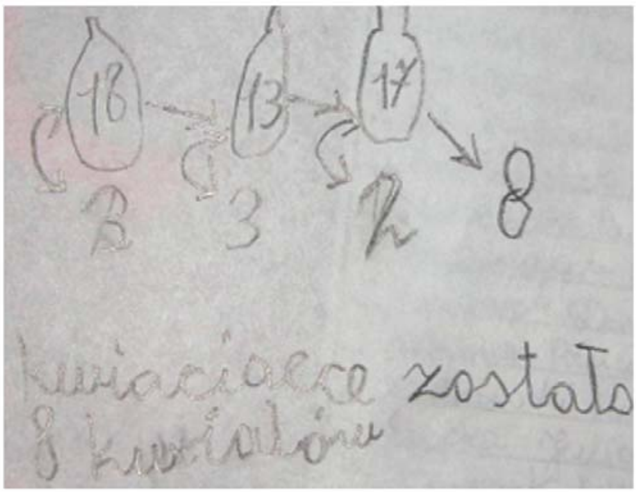
Kwiaty w kwiaciarni znajdowały się w trzech wazonach. W pierwszym było 18 kwiatów, w drugim 13, a w trzecim 17. Kwiaciarka sprzedawała tylko bukiety utworzone z 5 kwiatów. W pewnej chwili stwierdziła, że nie może już wykonać kolejnego takiego bukietu. Ile kwiatów zostało w kwiaciarni?

Niektórzy zauważyli od razu, że takie zadanie już było. Ale, ale… (Marcin zajrzał do zeszytu) tu są inne liczby. A oto wyniki ich pracy.



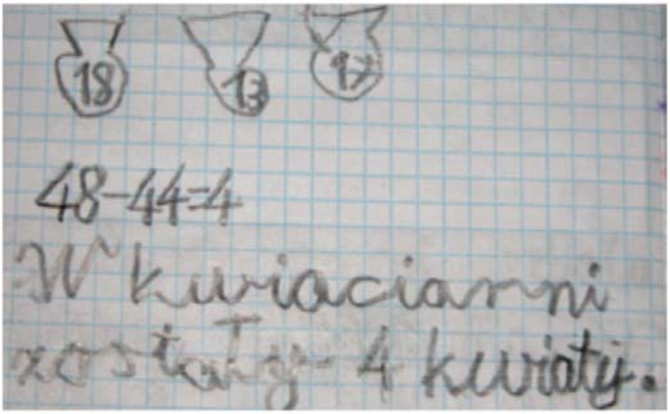
Agnieszka:

Świetnie. Zliczyła, ile jest kwiatów w trzech wazonach i odejmowała po 5. Zapis nie jest poprawny, pomyliła się też w ostatnim obliczeniu (8 – 5), ale wiedziała, co ma robić i nie przeoczyła tej dodatkowej piątki.



Dominik:

Niestety, dał się „złapać". Tak mozolnie liczył przy poprzedniej wersji tego zadania, a teraz skorzystał z pomysłu kolegów (to dobrze, bo to był prostszy sposób – zapamiętał go), ale nie zauważył, że w tej nowej reszcie jest zawarta jeszcze jedna piątka.



Kacper:

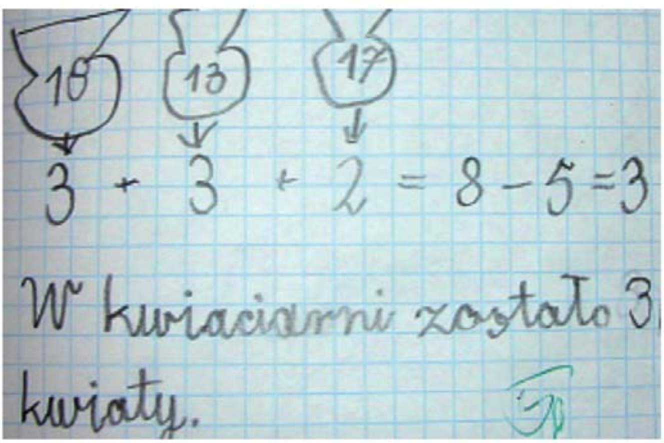
Dlaczego odejmował 44? Zwyczajnie się pomylił, bo wszystkie obliczenia wykonywał w głowie. Ale wiedział, co ma robić.

Martyna:

Niestety, nie dokończyła. Ale i tak osiągnęła duży postęp, bo poprzednim razem niewiele zrobiła.

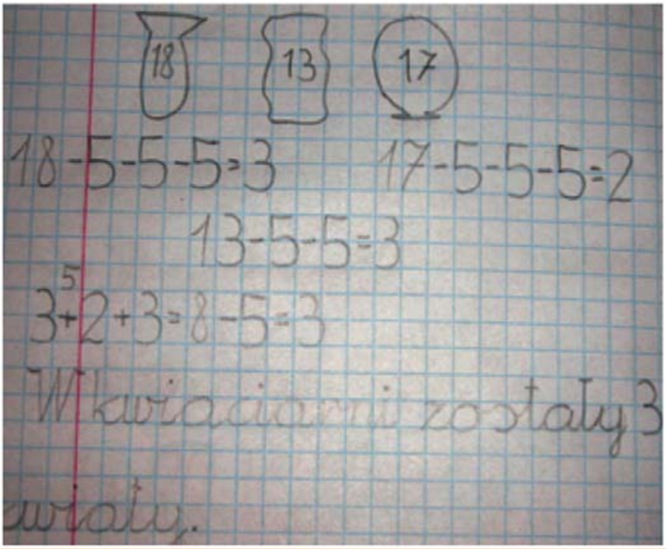
Mateusz:

I tu wydarzyła się kolejna ciekawa rzecz. Mateusz wykonał to zadanie tak, jak poprzednie i już uznał, że skończył, gdy nagle spostrzegł, że w tej ósemce mieści się jeszcze jedna piątka. Szybciutko obok dopisał odejmowanie. Super! Nie dał się „złapać", choć zapis nie jest poprawny.



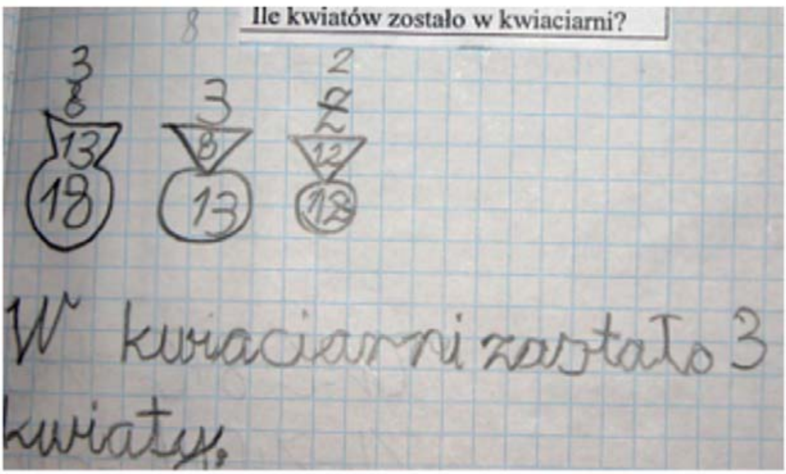
Oliwia:

Zapis Oliwii jest prawie doskonały! Odejmowała po 5 w każdym wazonie, dodała te reszty i stwierdziła, że jeszcze musi odjąć pięć (tu zapis szwankuje) i doszła do poprawnego wyniku. Nie dała się „złapać".



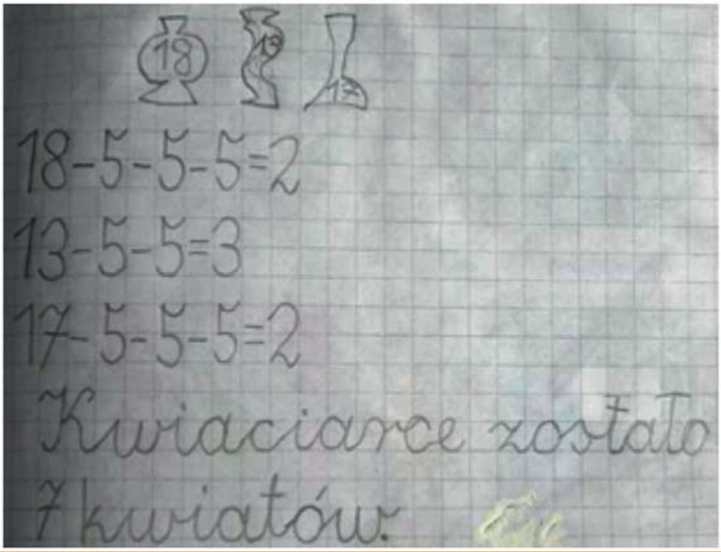
Paulina W.:

U Pauliny jest bardzo ciekawy zapis. W każdy wazon wpisała liczbę kwiatów, a potem odejmowała po 5 w pamięci i wpisywała sobie wyniki „na górkę". Na samej górze widać 8, czyli dodała sobie reszty z wszystkich wazonów i znowu w pamięci odjęła kolejną piątkę, stąd poprawna odpowiedź. Świetnie sobie poradziła.



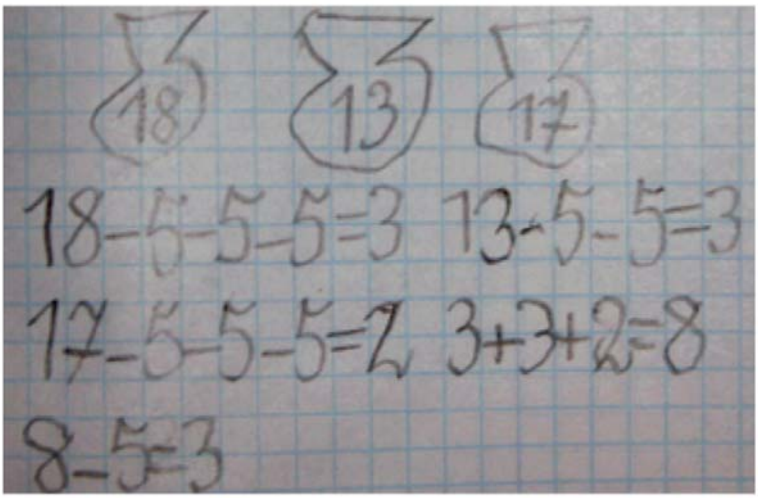
Paulina R.:

Paulina odejmowała po 5 w każdym wazonie oddzielnie. Niestety, pomyliła się w pierwszym działaniu, no i nie dokończyła zadania. Dodała w pamięci reszty z wszystkich wazonów i nie zauważyła, że wynik 7 zawiera jeszcze jedną piątkę. Może gdyby to ostatnie działanie zapisała, to zauważyłaby?



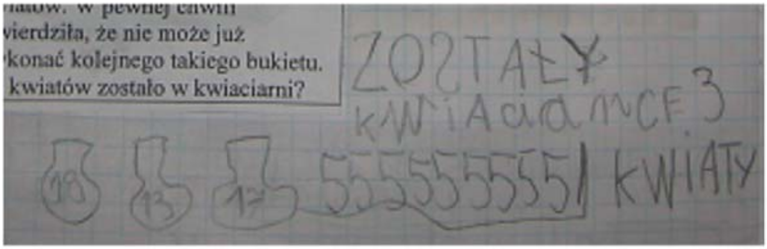
Paweł:

Paweł wykonał zadanie tak, jak Oliwia. Tu jednak zapis jest perfekcyjny!!!



Przemek:

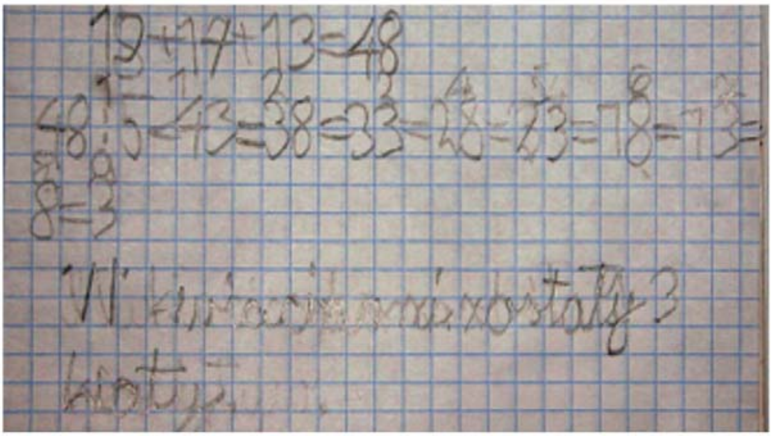
Odpowiedź poprawna i widać, że tworzył wiązanki po 5. Wszystko to zrobił w głowie, nie zapomniał też o ostatniej piątce! Super!



Tomek:

Tomek zliczył sobie wszystkie wazony i…. tu wydarzyła się rzecz bardzo ciekawa. Otóż sam sobie wprowadził dzielenie (znak), bo my ze „szkolnych działań" wciąż operujemy tylko dodawaniem i odejmowaniem.

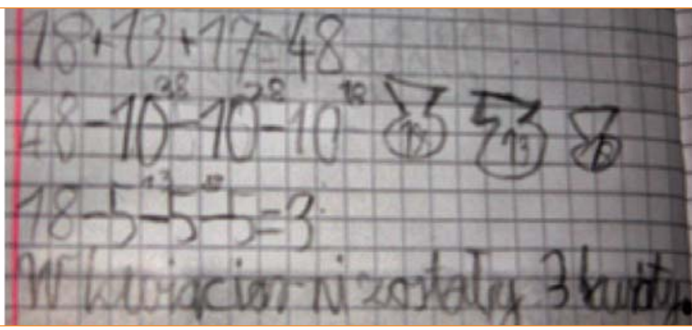
Sam więc wprowadził dzielenie, po czym wykonał je, odejmując w pamięci po 5, a u góry zapisywał, ile to wiązanek. Po co mu informacja, ile wiązanek? Bo w pierwszej wersji Tomek miał złą odpowiedź. Napisał, że kwiaciarka wykonała 9 wiązanek. Poprosiłam, by przeczytał jeszcze raz pytanie i zastanowił się, czy ma dobrą odpowiedź. Jak widać poprawił ją.



Wiktor:

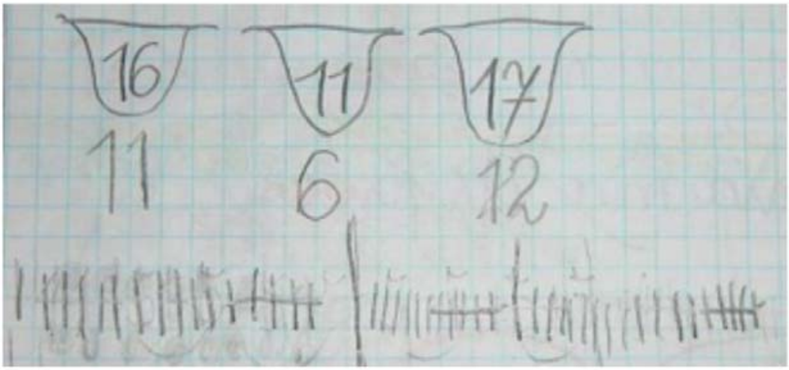
Wiktor też dodał zawartość wszystkich wazonów, ale potem odejmował po 10 i po 5. Zapytałam go, dlaczego tak dziwnie odejmował.

Wiktor: *Bo po 10 jest łatwiej odejmować i szybciej, ale jak już się zbliżałem do wyniku to wolałem odejmować po 5, bo mógłbym odjąć za dużo.*



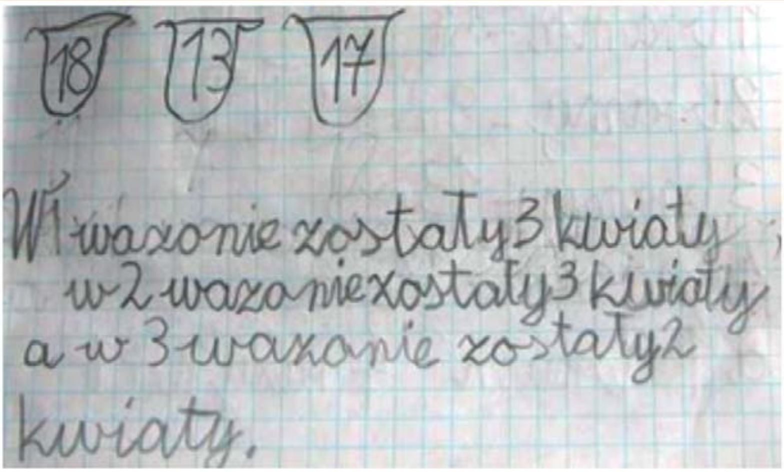
Bardzo mi się spodobało jego tłumaczenie. Wiedział, jak ma sobie ułatwić pracę i zrobił to, ale jednocześnie zachował czujność.

Nie chciałabym jednak, by czytelnik odniósł wrażenie, że wszystko jest tak ładnie i „po myśli nauczyciela". Pokażę zatem wynik pracy Kariny przy rozwiązywaniu tego zadania za pierwszym razem – kiedy reszta nie przekraczała piątki:



Widać, że dziewczynka źle zrozumiała zadanie. Z każdego wazonu odjęła tylko 5 kwiatów i na tym zakończyła swoją pracę. Można by więc powiedzieć, że była to lekcja stracona dla Kariny? Chyba jednak nie.

Oto zapis Kariny przy drugim podejściu do zadania:



Tym razem Karina zrozumiała treść zadania. To znaczy, że uważała za pierwszym razem i zapamiętała. Niestety, przy takim zapisie nie miała szans, żeby zauważyć kolejną piątkę. A może znowu nie do końca zrozumiała zadanie? Z całą pewnością jednak „pokazała", że uważa na zajęciach i się rozwija.

Jak widać na wybranych przykładach z uczniowskich zeszytów, dzieci poradziły sobie z tym niecodziennym zadaniem na swój własny sposób. Nie znając mnożenia, dzielenia i pojęcia reszty w dzieleniu, podjęły próbę rozwiązania tego zadania. I nawet te dzieci, które tylko w części wykonały zadanie poprawnie, bardzo dużo się tego dnia nauczyły.

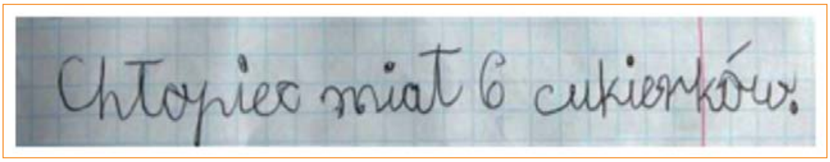
Matematyka może być smaczna

Zadanie z cukierkami:
Gdy chłopiec liczył cukierki, układając je kupkami po cztery, zostały mu w ręku dwa. Gdy grupował je po pięć, to został mu tylko jeden. Ile miał cukierków?

Agnieszka zaczęła tak:

Dalej nie mogła ruszyć, więc sięgnęła po pomoce:

Paweł natomiast przyszedł do mnie z takim rozwiązaniem:

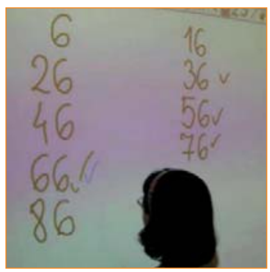


Inne dzieci także sięgnęły po „cukierki”:

Mateusz tłumaczy kolegom, jak szuka odpowiedzi:

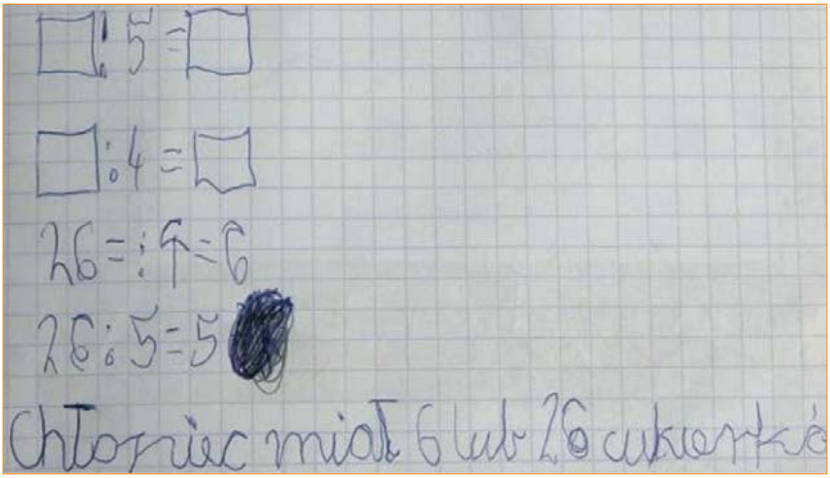
Większość odkryła, że cukierków było 26. Paweł poinformował kolegów o swoich sześciu… Hmm… to może jest więcej możliwości?
Agnieszka: *Na pewno musi być 6 jedności na końcu.*
Ja: *Dlaczego?*
Jessica: *Bo w 6 mieści się 4 i wtedy zostaje 2; mieści się też 5 i wtedy zostaje 1.*
Marcin: *Ale 16 ma 6 jedności, a na pewno nie jest rozwiązaniem.*
Ja: *Dlaczego? Sprawdziłeś to?*
Marcin: *Bo 16 dzieli się przez 4 i nic nie zostaje.*
Oliwia: *To może będzie tak, że co druga dziesiątka? Skoro jest 6 i potem 26, to może kolejne będą 46, 66…*

W trakcie, gdy Oliwia mówi, ja wypisuję podawane przez nią liczby na tablicy. Potem, w drugim słupku dopisujemy te liczby, które wg założenia dzieci nie będą poprawną odpowiedzią do tego zadania.
Ja: *Sprawdźmy to. Niech każda grupa wybierze sobie jakąś liczbę z tablicy i ją zbada.*
Dzieci badają wybrane liczby, podchodzą do tablicy i zaznaczają, czy przypuszczenie Oliwki było słuszne.



Dzieci się tak zafascynowały tym sprawdzaniem, że doszły do jeszcze większych liczb.

A co słychać w zeszycie Agnieszki? Co zrobiła z tymi swoimi okienkami?

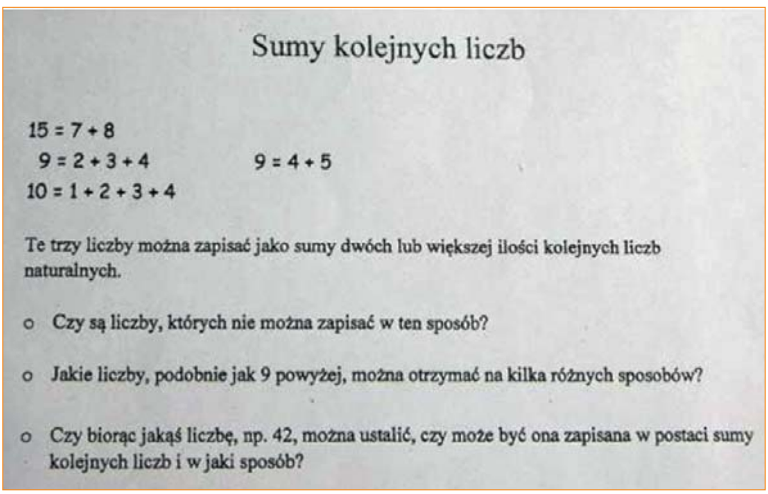


Nie zapisała, że coś zostało z tych dwudziestu sześciu. Wiedziała jednak, że w 26 mieści się sześć czwórek i pięć piątek, i że ta liczba spełnia warunki zadania.
Ja: *Czy jeszcze coś zauważyliście?*
Agnieszka: *Liczby, które mogą być ilością cukierków mają parzyste dziesiątki.*
Ja: *A dlaczego?*
Paweł: *Bo jak się te pełne dziesiątki podzieli przez 4 lub 5, to nic nie zostaje i wtedy jedyne co zostaje, to z tych sześciu jedności – albo 2, albo 1.*

No i zadanie zrobione. Dzieci dzieliły z resztą (wcześniej też to robiły przy zadaniach z wazonami), ale nigdy nie użyły słowa reszta. Poza tym na pewno mnożyły, pytały, wyjaśniały, stawiały hipotezy i je sprawdzały. Całą lekcję z ogromnym zaangażowaniem rozwiązywały problem matematyczny.

Nie tylko o liczbach BUM

Zadanie:



Sumy kolejnych liczb

15 = 7 + 8
9 = 2 + 3 + 4   9 = 4 + 5
10 = 1 + 2 + 3 + 4

Te trzy liczby można zapisać jako sumy dwóch lub większej ilości kolejnych liczb naturalnych.

- Czy są liczby, których nie można zapisać w ten sposób?
- Jakie liczby, podobnie jak 9 powyżej, można otrzymać na kilka różnych sposobów?
- Czy biorąc jakąś liczbę, np. 42, można ustalić, czy może być ona zapisana w postaci sumy kolejnych liczb i w jaki sposób?

Po przeczytaniu tego zadania znaczna część dzieci stwierdziła, że nie rozumie polecenia. Przypomnieliśmy sobie, co to jest suma i wyjaśniliśmy, że kolejne liczby, to liczby następujące po sobie, czyli o 1 większe np. 1, 2, 3, 4 albo 5, 6, 7…

Teraz już dzieci wiedziały, o co chodzi, i w parach zaczęły się zastanawiać nad odpowiedziami.

Jedni zaczęli po prostu badać liczby, które im wpadły do głowy, pisząc kolejne działania w zeszycie. Inni już trochę sobie uporządkowali zapis, dzieląc kartkę na dwie części i wpisując z jednej strony te liczby, które spełniają warunek, a z drugiej te, których nie można przedstawić za pomocą sumy kolejnych liczb.

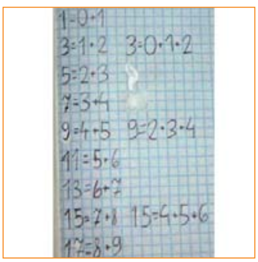
Dzieci szybko stwierdziły, że nie da się przedstawić w ten sposób liczb: 1, 2, 4, 8.

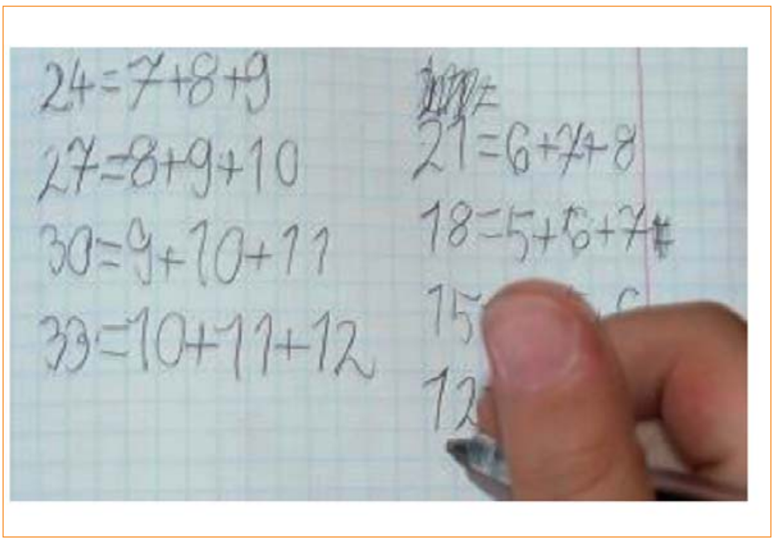
Po zapisie tych liczb na tablicy w takim porządku, Weronika dostrzegła, że nie da się przedstawić w postaci sumy kolejnych liczb każdej „podwojonej" poprzedniej liczby z tego słupka i następnych, czyli dalej 16, 32, 64, i pewnie kolejnych też nie.

Za chwilę na tablicy dzieci zapisały działania z tymi liczbami, które da się przedstawić jako sumę dwóch kolejnych liczb. Teraz zapis na tablicy wyglądał tak:

1   3 = 1 + 2
2   5 = 2 + 3
4   7 = 3 + 4
8   9 = 4 + 5
     11 = 5 + 6
     13 = 6 + 7

Mateusz: *Co druga się da i co druga się nie da.*
Oliwia: *Nieparzyste się da, a parzystych się nie da.*
Ja: *Zaraz, zaraz, a co z liczbą 6 i 10 i z liczbą „1" z pierwszego słupka?*
Paweł: *Sześć da się z trzech składników: 6 = 1 + 2 + 3.*
Marcin: *A 10 z czterech składników, mamy to w zadaniu.*
Kacper: *A jeden da się, bo przecież 0 + 1 jest 1.*
Ja: *No dobrze, przenieśmy jedynkę do drugiego słupka. Skupmy się może na liczbach, które można przedstawić dwoma kolejnymi składnikami.*
Tomek: *Jak liczba, którą sprawdzamy zwiększa się o 2, to każdy jej składnik zwiększa się o 1, czyli są to kolejne liczby:*





Dzieci odkryły i wyjaśniły, że liczby nieparzyste da się przedstawić dwoma kolejnymi składnikami.

Ja: *A co z trzema składnikami? Które liczby można tak przedstawić?*

Dzieci zapisują działania, szukając tych liczb. Niektórzy zaczynają po kolei, od najniższych, inni szukają wśród wyższych… Oto zapis Julki i Nikoli oraz Pawła i Kacpra:

Wypisujemy „odkryte" liczby na tablicy, ale jednocześnie je porządkujemy rosnąco: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33…

Julka: *Co trzecia da się zapisać trzema składnikami.*
Oliwia: *Tam się powiększała suma o 2, bo były dwa składniki, to tu powiększa się o trzy, bo są trzy składniki.*
Ja: *A co łączy te wszystkie liczby (3, 6, 9….)?*
Tomek: *To są liczby BUM!!!!*
Ja: *Czyli?*

Patryk: *Liczby, które były w naszej zabawie BUM*[5] .
Ja: *Czyli? Co to za liczby?*
Paulina: *Liczby podzielne przez 3!*

Patryk dokonuje uogólnienia:
Czyli liczby podzielne przez trzy można przedstawić za pomocą trzech kolejnych składników.
Ja: *No dobrze, a co z liczbą 9? Dlaczego ją można zbudować z dwóch i trzech kolejnych składników?*
Wiktor: *Bo ona jest nieparzysta, czyli można z dwóch i jest liczbą BUM, czyli można z trzech.*

No świetnie, widzę, że nazwa liczby BUM weszła do klasowego słownika matematycznego.
Ja: *Sprawdźmy jeszcze cztery kolejne składniki.*
Oliwia: *Lepiej sprawdzać nie liczbę, a kolejne składniki. Będzie szybciej:*
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$ $\quad$ $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ $\quad$ $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ $\quad$ $4 + 5 + 6 + 7 = 22$

Doskonały pomysł, poszło sprawnie.
Kacper: *Suma rośnie o 4, bo są cztery składniki, a każdy składnik przecież rośnie o jeden, czyli 10, 14, 18, 22, 26, 30....*
Ja: *A pięć składników?*
Już wszyscy wiedzą: suma rośnie o 5.
Ja: *A kiedy będzie można przedstawić liczbę na kilka różnych sposobów?*
Paweł: Jak będzie na przykład nieparzysta i jednocześnie podzielna przez 3 albo 5. Czyli będzie można ją zbudować z dwóch składników, bo jest nieparzysta i z 3 składników, bo jest podzielna przez 3 i z pięciu składników, bo jest podzielna przez 5.
Ja: *Dobrze. W zadaniu mamy jeszcze zbadać liczbę 42. Zastanówcie się teraz nad tą liczbą.*

Siedmioro dzieci (Paweł, Mateusz, Tomek, Wiktor, Dominika, Agnieszka, Oliwia) w klasie odkryło, że 42 da się zbudować z trzech składników, bo jest to liczba podzielna przez 3. Muszę przyznać, że zaskoczyli mnie swoim myśleniem, nie spodziewałam się tego. Pozostali uczniowie po prostu sprawdzali, licząc i udzielając poprawnej odpowiedzi.

To zadanie było trudne. W opisie wydaje się, że dzieci szybko wpadały na nowe pomysły, ale w rzeczywistości zajęło im to sporo czasu.

PODSUMOWANIE

Tak właśnie starałam się pracować przez miniony rok. Dzieci bardzo często zaskakiwały mnie swoją spostrzegawczością, przenikliwością i aktywnością. Niektóre z nich nabyły trochę pokory, inne zaś wyraźnie się uaktywniły. Przez ten rok moi drugoklasiści nauczyli się dostrzegać ważne i mniej ważne prawidłowości, zasady i reguły. Myślę, że zawsze wiele widzieli, ale ja nie dawałam im możliwości podzielenia się tym. Realizowałam podstawę programową, ćwiczyłam, doskonaliłam i nie pozwoliłam odejść od tematu. Przy napotykanych trudnościach tłumaczyłam i wyjaśniałam. Tak było kiedyś. Teraz, po całym roku w projekcie „Dzieci myślą", wreszcie pozwoliłam im samym naprawiać swoje pomyłki, dałam możliwość, by kolega tłumaczył koledze, nie proponowałam gotowych rozwiązań. Cały czas byłam jednak czujna i skupiona, by podążać za tokiem rozumowania moich uczniów. W ten sposób uczyliśmy się od siebie nawzajem.

[5] Zabawa „BUM": dzieci kolejno podają liczby o jeden większe od poprzedniej, począwszy od 1, czyli 1, 2, 3, 4, 5, 6…
Przy czym zamiast „trzy" i wszystkich wielokrotności trójki, trzeba powiedzieć bum (1, 2, bum, 4, 5, bum, 7, 8, bum, 10…).
Bawimy się tak długo, aż ktoś popełni błąd. Wtedy zaczynamy od nowa.

Barbara Kowal
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 61 w Bydgoszczy, w zawodzie 31 lat.

JAK POZWOLIŁAM SWOIM UCZNIOM DZIAŁAĆ, MYŚLEĆ, ROZUMIEĆ, CZYLI O ROZWIĄZYWANIU PROBLEMÓW NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Krystyna Tomecka

Matematyka zawsze miała dla mnie szczególne znaczenie. Kiedy zaproponowano mi udział w projekcie „Dzieci myślą" bez wahania wzięłam w nim udział. *Warto, chociażby po to, by wzbogacić swój warsztat* – pomyślałam. Klasa druga, w której obecnie uczę, jest bardzo specyficzna. Jest to klasa integracyjna. Uczą się w niej uczniowie z różnymi dysfunkcjami: z upośledzeniem umysłowym, autyzmem, zespołem Aspergera. Trudność pracy w tym zespole wynika z proporcji. Dziewięciu na 21 uczniów to dzieci dysfunkcyjne. Druga część to uczniowie zdolni, którzy od samego początku naszej wspólnej pracy wymagali ode mnie szczególnego zainteresowania, innego stopnia trudności zadań matematycznych. Przystępując do projektu, miałam nadzieję sprawdzić, czy mój bardzo zindywidualizowany sposób pracy na lekcjach matematyki ma rację bytu i czy się sprawdzi. A może popełniam błędy? Jeśli tak, to jakie?

PAŹDIERNIK

Tematem mojej pracy stało się rozwiązywanie zadań problemowych, które powinny spełniać pewne zasady. Po pierwsze, mają oderwać uczniów od schematów, które usztywniają ich myślenie. Po drugie, muszą to być zadania, których nie da się uporządkować w żadnym schemacie, pozwalają na szukanie rozmaitych dróg rozwiązań. Najbardziej rozwijające jednak to te, które pozwalają samodzielnie odkryć jakąś nieznaną wcześniej prawidłowość lub znaną regułę zastosować w zupełnie nowej sytuacji.

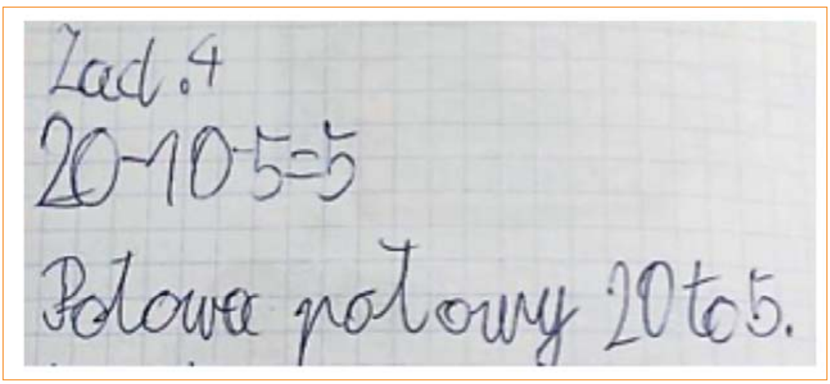
Postanowiłam zacząć swoją pracę od zadań, których nie da się rozwiązać żadnym algorytmem znanym do tej pory uczniom. Początkowe zadania nie były zbyt skomplikowane, gdyż miałam pewne wątpliwości co do umiejętności zupełnie samodzielnej pracy moich uczniów. Założenie projektu było takie, aby dzieci same dochodziły do rozwiązań, bez ingerencji nauczyciela. Tradycja edukacyjna szeptała mi wciąż do ucha, że to chyba zbyt wcześnie na takie samodzielne myślenie. Postanowiłam jednak, że spróbujemy.

Początki ułamków – czy to problem?

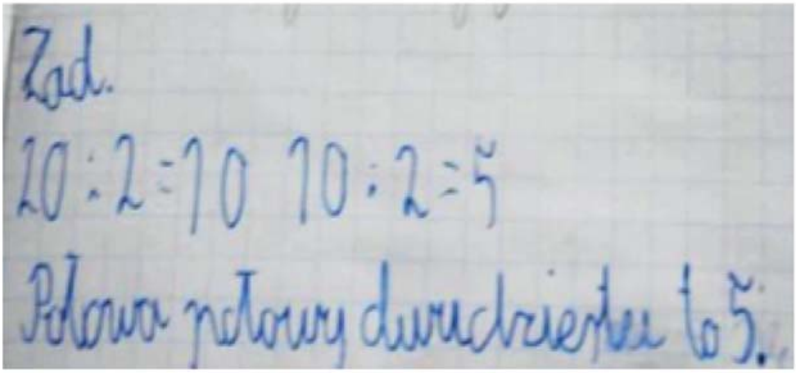
Zadanie 1. ***Ile to jest połowa połowy z dwudziestu?***

To zadanie nie sprawiło uczniom trudności, od razu wiedzieli, że to 5. Zainteresował mnie natomiast ich sposób dojścia do rozwiązania:

Kacper G.



Kacper K.



Wszystkie dzieci bez wahania sięgnęły po znane działania. Kacper K. zapisał rozwiązanie w postaci dzielenia, chociaż na lekcjach matematyki formalnie nie mówiliśmy jeszcze o dzieleniu. Zapytałam, dlaczego właśnie tak rozwiązali te zadania.
Kacper G.: *Odjąłem najpierw 10, bo to połowa z 20, a potem 5, bo to połowa 10.*
Kacper K.: *Podzieliłem na połowę 20 i było 10. Potem podzieliłem na połowę 10 i wyszło, że to 5.*

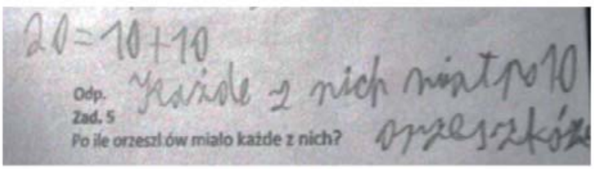
Wniosek, który płynął dla mnie z rozwiązania tego zadania, był taki, że dla uczniów klasy drugiej było ono łatwe, a intuicje dotyczące ułamków całkiem niezłe. Postanowiłam więc wykorzystać to i sprawdzić poziom tych intuicji w innych zadaniach.

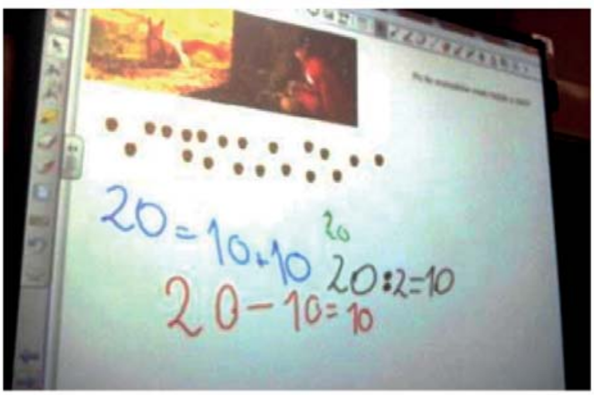
Kolejne zadanie było rozwiązywane w trakcie zajęć dotyczących bajki matematycznej pt. „Czerwony Kapturek".

Zadanie 2.* *Tymczasem Czerwony Kapturek zapomniał o wyścigu i zbierał orzeszki dla babci. Zebrał ich aż 20. Koszyk zrobił się z tego powodu zbyt ciężki, dlatego dziewczynka postanowiła podzielić się nimi z wiewiórką. Dała jej połowę tego, co zebrała. Policz, ile orzeszków miała każda z nich.

Większość rozwiązań była taka sama jak poprzednio. Tylko u Ani pojawiło się nowe działanie – dodawanie.
Moje pytanie: *Czy istnieje inny sposób rozwiązania tego zadania?* sprowokowało Marysię do zastosowania odejmowania.

Na tej samej lekcji pojawiło się jeszcze jedno zadanie. Dotyczyło ono dzielenia. W innym miejscu tej samej bajki babcia rozkładała rogaliki i babeczki na talerzyki. Miała 6 rogalików oraz 9 babeczek.



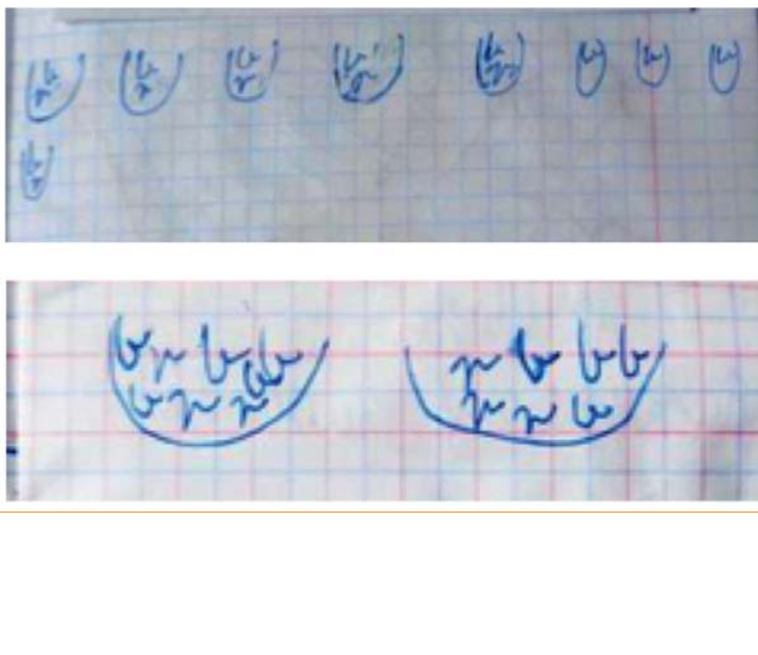


***Zadanie 3.* W jaki sposób babcia rozłożyła rogale i babeczki? Zaproponuj swój sposób.**

Na uwagę zasługuje sposób zapisu podzielonych smakołyków. Część dzieci w schematyczny sposób rysowała babeczki i rogaliki. Były takie, które zapisywały pierwsze litery danego ciastka. Nieświadomie wkroczyły one w świat algebraicznej notacji matematycznej.

Dałam im wolność działania. Jak widać, część dzieci rozmieszczała babeczki i rogaliki bez ustalonej zasady. Jedyną rzeczą, na którą zwracały uwagę, to odpowiednia liczba ciastek. Znalazły się jednak i takie rozwiązania, w których dzieci szukały zasady, według której rozkładały ciastka.

Julia i Olivier rozłożyli dokładnie po tyle samo na każdym talerzu, uzasadniając to trzema osobami zaproszonymi na przyjęcie. Marysia natomiast sugerowała się rodzajem ciastek i stąd osobny talerz dla rogalików i osobny dla babeczek.



W trakcie rozwiązywania tego zadania nie używaliśmy ani pojęcia dzielenia, ani znaków matematycznych. Zostawiłam dzieciom całkowitą autonomię, stąd też pojawiło się wiele pomysłów. Sukcesem było rozwiązanie zadania przez wszystkich uczniów. Ucieszyły mnie także próby szukania przez uczniów zasady podziału ciastek.

Zadania zaproponowane przeze mnie w październiku pokazały mi, że chyba nie doceniam swoich uczniów, nie znam w pełni ich możliwości. Moją uwagę zwrócił fakt, że za każdym razem pojawiało się kilka możliwych poprawnych rozwiązań. Ciekawe były też próby, trochę nieśmiałe, szukania pewnych prawidłowości, zasad, którymi rządzi się matematyka. Wiedziałam już, że muszę zmienić dotychczasowe metody pracy.

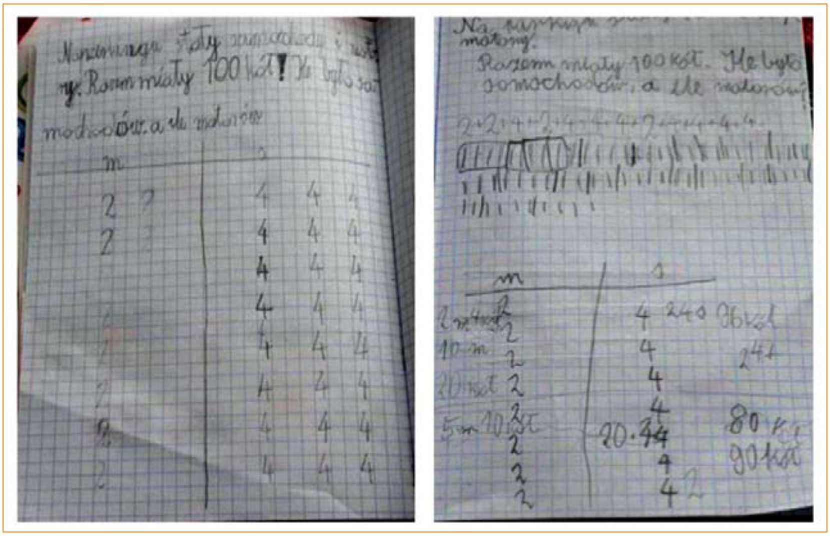
Zadania tekstowe – czy to problem?

LISTOPAD

Trudno jest stwierdzić, jakie zadanie dla kogoś jest problemem, a jakie nie. Zależy to od doświadczeń i wiedzy uczniów. To, co dla jednych jest już łatwe, dla innych może wydać się nie do rozwiązania. Niekiedy zadanie, które proponujemy dzieciom, okazuje się zbyt trudne. Tak stało się na jednej z pierwszych lekcji w tym roku szkolnym.

***Zadanie 1.* Na parkingu stoją samochody i motocykle. Razem jest 100 kół. Ile samochodów, a ile motorów stoi na parkingu?**

To była moja pierwsza poważna porażka, gdyż zadanie okazało się zbyt trudne. Dzieci nie proponowały żadnych rozwiązań. Postanowiłam zastosować podpowiedź w postaci tabelki. Niewiele to pomogło. Zadanie nie zostało rozwiązane. Dlaczego tak się stało? Może to zakres liczbowy, gdyż był to początek klasy drugiej, a może brak pewności siebie? A może zwyczajnie nie byli gotowi na to zadanie? Poniżej próby rozwiązań.



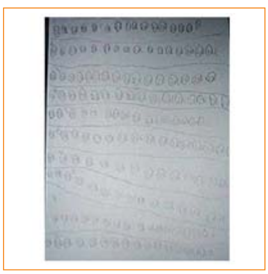
Zadania problemowe to „problem” nie tylko dla ucznia, ale także dla nauczyciela. Może temat mojego artykułu powinien brzmieć: „O rozwiązywaniu problemów przez nauczycieli klas I–III”? Wątpliwości, które pojawiły się w październiku, znów wróciły. Postanowiłam jednak się nie zrażać. Jedno nierozwiązane zadanie nie może świadczyć o braku umiejętności myślenia dzieci. Postanowiłam pozostawić to zadanie bez rozwiązania, gdyż nie chciałam stosować zbyt nachalnych podpowiedzi. To zadanie rozwiążemy być może w trzeciej klasie. Ten problem uczulił mnie na właściwy dobór zadań do rozwiązania. Problemy muszą być na miarę uczniów. Może powinnam zaproponować rozwiązanie na konkretach, np. żetonach itp.?

STYCZEŃ

Po próbie rozwiązania zadania otwartego o samochodach i motorach ponowiłam próbę pracy nad tego typu zadaniami. Zadanie z monetami było jednym z pierwszych, na które się odważyłam.

Zadanie 2. ***Kuba miał szesnaście monet jedno- i dwuzłotowych. Ile miał pieniędzy?***

To zadanie rozwiązywaliśmy wspólnie na lekcji. Początkowo kilka osób błędnie zrozumiało treść zadania, myśląc, że Kuba miał 16 zł. Dzieci podawały różne możliwości rozwiązania. Znalazły się takie, które same z siebie miały potrzebę odkrycia, ile jest wszystkich możliwości. Przyniosły ich listę następnego dnia. Najważniejsze dla mnie było to, że same miały potrzebę poszukiwań, Każde dziecko może znaleźć swoje własne rozwiązanie. Działa to mobilizująco na uczniów nawet tych najsłabszych. W tego typu zadaniach uczeń słaby znajduje swoje rozwiązanie, choćby na zasadzie analogii – podgląda kolegę i daje swoją, inną odpowiedź. A oto poszukiwane przez dzieci wszystkie możliwe rozwiązania.



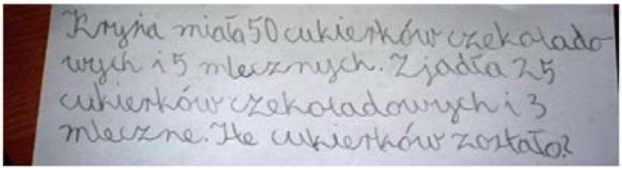
GRUDZIEŃ – KWIECIEŃ

Zadanie 3. ***Ułóż zadanie tekstowe tak, aby było ono, według ciebie, trudne.***

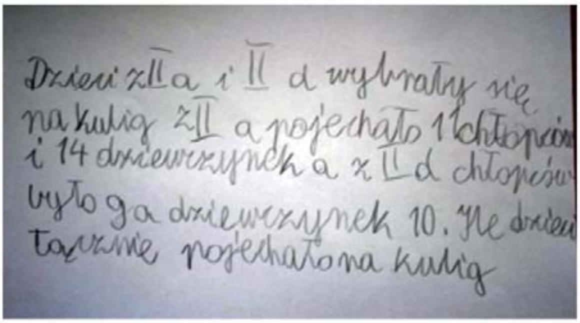
Pracując w klasie integracyjnej, mam do czynienia z dziećmi o różnych możliwościach. Stąd też pomysł na stworzenie naszego klasowego zbioru zadań całkowicie wymyślonego przez uczniów. Dzieci otrzymały polecenie, aby ułożyły zadania tekstowe, które według nich będą trudne.

Uczniowie mogli posiłkować się zadaniami, które znajdują się w matematycznych kartach pracy. Powstały naprawdę ciekawe zadania, zwłaszcza dlatego, że mają one różny poziom trudności w zależności od możliwości dzieci. Przypominam, że miały to być zadania „trudne".

Marysia

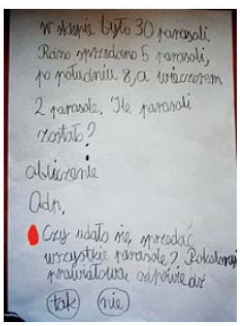

Krysia miała 50 cukierków czekoladowych i 5 mlecznych. Zjadła 25 cukierków czekoladowych i 3 mleczne. Ile cukierków zostało?

Iza


Dzieci z II a i II d wybrały się na kulig. Z II a pojechało 1 chłopców i 14 dziewczynek a z II d chłopców było 9 a dziewczynek 10. Ile dzieci łącznie pojechało na kulig

W tych dwóch przypadkach na uwagę zasługuje fakt, że Marysia wydawała mi się dziewczynką o większych możliwościach niż Iza (jest dzieckiem z zespołem Aspergera), a stopień trudności zadań był bardzo zbliżony, a nawet zadanie Izy wydaje się trudniejsze.

W zamyśle Mateusza trudność tego zadania zwiększa liczba pytań zaproponowanych przez niego.
Mateusz P.


W sklepie było 30 parasoli. Rano sprzedano 5 parasoli, po południu 8, a wieczorem 2 parasole. Ile parasoli zostało?

obliczenie

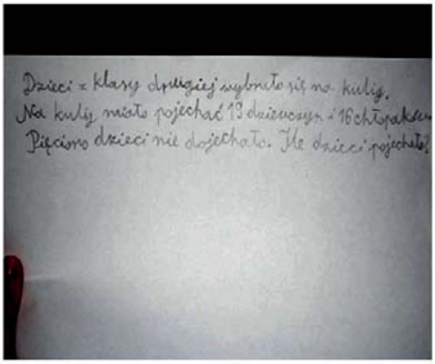
Odp.

Czy udało się sprzedać wszystkie parasole? Pokoloruj prawidłową odpowiedź

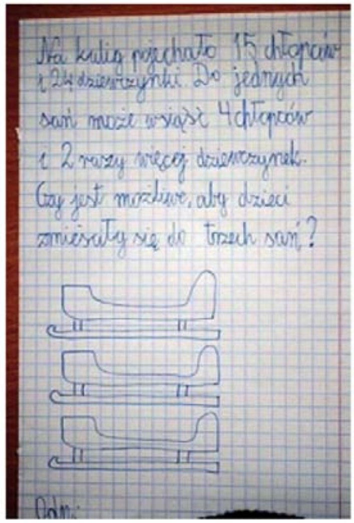
tak nie

Dwa zadania o kuligu. Najprawdopodobniej dzieci korzystały z tej samej bazy. Dla Ani zadanie, które wydawałoby się banalne, jest nadal trudne – dla mnie to sygnał, że trzeba jej poświecić więcej czasu, dawać trudniejsze wyzwania. Jest to dziewczynka, w której drzemią ogromne pokłady możliwości. Julka od dawna daje mi sygnały, że ma duże możliwości i je wykorzystuje. Podane zadania są dla mnie potwierdzeniem tej drogi, która daje szansę wszystkim dzieciom na osiągnięcie sukcesu, a nauczycielowi szansę na wskazówki do dalszej pracy.

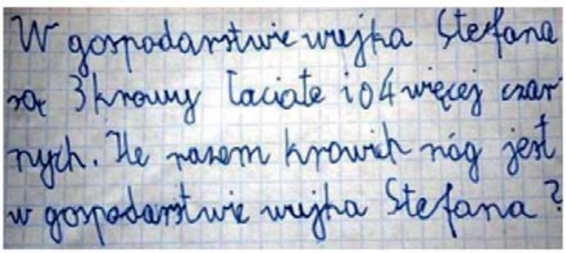
Ania

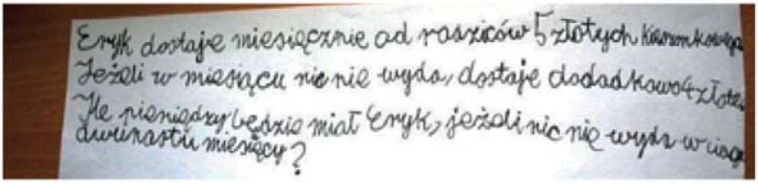


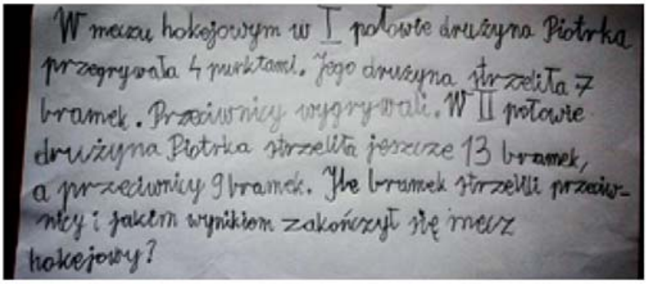
Julka

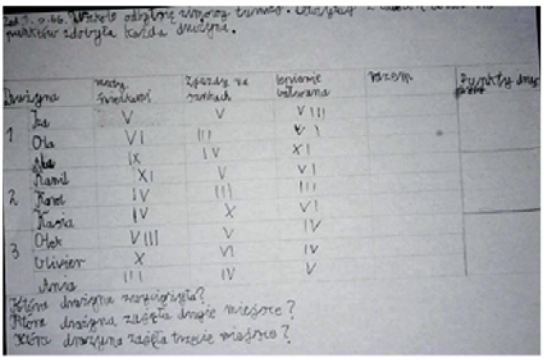


Oto inne – myślę, że ciekawe – propozycje zadań dzieci.

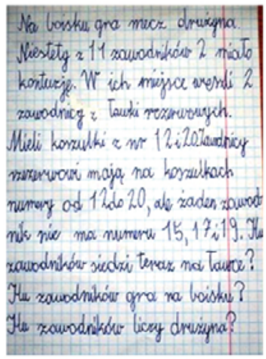



Eryk dostaje miesięcznie od rodziców 5 złotych kieszonkowego.
Jeżeli w miesiącu nic nie wyda, dostaje dodadkowo 4 złote.
Ile pieniędzy będzie miał Eryk, jeżeli nic nie wyda w ciągu
dwunastu miesięcy?


W meczu hokejowym w I połowie drużyna Piotrka
przegrywała 4 punktami. Jego drużyna strzeliła 7
bramek. Przeciwnicy wygrywali. W II połowie
drużyna Piotrka strzeliła jeszcze 13 bramek,
a przeciwnicy 9 bramek. Ile bramek strzelili przeciw-
nicy i jakim wynikiem zakończył się mecz
hokejowy?


Drużyna					Razem	Punkty drużyny
1	Iza	V	V	VIII		
	Ola	VI	III	VI		
	Ala	IX	IV	XI		
2	Kamil	XI	V	VI		
	Karol	IV	III	III		
	Kasia	IV	X	VI		
3	Olek	VIII	V	IV		
	Olivier	X	VI	IV		
	Ania	III	IV	V		

Która drużyna zwyciężyła?
Która drużyna zajęła drugie miejsce?
Która drużyna zajęła trzecie miejsce?


Na boisku gra mecz drużyna.
Niestety z 11 zawodników 2 miało
kontuzję. W ich miejsce weszli 2
zawodnicy z ławki rezerwowych.
Mieli koszulki z nr 12 i 20. Zawodnicy
rezerwowi mają na koszulkach
numery od 12 do 20, ale żaden zawod-
nik nie ma numeru 15, 17 i 19. Ile
zawodników siedzi teraz na ławce?
Ile zawodników gra na boisku?
Ile zawodników liczy drużyna?

Tworzenie tego typu zadań pokazuje również złożoność myślenia dzieci. Uczeń tworząc zadanie, musi przewidywać, gdyż powinien też znaleźć rozwiązanie problemu, który stworzył. Zadania, które tutaj przedstawiłam, są ciekawe pod względem treściowym, myślę, że bliskie dzieciom, które je tworzyły. Zadania te wymagają „gimnastyki matematycznej", w tym umiejętności czytania ze zrozumieniem.

U Igora zwiększenie stopnia trudności polegało na zapisie danych za pomocą znaków rzymskich. Moim zdaniem należy pobudzać aktywność intelektualną dzieci poprzez samodzielne wymyślanie problemów matematycznych. Daje to nauczycielowi ogrom informacji o uczniu i ułatwia indywidualizację procesu nauczania. Może również stać się impulsem mobilizującym dzieci.

Zadania, które tworzą dzieci, są tylko początkiem drogi. Wspólnie je układamy i kolekcjonujemy, ale także rozwiązujemy i dyskutujemy na ich temat. Wszyscy szukamy sposobów rozwiązań, rozmawiamy o stopniu trudności i zmianach, jakie można by jeszcze wprowadzić.

Brakło mi zadań otwartych, więc postanowiłam stworzyć sytuację, która zmobilizuje dzieci do tworzenia tego typu problemów.

Zadanie 4. *Ułóż zadanie do gry.*

Miałam w klasie gotową grę, z której jeszcze nigdy nie korzystałam. Nie było to nic specjalnie zajmującego: plansza z 12 polami, na których zapisane były liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 9 12, 16, 18, 24, 36, 25. Założyłam sobie, że zagramy w wersję podstawową tej gry:

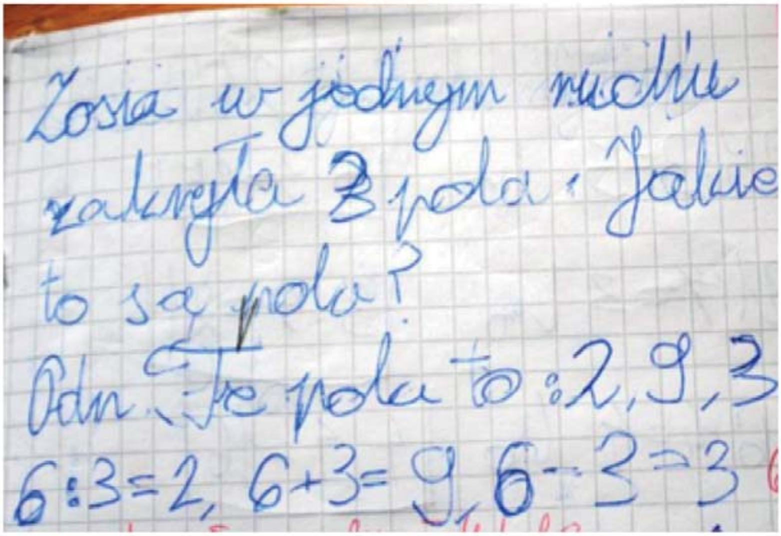
- *uczeń rzuca dwiema kostkami, mnoży wyrzucone przez siebie liczby i zakrywa pole z wynikiem tego działania;*
- *do dyspozycji dzieci są żetony w dwóch kolorach;*
- *wygrywa ta osoba, która zakryje więcej pól żetonami w swoim kolorze.*

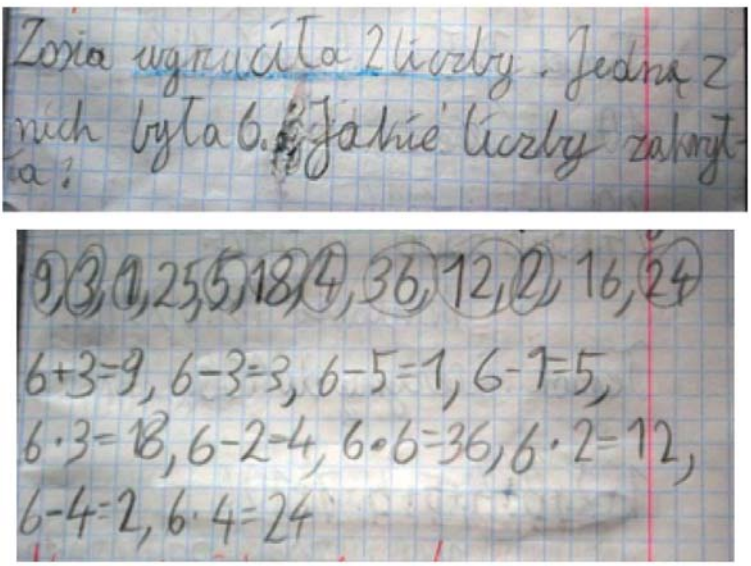
Do tej wersji gry przygotowałam poniższe zadania otwarte:

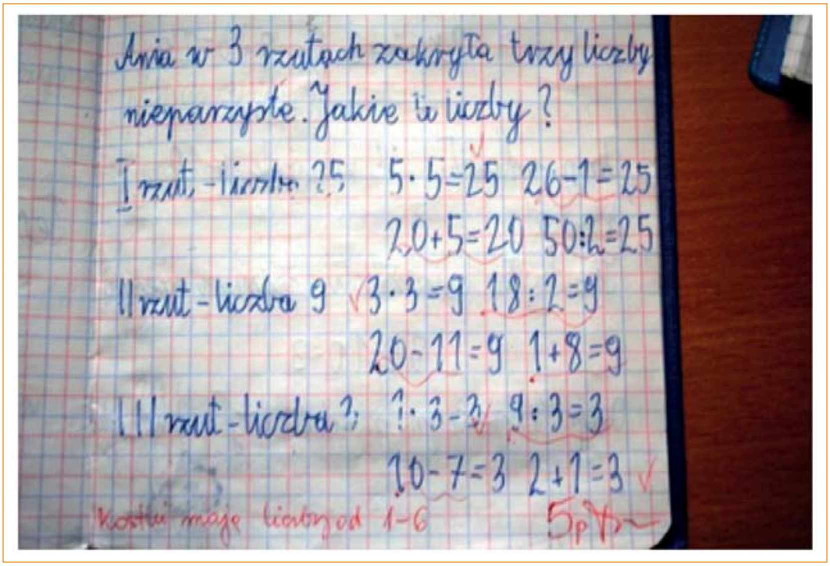
1. Zosia w trzech rzutach zakryła trzy liczby parzyste. Jakie to liczby? Co musiała wyrzucić na kostkach?
2. Zosia wyrzuciła dwie liczby. Jedną z nich była 6. Zosia zakryła liczbę mniejszą od 20. Jakie liczby mogła zakryć? Jaką drugą liczbę mogła wyrzucić?
3. W następnych dwóch rzutach Zosia zakryła liczby, które po dodaniu dają 30. Jakie liczby zakryła? Co wyrzuciła?

Wszystkie zadania rozwiązywaliśmy na tablicy, nie było kłopotu ze znalezieniem rozwiązania. Chciałam sprawdzić, które zadanie, według dzieci, sprawiło im najwięcej trudności. Uczniowie stawiali kropki przy wybranym zadaniu, w zależności od stopnia trudności. Mogli postawić od 0 do 3 kropek. W rankingu zwyciężyło zadanie z numerem 2.

Postanowiłam zmienić zasady gry tak, aby była ona mniej losowa. Zasady miały zaproponować dzieci, które we wcześniejszej wersji bardzo szybko zauważyły, że losy gry zależą od szczęścia. Propozycja uczniów była taka, aby wykonywać na dwóch kostkach wszystkie możliwe działania matematyczne i zakrywać jedną wybraną liczbę. Igor w trakcie zabawy zaproponował, aby zakrywać wszystkie możliwe do zakrycia pola. Do gry wróciłam następnego dnia. Dzieci musiały samodzielnie ułożyć zadania tekstowe do jej ostatniej wersji. Miały one wzbogacić nasz zbiór zadań. Oto kilka przykładowych zadań dzieci.






Ania w 3 rzutach zakryła trzy liczby nieparzyste. Jakie to liczby?

I rzut - liczba 25 5·5=25 26-1=25

20+5=20 50:2=25

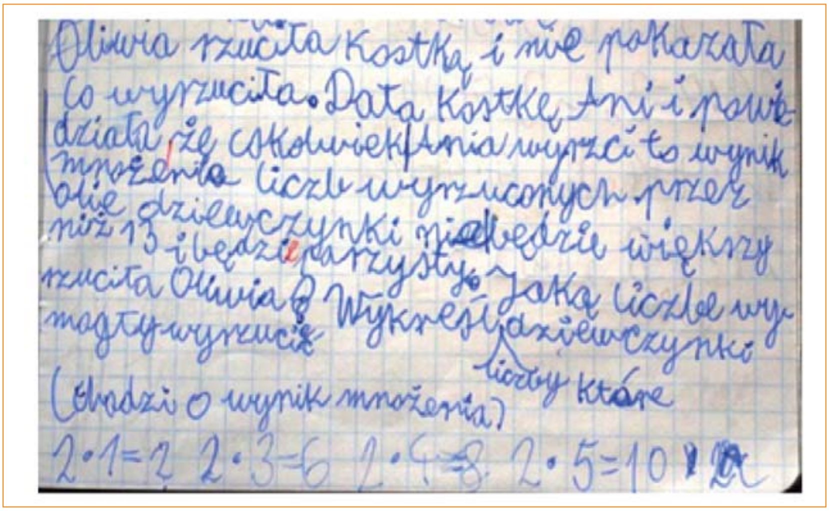
II rzut - liczba 9 3·3=9 18:2=9

20-11=9 1+8=9

III rzut - liczba 3: 1·3=3 9:3=3

10-7=3 2+1=3

Kostki mają liczby od 1-6 5p


Oliwia rzuciła kostką i nie pokazała co wyrzuciła. Dała kostkę Ani i powiedziała że cokolwiek Ania wyrzuci to wynik mnożenia liczb wyrzuconych przez obie dziewczynki nie będzie większy niż 13 i będzie parzysty. Jaką liczbę wyrzuciła Oliwia? Wykreśl liczby które mogły wyrzucić dziewczynki

(chodzi o wynik mnożenia)

2·1=2 2·3=6 2·4=8 2·5=10

Mój komentarz do tego zadania dotyczył liczb, które mamy na kostkach. Kacper zapomniał, że nie było tam np. 7 czy 9.

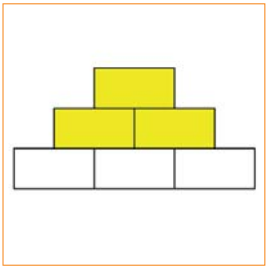
Długo myślałam nad tym, czy przedstawić tu zadanie Karoliny, gdyż nie było ono zgodne z ustalonymi zasadami gry. Spodobało mi się właśnie dlatego, że było inne. Wymagało też ode mnie dużego wysiłku umysłowego, gdyż sugerując się innymi propozycjami, początkowo nie do końca rozumiałam, o co w nim chodzi. Dziewczynka zapomniała o dwóch możliwych rozwiązaniach: 2 × 2, 2 × 6.

Niektóre zadania są bardzo podobne do moich, ale myślę, że można doszukać się w nich twórczego myślenia, pomysłowości dziecięcej. Samo tworzenie zadań tekstowych bardzo spodobało się dzieciom i chętnie wracamy do tego typu aktywności. Zakładam tworzenie zbioru zadań przez całą klasę trzecią, a na koniec wydanie tego w małym szkolnym nakładzie.

Szukanie prawidłowości – czy to problem?

„Umiejętność uzasadniania, argumentowania jest kompetencją istotną w życiu jednostki, a w przypadku rozumienia pojęć matematycznych ma znaczenie szczególne"[1]. Starałam się, aby to dzieci same odkrywały nawet najprostsze, według nas, definicje. Teraz tylko utwierdziłam się w przekonaniu, że dobrze robiłam.

GRUDZIEŃ

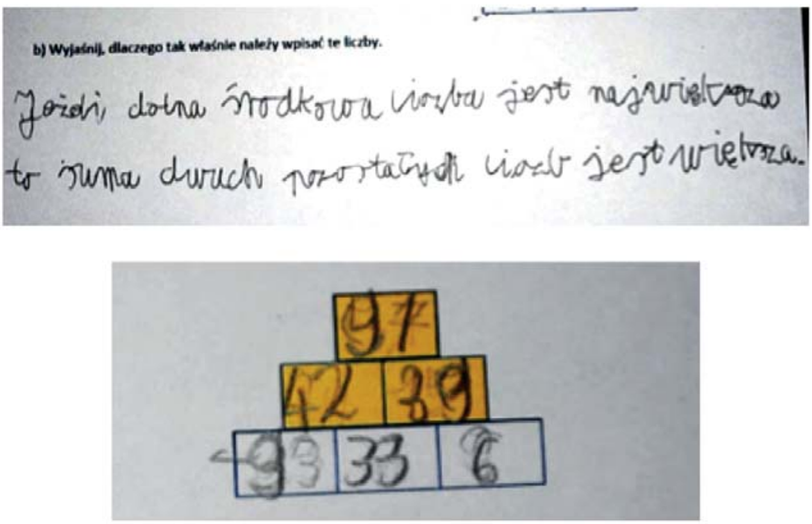


Zadanie 1[2]

a. Jak należy wpisać liczby 6, 9, 33 w dolnym rzędzie piramidki, żeby górna liczba była największa? Wpisz je w ten sposób w dolny rząd tej piramidki

b. Wyjaśnij, dlaczego tak właśnie należy wpisać te liczby.

Część uczniów wykonała zadanie metodą prób i błędów, inni niemal od razu wiedzieli, jak poprawnie wpisać liczby. Nie wszyscy uzasadnili swój wybór.



Mateusz i Olivier, podobnie jak i inne dzieci, poprawnie rozwiązali ten problem. Zauważyli, że na środku należy wpisać liczbę największą, gdyż w ten sposób otrzyma się największą sumę. Igor poszedł o krok dalej – sformułował dość precyzyjne twierdzenie, dzięki któremu można rozwiązywać podobne zadania. To zadanie pokazuje nam, że uczniowie mogą budować swoją intuicję i wiedzę matematyczną zupełnie samodzielnie, bez ingerencji nauczyciela. Tworzą nawet swoiste algorytmy. Stają się naukowcami, twórcami teorii matematycznych. Staram się rozbudzać w uczniach taką potrzebę samodzielnego odkrywania praw rządzących światem matematyki.

A co z dziećmi ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi? Pierwsza część zadania, czyli wypełnianie piramidek, to tylko zwykłe rachunki. Z małym wsparciem nauczyciela dokonywali obliczeń, czasem używając liczydła. Był to dobrze wykorzystany czas.

[1] A. Kalinowska, Pozwólmy dzieciom działać. Mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego, CKE, Warszawa 2010, s. 117.

[2] Zarówno to, jak i następne zadanie pochodzą z cytowanej już książki A. Kalinowskiej.

STYCZEŃ

a. ***Uzupełnij tabelkę.***
b. ***W tej tabelce usunięto dodawane liczby. Uzupełnij w niej pola puste. Zrób to na różne sposoby.***
c. ***A czy tę tabelkę także można uzupełnić? Jak myślisz, dlaczego tak się dzieje?***

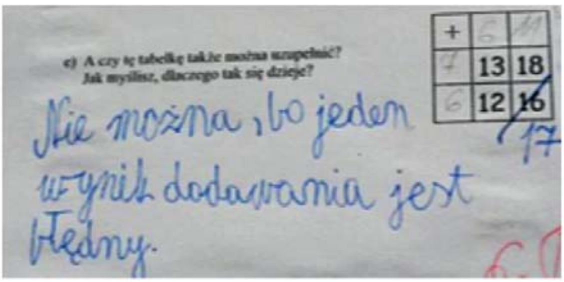
+	14	8
11	25	
9		

+		
	25	19
	17	11

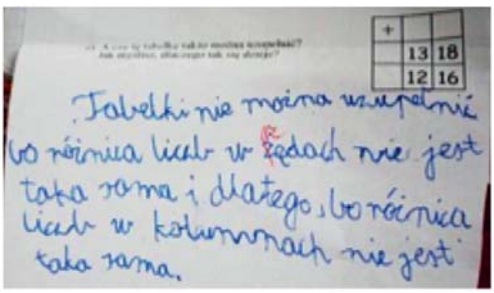
+		
	13	18
	12	16

Zaciekawił mnie sposób radzenia sobie dzieci z tym problemem. Uzupełnianie tabelek było dość proste. Bardzo szybko dzieci zauważyły, w jaki sposób uzupełniać drugą tabelkę, jak zmieniać liczby, aby wszystko się zgadzało. Najwięcej trudności sprawiło im wymyślanie uzasadnienia do obliczeń w trzeciej tabelce. Oto niektóre efekty ich przemyśleń.

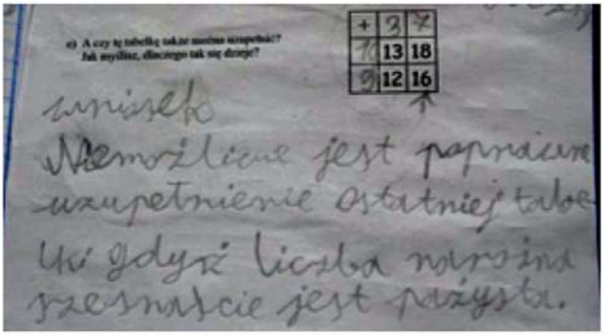
Karolina



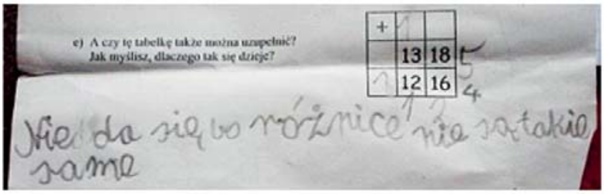
Marcin



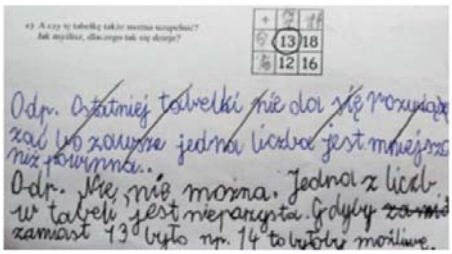
Igor



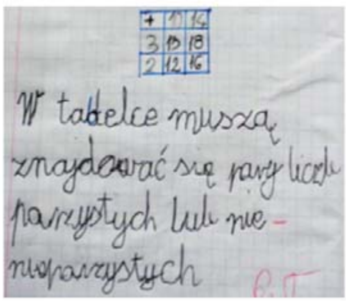
Kacper G.



Ania



Julka



Większość zauważonych przez uczniów relacji między liczbami dotyczyła dodawania liczb parzystych i nieparzystych. Marcin i Kacper zauważyli inną prawidłowość dotyczącą różnic, które powinny być takie same, wtedy to zadanie byłoby wykonalne. W ciekawy sposób poradziła sobie Karolina, która uznała, że błąd należy poprawić i w ten sposób rozwiązać problem i osiągnąć sukces. To zadanie bardzo przypadło do gustu i mnie, i uczniom z jednego bardzo ważnego powodu. Mogły je wykonać wszystkie dzieci w klasie, gdyż stopniowano w nim trudność i każdy miał swoją szansę na sukces. Grupa dzieci uzupełniła tylko te tabelki, w których należało dodawać do siebie liczby. Inne pokusiły się o wpisanie dodawanych liczb i znalazły kilka rozwiązań. Połowa klasy szukała uzasadnienia ostatniego zadania w bardziej lub mniej trafny sposób. Wszyscy jednak pracowali nad tym samym zadaniem, co w przypadku dzieci z wszelkiego rodzaju deficytami jest ogromnie ważne.

Pole i obwód w klasie drugiej – czy to problem?

MAJ

Geometria płaska była dla mnie zawsze tematem dość trudnym. Chyba intuicyjnie wiedziałam, że nie jest to dla dzieci łatwe. Okazało się, że miałam rację. Geometria płaska nie istnieje w otaczającym nas świecie. Wokół nas są bryły. No ale coś z tym trzeba zrobić i musi to być zrobione ciekawie, na miarę możliwości dzieci i – przy tej okazji – muszą pojawić się prawdziwe problemy, takie, które zmobilizują dzieci do twórczego myślenia.

Pewnego dnia gościliśmy na lekcji profesora Jana Potworowskiego, który poprowadził lekcję matematyki dotyczącą geometrii płaskiej, a dokładnie obliczania obwodów i pól prostokątów. Profesor w formie zabawy – zadania dotyczącego zagrody dla ślimaków – wprowadził dzieci w świat pól i obwodów. Pomocą zastosowaną w trakcie zajęć były kolorowe kwadraciki. Dzieci układały z nich podłogę zagrody, co prowadziło do pola prostokąta. Płotki otaczające zagrodę tak, aby ślimaki z niej nie uciekły, budowały pojęcie obwodu. Dzieci same definiowały, co oznaczają poznawane na tej lekcji terminy. Po tej lekcji byłam prawie pewna, że większość uczniów wie intuicyjnie, co to jest obwód i pole prostokąta. Postanowiłam to sprawdzić i wykorzystać tę wiedzę na kolejnych zajęciach. Zaplanowałam zadania na cały kolejny tydzień i konsekwentnie je realizowałam, pamiętając, aby podążać za uczniem.

***Zadanie 1.* Czy kwadrat jest prostokątem?**

W trakcie zajęć zauważyłam, że dzieci mają problem z układaniem kwadratów, gdy mowa o prostokątach, tym bardziej że na podłodze z kafelków ułożono „typowy” w rozumieniu dzieci prostokąt (dwa boki dłuższe, dwa krótsze). Moje pierwsze pytanie dotyczyło prostokąta.

– *Jakie cechy ma każdy prostokąt?*

Dzieci odpowiadały typowo.

Julka: *Ma cztery boki.*

Kacper K.: *Dwa boki są dłuższe, a dwa krótsze.*

Karolina: *Ma cztery rogi.*

– *Czy ktoś zna inną nazwę dla tych rogów?*

Ania: *To chyba kąty.*

– *Czy ktoś z was wie, jakie to są kąty?*

W tym momencie nie było żadnej odpowiedzi, więc zastosowałam pewną podpowiedź.

– *Powiedzcie kilka razy słowo prostokąt. Co zauważyliście?*

Olivier: *Już wiem. Prostokąt, czyli kąt prosty.*

– *A jak wygląda ten kąt prosty?*

Olek: *To taki, co nie jest wygięty.*

Kacper G: *Ja mogę pokazać taki kąt.*

Dzieci pokazywały kąty proste w swoim najbliższym otoczeniu bez definiowania, co to jest kąt prosty i nie było z tym żadnego kłopotu. Nawet najsłabsi uczniowie potrafili bezbłędnie pokazać przykładowy kąt prosty.

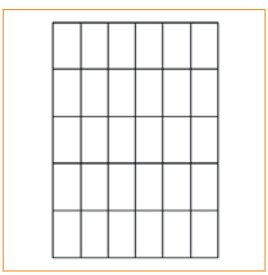
– *To kto mi powie, co to jest prostokąt?*

Kacper K.: *Musi mieć cztery kąty proste, dwa boki dłuższe i dwa krótsze.*

Ula: *Nie, bo kwadrat też jest prostokątem, tylko trochę ściśniętym.*

– *W takim razie, co musi mieć każdy prostokąt?*

Ula: *Musi mieć cztery boki i cztery kąty proste i dlatego kwadrat też jest prostokątem, bo ma cztery boki i cztery kąty proste.*



***Zadanie 2.* Ułóż prostokąt składający się z 18 kwadratów. Ile wynosi jego pole, a ile obwód?**

Dzieci bardzo szybko ułożyły różne możliwe prostokąty i podały obliczone pola i obwody. Ponowiłam pytanie, które miało mnie utwierdzić w przekonaniu, że dzieci znają pojęcia obwodu i pola.

– *Powiedzcie, co to jest obwód.*

Dzieci: *Ilość płotków. To co dookoła.*

Pojawiło się też wskazywanie ręką.

Dzieci: *To po czym chodzimy. Ilość kwadracików w środku.*

W tym czasie na tablicy pojawił się rysunek.

Zadanie 3. Oblicz szybko pole i obwód tego prostokąta?

Olivier: *Ja liczyłbym tak: $5 + 5 = 10$, $6 + 6 = 12$, $10 + 12 = 22$, obwód wynosi 22.*

Marcin: *$5 \times 6 = 30$, pole wynosi 30.*

Po zapisaniu działań na tablicy, pytałam dzieci o inne sposoby, ale się nie pojawiły. Wiedziałam już, że większość dzieci wie, co to jest pole i obwód prostokąta. Zawsze boję się o najsłabszych uczniów. Zbyt trudne zadania mogą ich zniechęcić i zablokować dalszy rozwój. W tym przypadku jestem pewna, że nawet Olek, Mateusz czy Szymon potrafią znaleźć pole i obwód prostokąta. Muszę pamiętać o dawaniu uczniom więcej czasu do przemyślenia.

Zadanie 4. Prostokąt, ma pole 40. Oblicz, która zagroda będzie najtańsza, jeżeli jedna płytka kosztuje 6 F, a jeden płotek 10 F.

Jak widać dzieci świetnie poradziły sobie z tym problemem i znalazły różne sposoby rozwiązania. Na uwagę zasługuje fakt, że już przed przystąpieniem do obliczeń uczniowie zorientowali się, że prostokąt o który chodzi w zadaniu, musi być jak najbardziej zbliżony do kwadratu. *Pękaty* – jak to określiła Julka. Na zdjęciu widać tylko jedno obliczenie, gdyż uczeń widział, że nie musi obliczać wielu działań, aby stwierdzić, która zagroda będzie najtańsza.

Marcin: *Pole się nie zmienia. Ważny jest tylko obwód, czyli ilość płotków.*

Zadanie 5. Masz przed sobą kartkę A4 i kolorowe kwadraciki. Zaproponuj sposób obliczenia pola i obwodu tej kartki.

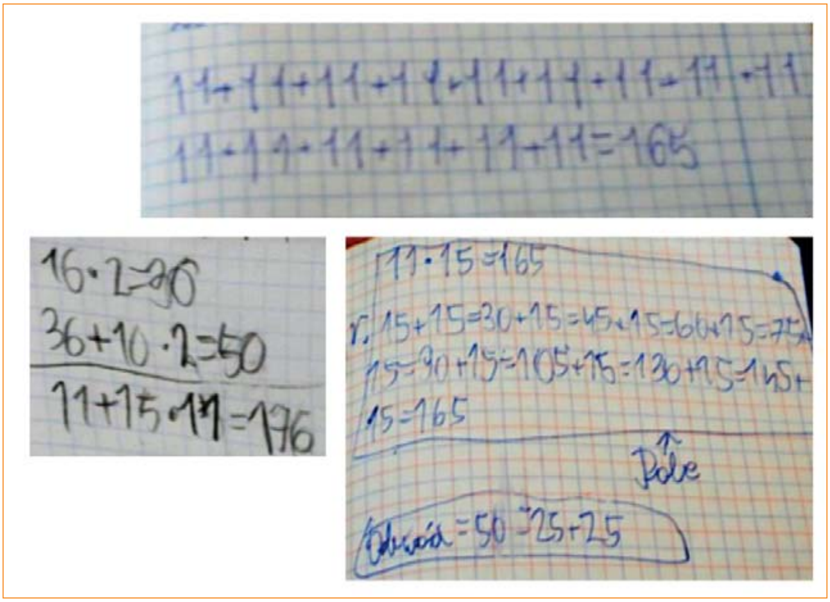
Dzieci pracowały w czteroosobowych zespołach. Przed przystąpieniem do pracy przypomnieliśmy sobie zasady dobrej współpracy w zespole. Dostrzegłam wiele cech charakteru uczniów, których do tej pory nie zauważałam.

Rozpoczęła się praca. Wszystkie zespoły wiedziały, jak wykonać te zadania. Rozumieli pojęcie pola i obwodu, więc doskonale wykorzystali kolorowe kwadraciki. Zrobili to w różny sposób. Zespołom poniżej wystarczyło ułożenie kwadracików na dwóch bokach:



Drużyna czwarta ułożyła kwadraty na wszystkich bokach, natomiast ostatni zespół zapełnił kwadracikami całą kartkę:


Teraz należało obliczyć pole i obwód tych prostokątów. Dzieci zabrały się do pracy i liczyły w zespołach. Okazało się, że wyniki różnią się między sobą. Na moje pytanie: Dlaczego te wyniki różnią się od siebie? Nie uzyskałam odpowiedzi. Byłam prawie pewna, że dzieci wskażą drużynę sąsiednią jako tę, która się pomyliła. Tak się nie stało, więc zaczęliśmy analizować rozwiązania. Myślę, że to ogromny sukces pedagogiczny, który był możliwy dzięki dotychczasowej pracy. Dzieci próbowały znaleźć błąd.



Jeden zespół obliczył, że jest 11 rzędów po 15 kwadracików, stąd mnożenie 11 × 15. Nie ma co, dwucyfrowa przez dwucyfrową! To jednak, jak widać na zdjęciu, nic trudnego, gdyż chłopcy wspomogli się dodawaniem. Wynik ostateczny pola poprawny. Jeśli chodzi o obwód, to widać kolejny sposób obliczenia, jaki się wcześniej nie pojawił.

Dzieci wyjaśniły, że dodały 11 + 15 = 25, 25 + 25 = 50. Drobna pomyłka rachunkowa. Trudności skłaniały dzieci do większego skupienia i poprawiania pomyłek.

Drugie podobne rozwiązanie. Tutaj dodawano 11 piętnaście razy. Działanie wykonane bezbłędnie.

Bardzo zaciekawiło mnie rozwiązanie jednej z grup. Inny jest nie tylko sposób liczenia, ale i układ kwadracików. W ich przypadku jest 16 rzędów po 11 kwadracików. No i kolejny sposób obliczenia obwodu. Sposób liczenia jest ciekawy, ale wkradł się błąd rachunkowy: 16 × 2 = 32, a nie 36, no i chyba pomylili się w obliczeniu liczby płotków, powinno ich być 2 razy po 11. Z tego rozwiazania wynika, że musimy jeszcze utrwalać pojęcie obwodu.

Niezmiennie moi uczniowie mnie zadziwiają! Zespół Uli obliczył pole: 165 i 1/3. Spytałam oczywiście: *Skąd ten wynik?*

Ula: *Gdy układałyśmy kwadraciki, to nie można było ułożyć dokładnie po 11 w rzędzie. Zostawało jeszcze trochę miejsca, to właśnie ta 1/3.*

Drużyna, która zapełniała całe pole kartki, obliczyła pole, zliczając wszystkie kwadraciki. Ten sposób doprowadził do poprawnego obliczenia. Bardzo mnie to ucieszyło, gdyż była to grupa składająca się z dzieci dysfunkcyjnych. Tym razem postanowiłam sprawdzić, czy poradzą sobie sami. Opłacało się. Poradzili sobie bez korzystania z pomocy kolegów. Był to ich ogromny sukces.

Teraz ponowiłam pytanie o różnice w obliczeniach i już nie było wątpliwości, że był to efekt braku dokładności ułożenia kwadracików, wynik zależał od sposobu ułożenia.

Zadanie 6. Podaj sposób szybkiego obliczenia pola i obwodu kartki A3.

Pojawiły się dwie rózne odpowiedzi.

Oliwier: *Ja, dodałbym 11 + 11 = 22 i już wiem, jakie ma boki ta duża kartka, 22 i 15.*

Julka: *Należy ten obliczony już obwód i pole pomnożyć razy 2, ponieważ kartka jest dwa razy większa.*

–Czy na pewno?

Marcin: *Pole na pewno tak, bo ta duża kartka to dwie mniejsze.*

–A co z obwodem? Czy możemy też pomnożyć razy dwa? Przyjrzyjcie się dokładnie kartce.

Ula: *Chyba nie, bo dłuższe boki po 15 kwadracików są takie same, a krótsze są dwa razy dłuższe.*

–To jak szybko obliczyć obwód?

Ula: *Tak jak mówił Olivier.*

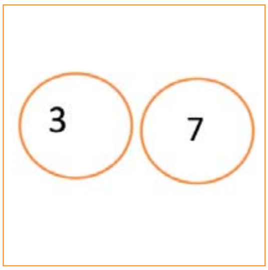
Zabawy z polami i obwodami prostokątów trwały cały tydzień. Wiem, że nie wykorzystałam wszystkich możliwości zadań. Myślę, że należy jeszcze wracać do tych pojęć, dalej obliczać obwody i pola innych figur, zmienić jednostkę i może przejść na centymetry, metry czy milimetry.

W trakcie zajęć dotyczących geometrii uświadomiłam sobie ogromną intuicję matematyczną moich uczniów, zmianę sposobu myślenia o matematyce. Dla nich nie ma już problemów, którymi nie warto się zainteresować. Błąd czy pomyłka nie zamyka ich w sobie, lecz powoduje dalszą mobilizację – trzeba to sprawdzić, poprawić, rozwiązać. Przykładem jest tu chociażby zadanie na obliczenie obwodu i pola kartki A4. Błędy i nieścisłości spowodowały dalsze poszukiwania.

W jednej z tych lekcji uczestniczyli studenci pedagogiki. Po skończonych zajęciach nastąpiło ich omówienie. Studenci mieli podać dwie rzeczy, które im się podobały i jedną, którą by zmienili. Poddałam się krytyce, chcąc wskazać im drogę do coraz lepszej pracy poprzez ocenianie kształtujące. Gościom podobało się działanie dzieci na konkretach, możliwość wypowiadania swoich sądów, nawet tych błędnych. Zdziwiło mnie natomiast, że to, co zmieniliby na lekcji, to dyscyplina. Oczywiście, nie było idealnej ciszy, dzieci pracowały przecież w zespołach i musiały się ze sobą komunikować. Mam nadzieję, że choć w niewielkim stopniu udało mi się zmienić myślenie tych młodych ludzi. Ja przecież też zmieniłam mój sposób myślenia o matematyce. Jestem pewna, że dając moim uczniom możliwość samodzielnej pracy lub w małych zespołach, pozwalam na rozwój, którego żadna cisza im nie da.

Krążki – czy to problem?

MAJ

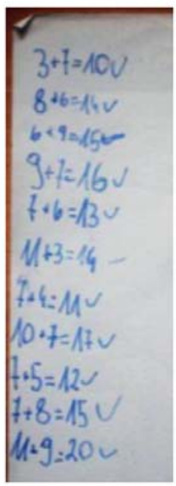


Na obu stronach krążków napisane są liczby – dwie z nich widzisz.

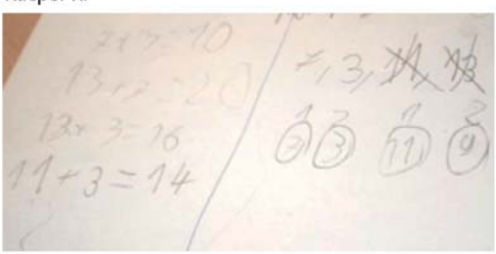
– Podrzucając je do góry i dodając wyrzucone liczby, można uzyskać: 10, 14, 16, 20. Jakie liczby znajdują się na odwrocie tych krążków? Czy jest tylko jedna możliwość?
– Jakie liczby powinny być napisane na niewidocznych stronach tych dwóch krążków, żeby można było za ich pomocą uzyskać sumy: 10, 12, 15 i 17?
– Czy można tak dobrać liczby na dwóch krążkach, aby wynikami były cztery kolejne liczby, np. 10, 11, 12, 13? Ile różnych możliwych zestawów liczb potrafisz znaleźć?

Dzieci pracowały parami, otrzymały ode mnie po dwa papierowe krążki. Mogły je podrzucać, zapisywać na nich różne liczby, próbować różnych rozwiązań. Ja w tym czasie chodziłam od zespołu do zespołu, pytając jaką mają strategię rozwiązania tego zadania.
Juka i Dominika: *Będziemy się starały dopełniać do podanych liczb.*
Kacper K. i Marysia: *Układamy działania, których będą podane wyniki.*
Mateusz i Marcin: *Robimy działania i skreślamy te, które nie pasują.*
Ula i Karolina: *Najpierw ustaliłyśmy, że 10 już mamy, kiedy odwróciłam krążek to brakowało 13 do dwudziestu.*

Ania



Kacper K.

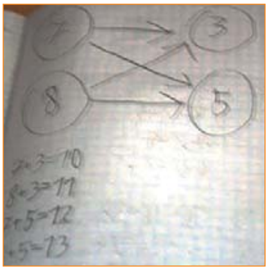


Strategia Uli i Karoliny dała szybki efekt. Znalazły poszukiwane liczby: 13 i 11. Część dzieci zastosowała metodę prób i błędów. Większość zespołów rozwiązało pierwszą część zadania. Przy drugiej ciekawy pomysł mieli Kacper G. i Olivier:
Kacper G i Olivier: *Na początku znaleźliśmy 7 i 7, 8 i 3. Wzięły się z tego, że 3 i 8 to 11, ale nam nie wyszło, więc zamiast jednej siódemki wstawiliśmy 9 i wszystko wyszło.*

Chłopcy zastosowali metodę prób i poprawek i w końcu znaleźli poprawne rozwiązanie. Zabrakło jak dotąd stwierdzenia, że każda część zadania ma dwa rozwiązania.

Najwięcej problemów było z częścią trzecią. Dzieci twierdziły nawet, że nie można tego rozwiązać. Uzasadniały to obecnością liczb parzystych i nieparzystych:
Ważne, na której liczbie piszę drugą liczbę.
Jakby były 3 krążki, to by się dało.
Za dużo różnych: jedne parzyste, drugie nieparzyste. W pierwszym liczby były tylko parzyste.
Nie ma racji. To nie jest ważne, czy liczby są parzyste, czy nieparzyste.

To była ciekawa dyskusja. Dzieci poradziły sobie z odrzuceniem propozycji kolegów, gdy te nie były zgodne z prawdą. Myślałam już, że się nie uda, ale na genialny pomysł wpadła Ulka. Zaproponowała, aby zapisać liczby tak, aby nie pomylić, które z nich można do siebie dodawać. Pojawiły się dwa poprawne rozwiązania. Oto one:



Wiele zmieniło się w myśleniu dzieci przez ten rok. Najbardziej podobała mi się dyskusja na temat: *Czy zadanie da się rozwiązać?* Bez mojej ingerencji padały argumenty i kontrargumenty. Dyskusja była na przyzwoitym poziomie, bez kłótni i sprzeczek. Wyzwoliła w dzieciach ogromną chęć rozwiązania problemu lub udowodnienia, że nie da się go rozwiązać. Dla mnie to była wskazówka, że nastąpiła u mnie zmiana reakcji na błędy uczniów. Widzę, że błąd może stać się przyczyną do dalszego poszukiwania, jest to okazja do uczenia się. Wzrosła też w mojej klasie chęć do prowadzenia dyskusji na tematy matematyczne

Zakończenie albo – jak kto woli – podsumowanie

CZERWIEC

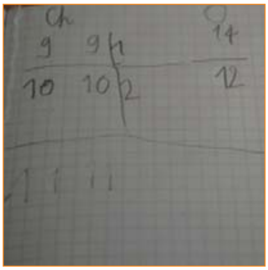
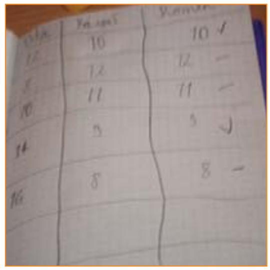
Na zakończenie jeszcze jedno zadanie, które zostało zaprezentowane na II Kongresie Edukacji Polskiej. Było to zadanie z egzaminu gimnazjalnego sprzed kilku lat. Zmieniłam tylko miejsce (klasy III SP 25) i dałam dzieciom możliwość manipulowania żetonami.

Zadanie.* *Uczniowie klasy III wybierali przedstawiciela do Samorządu Szkolnego SP 25. Było 3 kandydatów: Ola, Paweł i Romek. W klasie jest 32 uczniów i każdy z nich oddał jeden ważny głos. Zwyciężyła Ola, uzyskując mniej niż połowę głosów. Reszta głosów rozłożyła się po równo między pozostałych kandydatów. Ile głosów otrzymała Ola? Rozpatrz wszystkie możliwości i uzasadnij, dlaczego nie mogło być więcej rozwiązań.

Dzieci uznały to zadanie za łatwe.

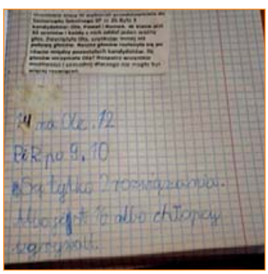
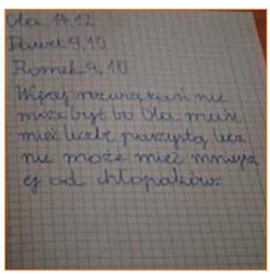
W minionym roku wypracowaliśmy różne sposoby rozwiązywania zadań tekstowych. Każdy mógł korzystać z ulubionej, najbardziej zrozumiałej metody. Dlatego pojawiły się różne sposoby rozwiązań. Część dzieci rozkładała żetony:


Byli tacy, którzy budowali tabelki:

Mateusz rozrysowywał głosy za pomocą kropek.

Znalazły się też uzasadnienia podanych rozwiązań:

Zadanie to okazało się proste dla moich uczniów.

Co się zmieniło? Wiem, że muszę jak najczęściej organizować zajęcia tak, aby dzieci mogły samodzielnie badać różnego rodzaju zależności. Będę im w tym celu udostępniać pomoce do manipulacji. Powinnam częściej wykorzystywać gry i szukać w nich prawidłowości, znaczeń matematycznych. Zadania i problemy matematyczne formułować tak, aby były rozwijające, ani za trudne, ani tym bardziej zbyt łatwe. Chcę zawsze podążać za uczniem, słuchać go z uwagą, dawać możliwość sprawdzenia swoich pomysłów. Powinnam zadawać pytania: *Jak to rozwiązałeś?, Proszę, wyjaśnij kolegom, jak myślałeś*. Będzie to ich mobilizowało do rozwiązywania coraz trudniejszych problemów matematycznych. Zaowocuje wzrostem motywacji do nauki, zrozumieniem, że matematyka jest nauką przydatną w życiu codziennym, da poczucie sukcesu. Rozwiązywanie problemów to umiejętność radzenia sobie w sytuacjach trudnych, samodzielne (!) szukanie rozwiązań. Gdy pozwolę im rozwiązywać problemy na lekcjach matematyki, to może później, w dorosłym życiu, będą wiedzieli, że każdą trudność można pokonać. Mam nadzieję, że uda mi się wyposażyć uczniów w tę umiejętność.

Każda lekcja ma swoją „przeszłość, teraźniejszość i przyszłość", należy zatem planować swoje poczynania. Chcę szczególnie pamiętać o uczniach słabych i wierzyć w ich możliwości. Dać im czas. Chciałabym podążać tą drogą i pozwolić dzieciom działać, myśleć, rozumieć.

Krystyna Tomecka
Nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej ucząca obecnie w klasie drugiej integracyjnej, w zawodzie 29 lat.

O PROWADZENIU PRZEZ UCZNIÓW KLAS I–III PROSTYCH ROZUMOWAŃ MATEMATYCZNYCH

Hanna Wasilewska

Od kiedy wprowadzono sprawdzian umiejętności szóstoklasistów, jednym ze słabiej wypadających w naszej szkole obszarów były zadania związane ze standardem „rozumowanie". Czym zatem jest to rozumowanie, z którym nasi uczniowie słabo sobie radzą? Co można zrobić, aby wyniki w tym zakresie poprawić?

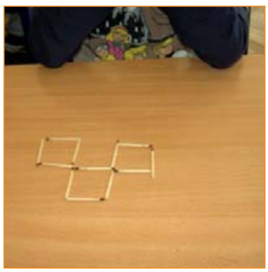
Tadeusz Kotarbiński[1] wyróżnia aż trzy znaczenia polskiego słowa „rozumowanie":

- rozumowanie to każda praca umysłowa, czynności umysłu w opozycji do pracy fizycznej;
- rozumowanie to wszystkie czynności umysłowe z wyłączeniem obserwacji i doświadczenia;
- rozumowanie to przechodzenie od jednych sądów (racji, przesłanek w szerokim rozumieniu tego słowa) do innych (następstw, wniosków w szerokim rozumieniu tego słowa).

Według mnie najtrafniejsze wydaje się ujęcie ostatnie. Zgodnie z nim rozwijaniu rozumowania powinny służyć wszelkie działania związane z obserwacją wydarzeń i ich porządkowaniem, przedstawianie przyczyn i skutków zjawisk, wyrażanie opinii i ich uzasadnianie poprzez używanie odpowiednich argumentów, korzystanie z planów, schematów, a także klasyfikowanie przedmiotów i zjawisk, dostrzeganie prawidłowości, uogólnianie, wnioskowanie itd. Prowadząc zajęcia w klasach 1–3, mam możliwość prowadzenia ćwiczeń w tym zakresie.

W bieżącym roku szkolnym pracowałam z uczniami klasy II integracyjnej, kształcącej m.in. dzieci z autyzmem.

Był to czas, kiedy zdecydowanie częściej zaczęłam stawiać pytania: *Co zauważyłeś?, Jak myślisz, dlaczego…?* Na naszych lekcjach zagościły gry planszowe, zadania nietypowe, łamigłówki, klocki i inne przedmioty do manipulacji.

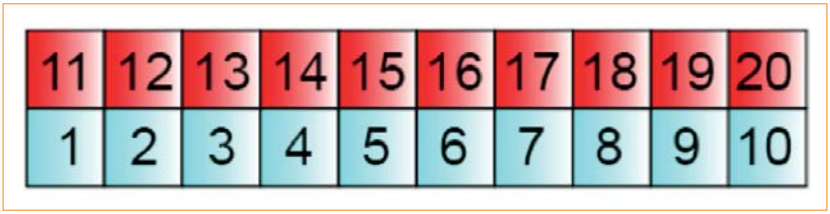


Szczególne miejsce w mojej pracy dydaktycznej zyskały gry planszowe. Kiedy spotykałam się z nimi wcześniej, nie miałam przekonania do ich stosowania. Nie potrafiłam odkryć ich walorów dydaktycznych. Wydawało mi się, że prowadzenie gry na lekcji musi być połączone z chaosem i brakiem dyscypliny. Nie widziałam więc w tym celu. Sądziłam, że jeśli nawet miałyby temu towarzyszyć jakieś obliczenia, jak w przypadku gier matematycznych, to i tak nie jestem w stanie ogarnąć wszystkich graczy i kontrolować poprawności wykonywanych działań. Uważałam, że wykonanie tej samej liczby działań w zeszycie, pozwoli mi łatwiej pokierować rozwojem sprawności rachunkowej moich uczniów. Grać, owszem, można na zajęciach dodatkowych w małych grupach albo w domu – myślałam. Na lekcjach szkoda mi było na nie czasu.

Planszowe gry matematyczne

Przełom w moim myśleniu na temat gier nastąpił w minionym roku szkolnym. Zaczęło się od tej prostej planszy:

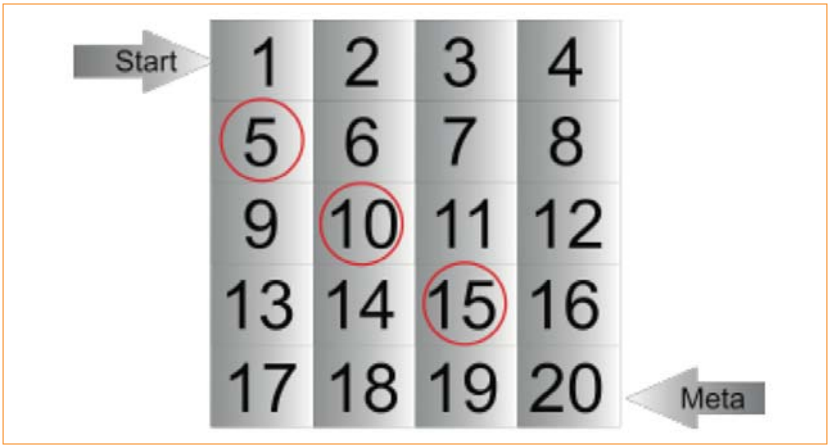
[1] Tadeusz Kotarbiński, Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk, 1986, str. 207–226.

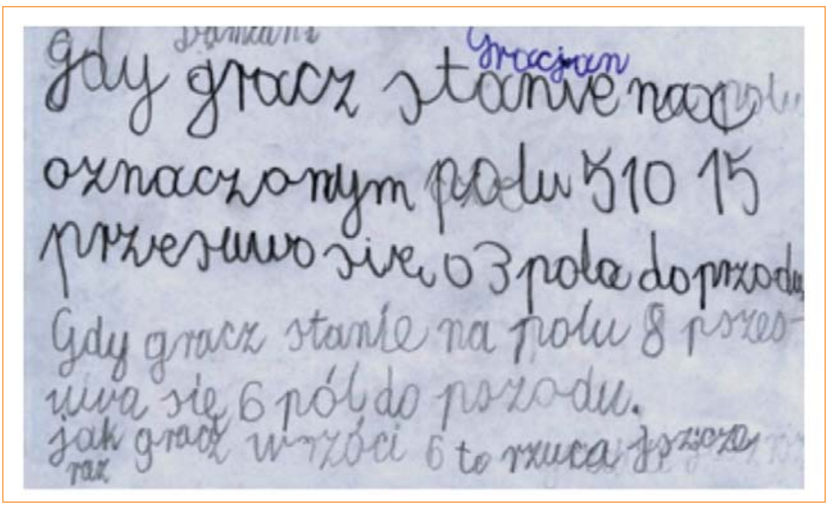


Zrobiłam ją dla uczniów, którzy na początku drugiej klasy mieli kłopot z pamięciowym dodawaniem i odejmowaniem w zakresie 20. Miała ona ułatwić obliczenia i „pokonywanie" progu dziesiątkowego oraz utrwalić strukturę liczb w dwóch pierwszych dziesiątkach. „Tabliczka" ta spodobała się wszystkim uczniom i każdy chciał ją mieć.

Obliczeń dokonywać można było, przesuwając palec po poszczególnych polach, ale można też było wykorzystać pionek lub żeton.

Gra polegała na przesuwaniu pionków o taką liczbę pól, jaką wskazała kostka. Gdy zaczynaliśmy od liczby 1, ćwiczyliśmy dodawanie, a gdy od 20 – odejmowanie. W krótkim czasie gra rozwinęła sprawność rachunkową uczniów i mogłam zastąpić ją nową planszą.





Początkowo służyła ona prostemu przeliczaniu. Gracze w parach rzucali kolejno kostką i przesuwali swój pionek o wylosowaną liczbę oczek. Następnie modyfikowaliśmy zasady, na różne sposoby wykorzystując pola specjalne.

W ten sposób pobudzałam kreatywność moich uczniów, nakłaniając ich do myślenia, prezentowania własnych pomysłów i ich wykorzystywania. Sama też zaczęłam dostrzegać potencjał, który zawierał się w tej prostej planszy i po pewnym czasie zaproponowałam nowe reguły:

Gramy w parach. Uczestnik wykonuje trzy rzuty kostką. Wyniki rzutów dodaje: pierwszy z drugim, następnie drugi z trzecim, wybiera jedną z tych sum i zajmuje odpowiadające jej pole. Wygrywa ten gracz, który zajmie więcej pól w obszarze od 2 do 12.

Zasady te okazały się dość trudne i część z uczniów nie od razu potrafiła je zastosować. Teraz wiem, że można było zaproponować łatwiejszy sposób obliczeń, np. dodawanie wybranych dwóch liczb. Po trzech rundach gry wywiązała się rozmowa:

– *Dlaczego pole 1 zostało wyłączone z gry?*
– *Bo dodając jedynki – najmniejsze możliwe wyniki rzutów – otrzymujemy najwyżej 2* – wyjaśniła Ola.
– *Dlaczego gra odbywa się tylko do pola 12?*
– *Bo jak wyrzucimy dwie szóstki (więcej nie możemy), to otrzymamy 12.* – uzasadnił Marcel.
– *A co moglibyśmy zmienić w regułach gry, aby wykorzystać inne pola?*
– *Więcej razy rzucać kostką!* – zaproponowała Ula.

„Sprawdziliśmy, czy przy większej liczbie rzutów, a zachowanych pozostałych regułach, będziemy mogli zająć kolejne pola. Okazało się, że suma dwóch rzutów tradycyjną kostką nigdy nie przekracza 12.

– *Trzeba mieć większe liczby na kostce!* – poddał pomysł Marcel.

Wyjęłam kostkę z liczbami od 0 do 9. Uczniowie obejrzeli ją z zainteresowaniem, gdyż spotkali się z nią po raz pierwszy.

– *A przy pomocy takiej kostki, jakie pola moglibyśmy zająć?*

Sprawdziliśmy, że moglibyśmy zająć pola od 1 do 18.

– *A jeżeli nie mielibyśmy kostki innej niż tradycyjna, to co powinniśmy zmienić w regułach naszej gry, aby móc zająć więcej pól?*
– *Można dodać wyniki wszystkich trzech rzutów… – wymyśliła Ula.*

Sprawdziliśmy, że moglibyśmy zająć pola od 3 do 18.

– *A co możemy zrobić, żeby wykorzystać jeszcze pola 19 i 20?*
– *Trzeba wziąć jeszcze „większą" kostkę…* – to był nowy pomysł Marcela.
– *Albo więcej razy rzucać i wszystko dodawać…* – włączył się Radek.
– *Widziałam, że podczas gry mieliście kłopot z zajęciem niektórych pól. Jakie to były pola?*
– *2, 3, 12, 11…* – padły odpowiedzi.
– *Dlaczego te pola były trudne do wypełnienia?*
– *Bo trudno było wyrzucić dwie jedynki, żeby zająć 2* – uzasadniła Ola.

Rozmowie tej towarzyszyło wykonywanie wielu samodzielnych obliczeń poprzedzających wnioskowanie i przenoszenie ich wyników na tablicę:

Z tej samej planszy korzystaliśmy, stosując reguły gry „Trzy w jednej":

W grze bierze udział dwóch, trzech lub czterech uczestników. Liczby losują, korzystając z bączka zawierającego liczby od 1 do 10. Każdy uczestnik losuje trzy liczby, z których wybiera dwie, oblicza ich sumę i zajmuje wskazane przez nią pole na planszy. Wygrywa ta osoba, która jako pierwsza ustawi trzy żetony obok siebie w pionie, poziomie lub na ukos.

Po trzech rundach znowu zaczęliśmy analizować sytuację:

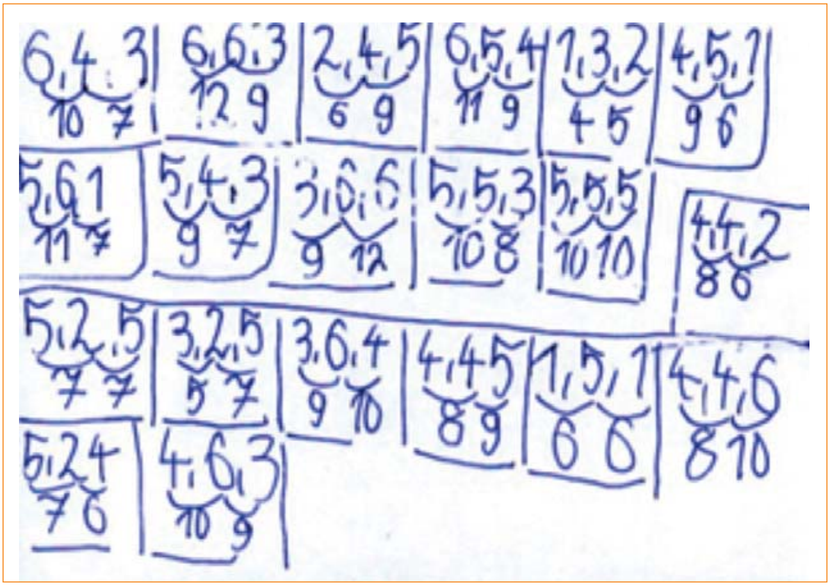
– *Które pola najtrudniej było zająć? Dlaczego?*
– *Te z najmniejszymi i największymi liczbami, bo jest mało możliwości, żeby je otrzymać, dodając* – zauważyły dzieci.
– *Które pola najłatwiej było zająć? Dlaczego?*
– *Środkowe, bo liczby na nich są wynikami wielu dodawań* – pojawiło się uzasadnienie.
– *Jak zmieniały się liczby w naszych trójkach?*
– *O 1, o 4, o 3, o 5.*
– *Kiedy różnice wynosiły 1, kiedy 4, kiedy 3, a kiedy 5?*
– *W zależności od tego, czy trójki były pionowe, poziome, czy na ukos* – dostrzegła część uczniów.
– *Dlaczego w pionowych trójkach zawsze różnica wynosiła 4?*
– *Bo mamy cztery liczby w każdym rzędzie i powtarzają się co 4* – zauważyli uczniowie.
– *Sprawdźmy, co się stanie, kiedy narysujemy planszę o innej liczbie pól w jednym rzędzie.*

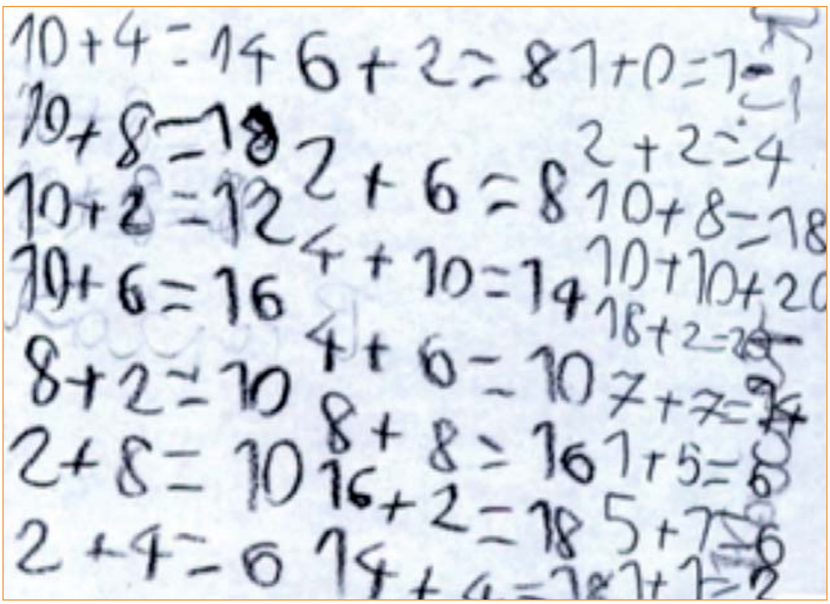
Okazało się, że na planszy o pięciu rzędach pionowe trójki zmieniają się o 5, a na planszy o trzech rzędach zmieniają się o 3.

– *O ile będą zmieniały się liczby w trójkach pionowych, gdy będziemy mieli planszę o 10 rzędach?*
– *O 10!* – większość klasy dostrzegła już zależność.
– *A w planszy o 100 rzędach?*
– *O 100! – teraz już chyba wiedzieli wszyscy.*

W wyniku tych spostrzeżeń wypłynął wniosek, że liczby w pionowych trójkach zmieniają się w zależności od liczby rzędów na planszy.

Gry z użyciem tej prostej planszy służyły nam do stawiania pewnych hipotez, weryfikowania ich, a następnie wyciągania wniosków. Były także okazją do ćwiczeń w dodawaniu liczb w zakresie 20 (później też odejmowaniu) skrupulatnie notowanych na kartkach:





Notowanie obliczeń dawało mi wgląd w to, co robią uczniowie – czy na pewno zajmują się tym, czego od nich oczekuję i czy poprawnie wykonują obliczenia. Dzięki temu pozbyłam się części moich uprzedzeń związanych z grami planszowymi. Jednocześnie zaczęłam dostrzegać to, że mam w ręce narzędzie do rozwijania rozumowania u moich wychowanków.

W dalszym ciągu roku szkolnego, już po wprowadzeniu mnożenia, jako planszę do gier matematycznych wykorzystywałam tabliczkę mnożenia w zakresie 36. Początkowo służyła ona do ćwiczeń w mnożeniu, a później jej zastosowanie rozszerzyłam.

Pole gry wyznaczały białe pola oznaczone iloczynami liczb od 1 do 6, natomiast pola szare miały stanowić pomoc dla dzieci, które jeszcze nie opanowały pamięciowo mnożenia w tym zakresie.

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

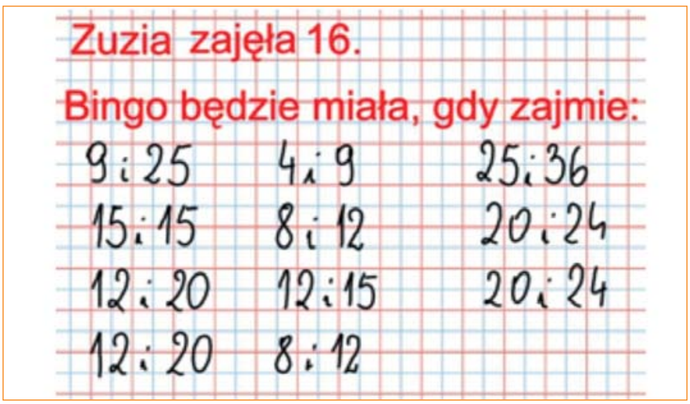
Moi uczniowie bardzo chętnie grali na tej planszy w „Bingo". Na początku obowiązywały następujące zasady: *Prowadzący rzuca dwiema kostkami. Wyniki mnożymy, po czym zajmujemy odpowiednie miejsce na planszy. Wygrywa osoba, której trzy żetony zajmą pola w jednej pionowej, poziomej lub ukośnej linii i która zawoła jako pierwsza „Bingo!".*

Tradycyjnie już, po trzech rundach uczniowie sformułowali wnioski:

– *Wygrywają ci, którzy lepiej znają tabliczkę mnożenia.* (Kuba)
– *Swoje szanse zwiększamy, gdy kładziemy żeton bliżej środka planszy, bo wtedy mamy więcej miejsc, żeby dołożyć kolejne żetony.* (Ola)

Wniosek Kuby okazał się dla kilku uczniów zachętą do pamięciowego opanowania tabliczki mnożenia – do tej pory uważali, że wystarczy im dodawanie jednakowych składników.

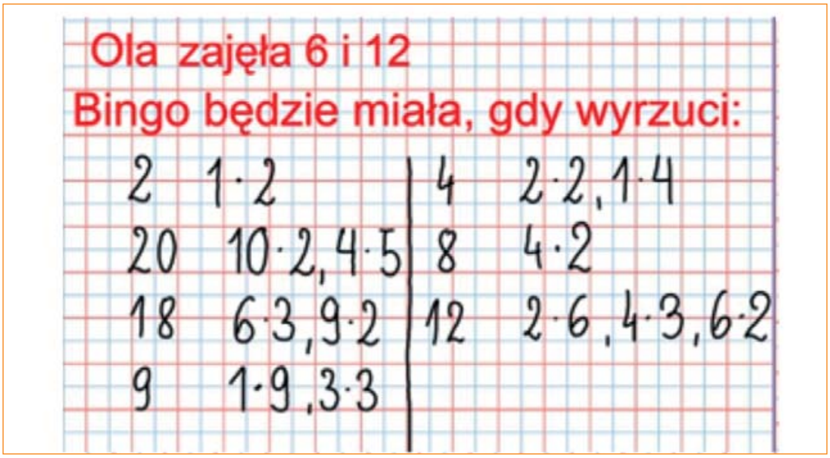
Gra ta stała się także pretekstem do rozwiązywania zadań otwartych. Pierwsze dwa zadania były bardziej jednoznaczne i miały mniej wariantów rozwiązań dlatego, że liczby w nich podane występowały na planszy tylko raz:

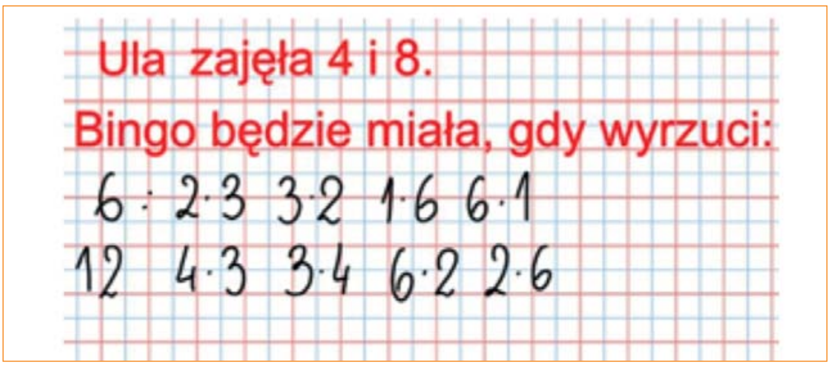


Powtarzające się rozwiązania są tylko pozornie takie same, gdyż dotyczą różnych układów żetonów na planszy. Liczba możliwych rozwiązań stała się powodem do postawienia pytania: dlaczego Zuzia ma więcej szans na wygraną niż Radek?

– *Bo jej żeton leżał bliżej środka planszy* – Oliwier wykorzystał wcześniej sformułowany wniosek Oli.

W kolejnych zadaniach do przeanalizowania było już więcej układów liczb, gdyż każda z podanych par liczb występowała na planszy w kilku kombinacjach. Pytanie natomiast dotyczyło nie tylko zajmowanych na planszy miejsc, ale i rzutów, za pomocą których można je zająć. Rozwiązaniami w tym przypadku są nie iloczyny występujące na polach planszy, a liczby, które je tworzą. Zatem jedną z możliwych odpowiedzi na pytanie zawarte w zadaniu jest, np.: Ola może mieć „Bingo", gdy wyrzuci 10 i 2 lub 4 i 5, bo zajmie wtedy pole 20.





Pytania o to, dlaczego jedno z dzieci miało większe szanse na sukces, postawiłam również po rozwiązaniu tych dwóch zadań i odpowiedź się powtórzyła, ale tym razem zgłosiło się do niej więcej dzieci.

Żeby grę uatrakcyjnić (także dydaktycznie) zmieniliśmy nieco jej reguły: *Wyniki rzutu mnożymy, dzielimy, dodajemy lub odejmujemy.*

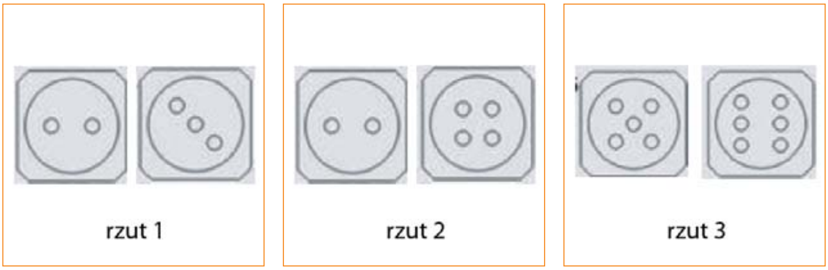
Ta wersja gry, według moich uczniów, dawała szansę na zwycięstwo także tym, którzy jeszcze nie potrafią szybko mnożyć, ale za to wymagała więcej myślenia. W związku z tym jedni określili ją jako ciekawszą, a inni jako trudniejszą (co w tym przypadku nie było oceną pozytywną).

Ja natomiast w czasie gry w obie wersje „Bingo!" zauważyłam pewien mankament planszy. Na początku założyłam, że uczniowie podczas gry będą mogli wybrać pole, które zajmą, np. dowolne pole 12 bez względu na to, czy wyrzucą kostką 2 i 6, czy 3 i 4. W praktyce okazało się, że działo się tak tylko w przypadku dzieci, które liczyły w pamięci i nie korzystały z szarych pól. Natomiast dzieci, które musiały skorzystać z podpowiedzi, układały swe żetony dokładnie we wskazanym na planszy miejscu, co jeszcze dodatkowo zmniejszało ich szanse na zwycięstwo.

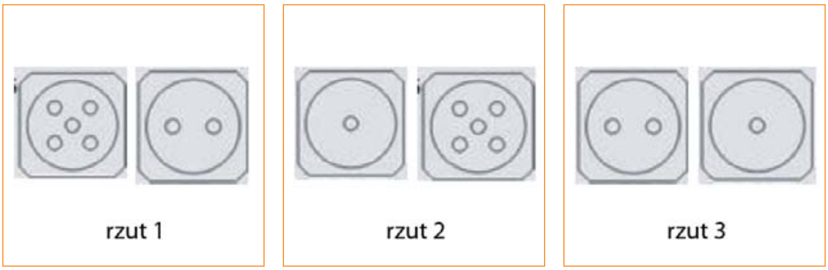
Nie miało to jednak znaczenia przy kolejnej wersji gry, której reguły były następujące:

Każdy gracz ma trzy żetony. Prowadzący grę rzuca dwiema kostkami. Wyniki rzutu dodajemy, odejmujemy, mnożymy lub dzielimy. Układamy żeton na polu z uzyskanym wynikiem. Wygrywa ten, którego suma wyników po trzech rzutach będzie najbliższa 30.

Pierwsza tura – wyniki rzutów:



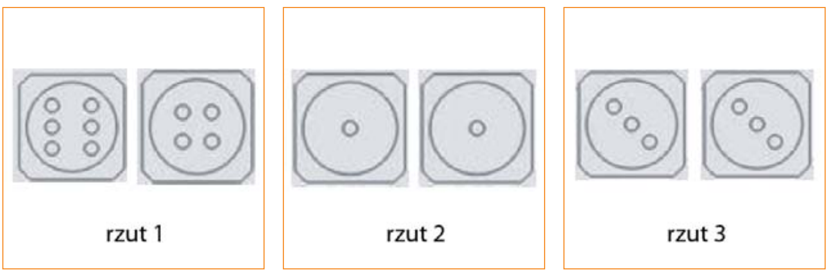
W tej turze gry zdecydowana większość uczniów uzyskała wynik 44, gdyż za każdym razem mnożyła, zajmując pola 6, 8 i 30. Uczniowie tłumaczyli, że stało się tak, bo zaskoczył ich ostatni rzut. Najbliższy 30 był wynik 33: 1 + 2 + 30, ale bardzo trudno go było uzyskać, gdyż trzeba by z dwóch pierwszych rzutów uzyskać jak najniższe wyniki, co trudno było przewidzieć na samym początku.



W tej sytuacji trudno było o wynik zbliżony do 30, gdyż największy możliwy do uzyskania wynosił 19 i taki miało dwóch graczy: 10 + 6 + 3 = 19.

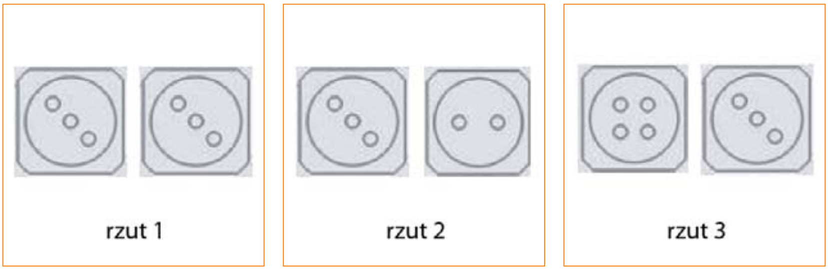
Zaproponowałam zmianę celu gry. Tym razem zwycięzcą zostawał ten gracz, którego suma wyników po trzech rzutach będzie najbliższa 15.

Pierwsza tura – wyniki rzutów:



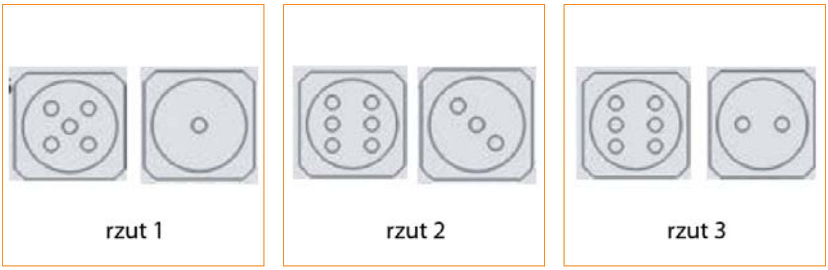
W tej turze na niepowodzenie zostały skazane dzieci, które nie zauważyły, że mnożąc dwie pierwsze liczby, od razu znacznie przekraczamy 15, a później w każdej sytuacji pogarszamy wynik. W klasie znalazły się dwie takie osoby. Najlepszym wynikiem uzyskanym przez dzieci było 18 (10 + 2 + 6). Najlepszym możliwym natomiast 13 (10 + 2 + 1) i 17 (10 + 1 + 6).

Druga tura – wyniki rzutów:

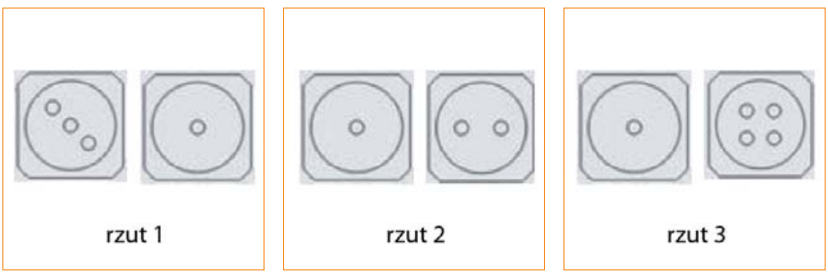


W tym układzie jeden z uczniów trafił w 15, mnożąc dwie pierwsze liczby, dodając wyniki drugiego rzutu i odejmując wyniki trzeciego.

Ponownie zmieniliśmy cel – spośród kilku propozycji uczniów, wybraliśmy liczbę 10.
Pierwsza tura – wyniki rzutów:



W tej turze już trzy osoby trafiły dziesiątkę: pomnożyły wyniki pierwszego rzutu, podzieliły wyniki drugiego i podzieliły wyniki trzeciego rzutu.
Druga tura – wyniki rzutów:



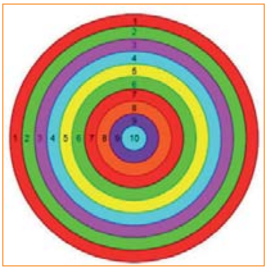
W tym przypadku zwycięzcami zostało 8 uczestników gry i okazało się, że zastosowali oni różne drogi dojścia do sukcesu:

- dodając wyniki pierwszego rzutu, mnożąc wyniki drugiego i trzeciego;
- *Przy trzecim rzucie można było również wykonać dzielenie* – zauważyły dzieci;
- mnożąc wyniki pierwszego rzutu, dodając drugiego oraz mnożąc lub dzieląc trzeciego;
- mnożąc wyniki dwóch pierwszych rzutów i dodając wyniki trzeciego.

Po skończonej grze i po analizie zapisanych działań Kacper zauważył, że: *gdy celem jest większa liczba, należy wyniki rzutów mnożyć i dodawać, gdy celem jest mniejsza liczba, lepiej je odejmować lub dzielić.*

Gra ta była kolejną okazją nie tylko do wykonywania wielu obliczeń, ale także do przewidywania i myślenia nad strategią.

Zaangażowanie moich drugoklasistów podczas zajęć matematycznych, na których wykorzystywaliśmy gry, zachęciło mnie do przygotowania jeszcze jednej planszy. Stanowiła ona tarczę strzelniczą, strzelaliśmy do niej, ustawiając żetony na polach wskazanych za pomocą bączka.



Uczniowie podzieleni zostali na cztery zespoły, tym razem według poziomu umiejętności matematycznych, i przystąpili do rozgrywki, zapoznając się wcześniej z jej zasadami:
Każdy gracz otrzymuje 3 żetony w jednym kolorze. Gra składa się z trzech rund. W każdej z nich uczestnicy kolejno losują liczby za pomocą bączka (bączek zawiera liczby od 1 do 10). Każdy gracz zajmuje na tarczy pole zgodnie z wylosowaną przez siebie liczbą. Po trzech rundach sumuje swoje wyniki i wpisuje końcowy wynik do tabeli.
Po zakończonej grze i wpisaniu wyników do tabeli zbiorczej zachęciłam dzieci, aby spróbowały zadać pytania, na jakie można odpowiedzieć, patrząc na dane z tej tabeli.

Zapisaliśmy 8 pytań:
1. Kto miał najwięcej punktów i wygrał?
2. Kto miał najmniej punktów?
3. Kto zajął kolejne miejsca?
4. Ile osób zajęło drugie i trzecie miejsce?
5. O ile więcej punktów miał zwycięzca od laureatów drugiego i trzeciego miejsca?
6. O ile więcej punktów miał zwycięzca od osoby, która miała najmniej punktów?
7. Ile punktów uzyskał każdy zespół?
8. Jakie wyniki poszczególnych rzutów mógł mieć zwycięzca, a jakie ten, kto uzyskał najmniej punktów?

Odpowiedzi na te pytania dzieci poszukiwały, pracując we wcześniej utworzonych zespołach. Uczniowie mieli tu okazję do porównywania i porządkowania liczb, porównywania różnicowego, sumowania oraz rozwiązywania zadania otwartego. Tym razem gra nie służyła nam zatem do budowania strategii, ale stała się okazją do rozwiązywania zadań tekstowych. Różnorodność postawionych pytań pozwoliła każdemu uczniowi znaleźć takie zadanie, które potrafił rozwiązać.

Poza grami, do których plansze wykonywałam samodzielnie, korzystałam też z propozycji znajdujących się na stronach internetowych.

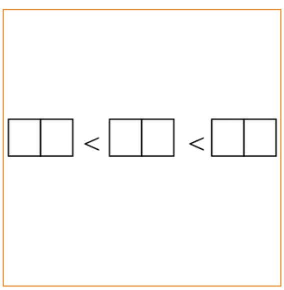
Zabawy z jedną kostką

Ciekawym doświadczeniem były zabawy z jedną kostką[2]. Każdą z gier przeprowadziłam trzy razy, a następnie pytałam o przemyślenia z nią związane i ewentualne strategie.

Gry „Największa!" i „Najmniejsza!" wymagały od gracza zbudowania odpowiednio największej i najmniejszej liczby z losowanych kolejno przez prowadzącego grę czterech cyfr. Już podczas drugiej tury gry „Największa!" okazało się, że uczniowie zauważyli, iż są cyfry, które warto lokować w rzędzie tysięcy. Zaliczyli do nich 9, 8, 7. Ważny też, według dzieci, był rząd setek, a pozostałe, czyli dziesiątki i jedności miały mniejsze znaczenie. W grze „Najmniejsza!" obowiązywała strategia odwrotna – ważne stały się cyfry 1, 2, 3.

Obie gry były dla dzieci okazją do czytania, zapisywania i porównywania liczb czterocyfrowych, z czym radziły sobie bardzo dobrze, oraz utrwalania wiedzy o pozycyjnym systemie dziesiątkowym.

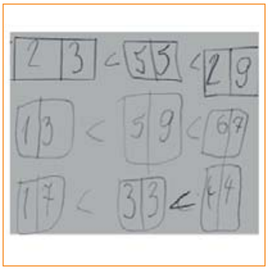
Duże zainteresowanie wzbudziła gra „Od najmniejszej do największej!". Tu zadaniem graczy było wypełnienie cyframi wylosowanymi przez prowadzącego grę takiej planszy:



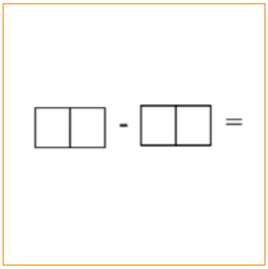
Ucieszyłam się bardzo, gdy już w drugiej turze nastąpił zdecydowany wzrost wygranych i widoczne stało się, że wielu uczniów zaczęło stosować jakąś strategię. Postępujący proces uczenia się świetnie ilustrują poniższe przykłady notatek dzieci.

Po trzech turach dzieci zapytane o to, co można zrobić, aby zwiększyć swoje szanse na wygraną, zaproponowały podział losowanych cyfr na trzy grupy: cyfry 9, 8, 7, które warto wpisywać do pierwszej z prawej strony pary okienek, cyfry 3, 2, 1 – do pierwszej z lewej pary, a te „środkowe" – do środkowej. Zauważyły jednocześnie, że tak naprawdę mają tu znaczenie cyfry wpisywane w rzędy dziesiątek. Łącząc w ten sposób naukę z zabawą, uczniowie jednocześnie porównywali liczby dwucyfrowe, dostrzegali prawidłowości i formułowali wnioski, które wykorzystywali w budowaniu strategii.

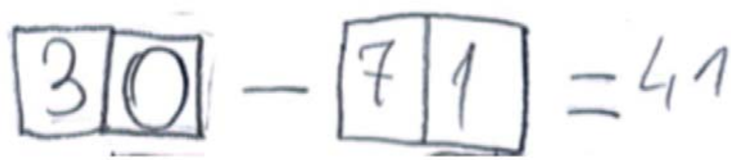
[2] www.trzecioklasista.edu.pl.



Jednak najciekawsze rzeczy wydarzyły się podczas gry „Celujemy w 10!", gdzie należało wylosowane liczby wpisać w następujące okienka tak, aby różnica była jak najbliższa 10:



Gra ta okazała się dla dzieci najtrudniejsza, gdyż wymagała od nich odejmowania w zakresie 100, często z przekroczeniem progu dziesiątkowego. Niedługo też czekaliśmy na to, żeby trzeba było odjąć liczbę większą od mniejszej. Początkowo jednak uczniowie nie zwracali na to uwagi, przedstawiając swoje rozwiązania tak:



lub tak:

Dopiero wypowiedź Oli, która oznajmiła podczas układania działania z cyfr 4, 8, 5, 0, że ma wynik 0, sprowokowała mnie do zapytania, w jaki sposób go uzyskała.

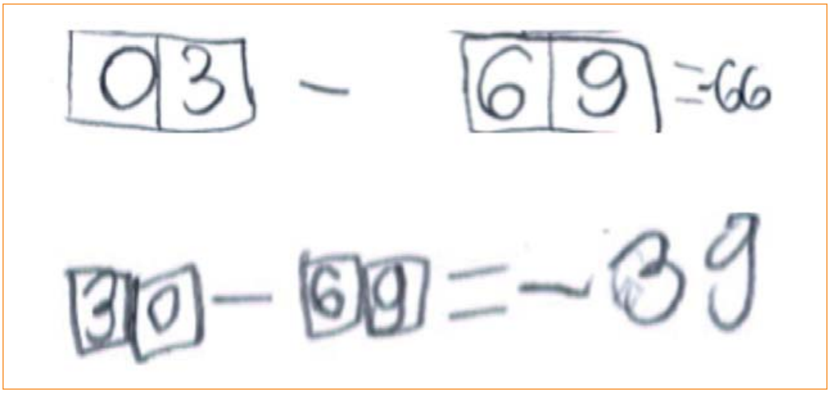
– *48 – 50.*
– *Ale to nie jest 0!* – sama wyprowadziłam Olę z błędu, ulegając tu staremu nawykowi, choć raczej powinnam zachęcić dzieci, aby ustosunkowały się do wypowiedzi koleżanki.
– *Nie? To może 2? Nie, to nie 2…, to mniej niż 2…, to mniej niż 0…* – głośno myślała Ola.
– *Tak! To jest 2, ale takie inne…* – włączył się Kuba – *Ono jest z tyłu za zerem!*
– *Zgadza się! Jak w takim razie ta liczba się nazywa?* – zapytałam.

W klasie zaszumiało, dzieci przez chwilę głośno snuły domysły, aż z sali padło stwierdzenie:

– *Minus dwa!*

Skoro jest to dwa, które znajduje się „z tyłu za zerem", narysowałam oś liczbową, aby Kuba mógł zilustrować to położenie. Zadanie okazało się nietrudne. Przy pomocy innych dzieci zaznaczył poprawnie na osi liczbę -2, poprzedzając ją liczbą -1.

Od chwili pojawienia się liczby ujemnej uczniowie zapomnieli o zasadach prowadzonej gry i skupili się na takim zapisie odejmowania, aby w wyniku była liczba ujemna. Pracowali z dużym zapałem, a rezultatem ich poczynań były m.in. takie zapisy:



Praca z matematycznymi grami planszowymi uczyła moich uczniów zauważania prawidłowości i budowania strategii. Było widoczne coraz większe zaangażowanie dzieci w zbieranie danych i formułowanie na ich podstawie wniosków. Widoczny także był postęp w zakresie werbalnego ich przekazu oraz rozwijanie sprawności rachunkowej. Podczas każdej z gier uczniowie wykonywali mnóstwo obliczeń, często wykraczając poza zakres liczbowy, który wynikał z programu nauczania.

Gry planszowe z fabułą

Zachęcona efektami pracy osiąganymi podczas zajęć matematycznych, na których wykorzystywałam gry planszowe, postanowiłam zastosować ten środek dydaktyczny również na zajęciach dotyczących innych obszarów edukacyjnych. Okazją do tego stała się dla mnie lektura A.A. Milne'a „Kubuś Puchatek".

Byłam nieco zniechęcona do jej omawiania, gdyż odniosłam wrażenie, że dzieci znając jej bohaterów z disnejowskich kreskówek, nie znajdą nic ciekawego w czytanych na lekcji fragmentach. Pracy z tą lekturą, według używanego przeze mnie podręcznika[3], w zakresie edukacji matematycznej towarzyszyło kształtowanie pojęcia linii krzywej, prostej i odcinka. Żeby powiązać te zagadnienia, postanowiłam wykorzystać mapę Stumilowego Lasu. Uczniowie z dużym zapałem za pomocą włóczki wyznaczali na niej drogi, jakie pokonywał Puchatek, udając się w odwiedziny do swoich przyjaciół. Po porównaniu długości kawałków włóczki potrzebnych do jej wyznaczenia, dzieci szybko wyciągnęły następujące wnioski:

– im droga jest bardziej kręta, tym jest dłuższa,
– każda narysowana odręcznie linia jest „trochę krzywa",
– najkrótsza jest droga prosta – ta rysowana przy linijce.

Po tych doświadczeniach uświadomienie dzieciom, że odcinek to najkrótsza droga od jednego do drugiego punktu (np. od domu Puchatka do domu Prosiaczka), było już sprawą bardzo łatwą. Od tego czasu moi aktualni uczniowie na polecenie narysowania odcinka chwytają jednocześnie i ołówek, i linijkę (nie było to takie oczywiste podczas moich wcześniejszych doświadczeń nauczycielskich).

Praca z mapą Stumilowego Lasu wzbudziła duży entuzjazm. Żeby go zatem wykorzystać, postanowiłam pracować z nią dalej i zaproponowałam stworzenie gry planszowej. Była to pierwsza nasza tego typu praca, więc zaplanowałam ją jako pracę wspólną – dla całej klasy. Przygotowałam obraz mapy na tablicę interaktywną. Na mapie tej uczniowie zaznaczali drogi, jakie pokonywali bohaterowie lektury podczas swoich przygód.

Następnym etapem było wspólne stworzenie instrukcji. Uczniowie zaskoczyli mnie tu swoją pomysłowością i aktywnością podczas budowania jej fabuły. Zaskoczenie było tak wielkie dlatego, że dzieci w mojej klasie niezbyt chętnie wypowiadają na zajęciach. Wynika to między innymi z cech osobowości uczniów. Tym razem było inaczej – prawie wszyscy wręcz prześcigali się w dzieleniu się pomysłami, w formułowaniu zasad i doskonaleniu ich formy językowej.

Przygody Kubusia Puchatka – instrukcja do gry

Do gry potrzebna jest kostka i po jednym pionku dla każdego gracza. Liczba graczy dowolna.

3 – Pułapka na słonie. *Kubuś wpada do pułapki. Aby ruszyć dalej, gracz musi wyrzucić kostką 5 lub 6.*

8 – Dom Prosiaczka. *Zmęczony Puchatek odwiedza Prosiaczka, który pożycza mu rower. Gracz przesuwa się o 6 pól do przodu.*

[3] Hanna Dobrowolska, Anna Konieczna, Krystyna Wasilewska, Beata Lewandowska, Danuta Kręcisz, Wesoła szkoła i przyjaciele, klasa 2, WSiP, Warszawa 2012.

8 – Dom Prosiaczka. *Zmęczony Puchatek odwiedza Prosiaczka, który pożycza mu rower. Gracz przesuwa się o 6 pól do przodu.*
21 – Spotkanie z Tygrysem. *Rozbrykany Tygrys wpada na Puchatka. Kubuś wpada do dziury. Ratuje go inny gracz lub wyrzucenie szóstki. .*
32 – Zakątek Kłapouchego. *Puchatek chce pomóc Kłapouchemu odnaleźć ogon i idzie po poradę do Sowy. Wraca na trasę na polu nr 35.*
40 – Dom Krzysia. *Puchatek śpiewa Krzysiowi Mruczanki. Gracz traci jedną kolejkę.*
42 – Dom Krzysia. *Krzyś pokazuje misiowi skrót do Domu Królika (pole nr 56).*
48 – Krewni i znajomi Królika *zapraszają Puchatka do wspólnej zabawy. Gracz cofa się o trzy pola.*
56 – Dom Królika. *Po uczcie Kubuś utknął na tydzień w drzwiach do nory. Gracz cofa się o 7 pól.*
57 – Dom Królika. *Po uwolnieniu miś wybiera złą drogę i odnajduje się na polu 18.*
62 – Domek Kangurzycy. *Kangurzyca nauczyła Kubusia skakać. Miś wykonuje skok prosto do swojej chatki (mety).*
64 – Sześć Sosen. *Kubuś Puchatek dowiaduje się, że zaginęło Maleństwo i pomaga go szukać. Wraca na trasę na polu 58.*

Efekty wspólnej pracy przeniosłam na papier i każde z dzieci otrzymało swój egzemplarz gry. Zajęcia plastyczne poświęciliśmy na jej pokolorowanie. Teraz wreszcie mogliśmy wykorzystać grę zgodnie z jej przeznaczeniem.

W tej wersji, z punktu widzenia umiejętności matematycznych, gra uczy przeliczania w zakresie (około) 100 i gracze nie mają wpływu na jej wynik, bo rzut kostką ma charakter wyłącznie losowy. Tym razem efektem naszej pracy nie był wzrost umiejętności matematycznych, ale umiejętności pracy w zespole.

– Co zrobić, aby zyskać wpływ na przebieg zabawy? – zapytałam.

Nie było propozycji, gdyż, jak się okazało, dzieci nigdy nie używały w grach planszowych więcej niż jednej kostki. Po zastosowaniu jednoczesnego rzutu dwiema kostkami gracze łatwiej mogli omijać pułapki lub trafiać w pożądane miejsca. Jednocześnie mogli ćwiczyć nie tylko przeliczanie, ale też dodawanie i odejmowanie liczb (w tym momencie uczniowie znali tylko te działania).

Po skończonej grze dzieci, wcielając się w postać Puchatka, z dużym zapałem opowiadały przygody, jakie przeżywały, wędrując po planszy. Zaskakujące było to, jak chętnie identyfikowały się z bohaterem i w pierwszej osobie mówiły o tym, co je spotkało. W innych sytuacjach skłonienie moich uczniów do budowania wielozdaniowych wypowiedzi nie jest łatwe. Poruszanie się po mapie Stumilowego Lasu stało się również okazją do rozmów o kierunkach świata.

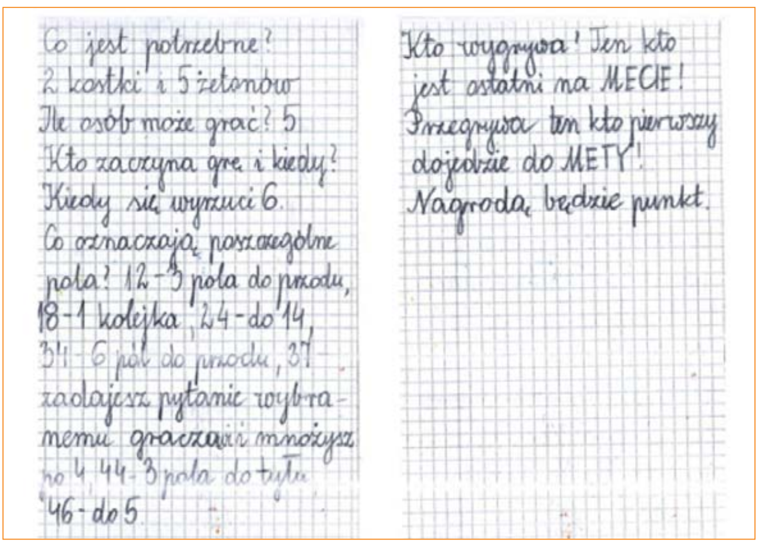
I tak nasze spotkanie z lekturą trwało – zamiast przewidzianych dwóch dni – cały tydzień. Z relacji rodziców wiem, że jej tematyka zainspirowała dzieci do czytania kolejnych fragmentów powieści oraz innych książek opowiadających o tych samych bohaterach, a także do podejmowania innych zabaw tematycznych. Natomiast gra wykorzystywana była jeszcze przez jakiś czas na prowadzonych w naszej szkole zajęciach związanych z popularyzacją gier planszowych.

Przekonałam się zatem, że gra planszowa może być świetnym narzędziem do wyzwalania różnych aktywności oraz rozwijania wielu umiejętności, np.: sprawności rachunkowej, budowania ustnych wypowiedzi wielozdaniowych, pisania instrukcji, rozwijania sprawności motoryki małej, pomysłowości, a także poszerzania wiedzy ogólnej. Warto również wspomnieć o rozwoju społecznym, któremu służy komunikacja w trakcie samej gry i czasie przygotowania do niej, oraz rozwoju emocjonalnym, który następuje w czasie nauki prawidłowej reakcji na wygraną i przegraną.

Pomysł tworzenia gry planszowej z fabułą wykorzystałam jeszcze raz. Tym razem gra opierała się na treści jednego z tekstów z naszego podręcznika. Praca nad nową planszą została poprzedzona dokładnym przeczytaniem tekstu, wyodrębnieniem bohaterów i ustaleniem przebiegu wydarzeń. Zadaniem uczniów, pracujących w trzyosobowych zespołach, było wycięcie przygotowanych przeze mnie ilustracji przedstawiających główne postacie występujące w bajce, rozmieszczenie ich na kartce zgodnie z kolejnością wynikającą z tekstu i zaprojektowanie odpowiedniej „drogi". Gotowe plansze zostały skopiowane i każdy uczeń dostał egzemplarz na własność.

Kolejnym zadaniem było napisanie instrukcji gry, którą uczniowie tworzyli i zapisywali w powołanych wcześniej zespołach. Mój udział ograniczył się tu do pokierowania układaniem pytań, na które w instrukcji powinna znaleźć się odpowiedź, i zapisania ich na tablicy. Jedyną sugestią z mojej strony było to, aby podczas gry można było ćwiczyć liczenie.

Uważam, że uczniowie świetnie sobie z zadaniem poradzili. Podziwiałam ich pracę zespołową – dzielili się zadaniami, uwzględniając swoje predyspozycje, dyskutowali nad propozycjami, zawierali kompromisy. W instrukcjach pojawiały się oryginalne pomysły, np.:


Co jest potrzebne?
2 kostki i 5 żetonów
Jle osób może grać? 5
Kto zaczyna gre i kiedy?
Kiedy się wyrzuci 6.
Co oznaczają poszczególne
pola? 12 – 3 pola do przodu,
18 – 1 kolejka, 24 – do 14,
34 – 6 pól do przodu, 37 –
zadajesz pytanie wybra-
nemu graczowi mnożysz
po 4, 44 – 3 pola do tyłu
46 – do 5

Kto wygrywa? Ten kto
jest ostatni na MECIE!
Przegrywa ten kto pierwszy
dojedzie do METY!
Nagroda będzie punkt.

Niestety, uczniowie rzadko pamiętali o mojej sugestii dotyczącej walorów obliczeniowych gry. Zabrakło też elementów fabuły, które w przypadku poprzedniej gry dały możliwość układania opowiadań. Gotowe gry zostały sprawdzone w zespołach, które je tworzyły, a następnie przetestowane przez kolegów pracujących w innych grupach. Potem nastąpiła ocena własnych i testowanych gier. Dzieci wypowiadały się na temat ich zalet oraz tego, jak można by je ulepszyć. W niektórych zespołach uwagi kolegów zostały uwzględnione i poprawiono zapisy obowiązujących zasad.

Tym razem największym efektem naszej pracy, była nie matematyka ale umiejętność pracy w zespole: podział zadań, prezentacja własnych pomysłów, argumentowanie, słuchanie, przekonywanie się nawzajem itd.

Prawdziwe wzruszenie przeżyłam, gdy jakiś czas później jeden z moich uczniów niepełnosprawnych (pracuję w klasie integracyjnej) przyszedł do szkoły z własnoręcznie zrobioną grą planszową, do której planszę i instrukcję wykonał zupełnie samodzielnie i z własnej inicjatywy, a fabuła jej dotyczyła życia w naszej klasie. Chłopiec ten ma ogromne problemy ze skupieniem uwagi i podjęciem kilku uporządkowanych działań, a tu – jak opowiadała jego mama – pewnego dnia przyszedł ze szkoły, zapowiedział, że zrobi grę i tak długo nad tym pracował, aż skończył. Swoją grę przynosił do szkoły wielokrotnie i grał w nią z grupą kolegów podczas przerw.

Po roku, w którym gry pojawiały się w naszej klasie w wielu formach i na różnych zajęciach, stwierdzam, że mój sceptycyzm wobec nich był nieuzasadniony. Przekonałam się, że są one świetnym narzędziem w pracy nauczycielskiej pod warunkiem, że wyjdzie się poza schematyczne ich wykorzystanie.

- Wiem już, że mogą być wykorzystane do ćwiczenia sprawności rachunkowej.
- Mogą uczyć gromadzenia danych, dostrzegania prawidłowości, wnioskowania, budowania strategii.
- Pomagają uwolnić wyobraźnię, pomysłowość, kreatywność kiedy pozwoli się uczniowi samemu konstruować gry.
- Wiem również, że sytuacje, które powstają podczas zajęć z grami, mogą być źródłem wielu bardzo ciekawych zadań tekstowych. Zadania te są chętnie rozwiązywane przez dzieci, bo dotyczą wydarzeń, w których same uczestniczyły.
- Podczas zajęć z grami dzieci mają też okazję do rozwijania mowy. Mogą uczyć się pisania i czytania (np. instrukcji).
- Mając szansę na sukces indywidualny bądź zespołowy, uczniowie stają się odważniejsi.
- Choć w czasie gier panuje w klasie hałas, to dla mnie ważniejszy jest widok zaangażowanych i pełnych emocji uczniów.

Miniony rok poświęciłam na odkrywanie gier planszowych, a przede mną są jeszcze gry karciane, gry wykorzystujące domino. Myślę, że i one staną się dla mnie źródłem inspiracji i chętnie wykorzystywanym narzędziem do rozwijania procesów myślowych moich wychowanków.

Pracę niniejszą poświęciłam głównie grom planszowym, ale jak wspominałam na początku, zmiana w moim podejściu do nauczania objęła więcej elementów. Starałam się wykorzystywać każdą okazję, aby pobudzać uczniów do myślenia, wypowiadania własnych refleksji, przekonywania się nawzajem. Oto tylko kilka przykładów tego typu sytuacji.

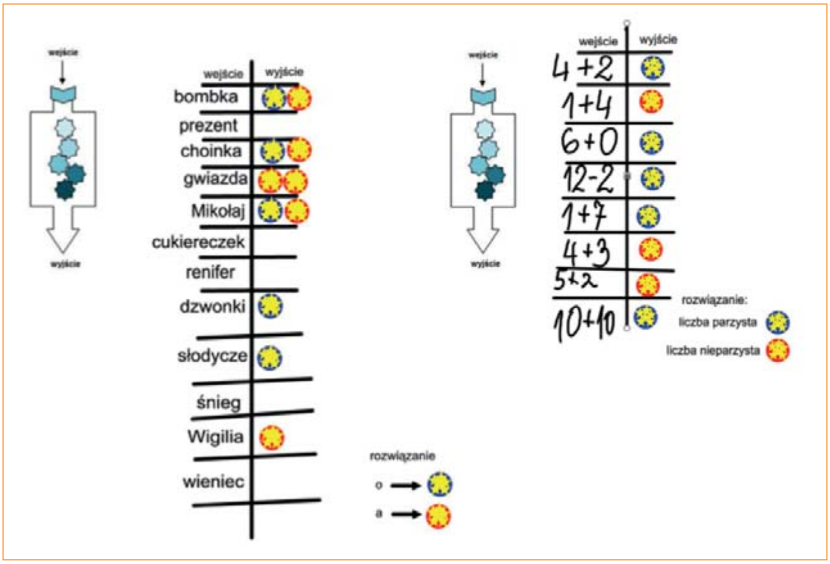
Kiedy np. wprowadzałam tabliczkę mnożenia przez 5, wykorzystałam do tego drewniane klocki sześcienne. Każdy z uczniów stawiał budowlę z 5 klocków, opowiadał o niej, a następnie łączył z budowlą sąsiada i zapisywał działania, które pozwoliły mu obliczyć, ile klocków wykorzystali razem ($5 + 5$ lub 2×5). Następnie łączyli budowle z budowlami sąsiedniej pary dzieci, zastanawiając się i zapisując, ile klocków wykorzystali we czworo. Powtórzyliśmy to, łącząc klocki trzech, czterech, pięciu i sześciu par. Na koniec okazało się, że brakuje nam informacji o tym, ile klocków potrzeba do zbudowania trzech, pięciu, siedmiu budynków. W tym miejscu uczniowie dostrzegli związki między działaniami, wyciągnęli wnioski z wcześniejszych notatek i przez analogię, bez używania klocków, uzupełnili zapisy.

Innym pomysłem, do którego wracałam były świąteczne maszynki liczbowe lub wyrazowe[4]. Określiłam je jako „świąteczne", gdyż z wpadających do nich wyrazów lub liczb maszynki produkowały bombki choinkowe. Kiedy i jakie bombki wypadną z maszynki? – zadaniem uczniów było znalezienie odpowiedzi na to pytanie. W tym celu mogli wrzucać odpowiednie obiekty: wyrazy, liczby, działania do maszynek i analizować efekty ich działania. Kilka pierwszych maszynek sama zaproponowałam dzieciom, ale następne zagadki tworzyły już samodzielnie.

Pojawiały się też na naszych zajęciach tangramy i inne łamigłówki, które, poza pobudzaniem myślenia, uczyły dociekliwości i wytrwałości.

Bardzo ciekawe, moim zdaniem, doświadczenia zdobyłam podczas rozwiązywania zadań tekstowych, które powstały przez przekształcenie typowych zadań zawartych w podręczniku. Przekształcenie to polegało na zmianie bądź usunięciu z zadania niektórych danych lub postawieniu dodatkowych pytań. Dzięki temu powstały zadania otwarte, zadania złożone, zadania zawierające zbyt wiele danych. Zadań tych nie można było rozwiązać jednym działaniem, wymagały one wnikliwego czytania treści, analizowania jej i zastosowania wielu obliczeń lub rysunków.

[4] www.trzecioklasista.edu.pl.



Najlepiej pracę z nimi ocenili sami uczniowie. Po zakończonych zajęciach podczas pakowania przyborów szkolnych, siedząca bezpośrednio przede mną Ula powiedziała:

– *A mnie się bardzo te zadania podobały…*
– *Tak? A co w nich było takiego, że ci się podobały?* – dopytywałam.
– *Bo uczyłam się liczyć, ale też mogłam myśleć.* – odpowiedziała uczennica, która już kiedyś wcześniej deklarowała, że bardzo lubi łamigłówki.

Nigdy wcześniej nie spotkałam się z tym, aby uczniowie sami przekazywali mi informację zwrotną dotyczącą rozwiązywanych zadań. Świadczyło to o tym, że musiało być w nich coś, co odbiegało od wcześniejszych doświadczeń. Uważam, że dla samej wypowiedzi Uli warto było podjąć trud zmiany danych lub podania dodatkowych pytań do podręcznikowych zadań, których rozwiązywanie bez tych modyfikacji przeszłoby zapewne bez żadnego echa.

Po tej spontanicznej wypowiedzi Urszulki postanowiłam dowiedzieć się, co o tych zadaniach myślą inni uczniowie.

– *Zadania były fajne… dla tych, którym chce się myśleć* – wypowiedział się Kuba.
– *… i można do ich rozwiązania użyć rysunku…* – dodał Marcel.

Okazało się, że niekoniecznie to co łatwe, jest dla dzieci atrakcyjne, liczy się możliwość rozwiązywania problemów i możliwość stosowania różnych, niekonwencjonalnych dróg dochodzenia do rozwiązania.

Nie jest to, niestety, sposób myślenia wszystkich moich uczniów. Jest w klasie dziecko, które nie podejmuje zadań, nad którymi trzeba się nieco zastanowić albo chociaż uważnie je przeczytać lub wysłuchać, od razu określając je jako „za trudne". Jest też grupa, która mniej włącza się we wspólną pracę. Są to uczniowie, których sprawność rachunkowa bądź umiejętność czytania są na nieco niższym poziomie. Jednak po tegorocznych doświadczeniach związanych z nieco innym podejściem do nauczania matematyki u większości moich podopiecznych widać efekty w postaci większej aktywności na tych zajęciach. Uczniowie łatwiej dokonują spostrzeżeń dotyczących związków między liczbami, chętniej się nimi dzielą i coraz lepiej, w sensie werbalnym, przekazują swoje przemyślenia.

Wiem, że ciągle jestem na początku drogi rozwijania procesów związanych z rozumowaniem u moich wychowanków, ale przed nami jeszcze rok wspólnej pracy, podczas której zarówno ja, jak i moi uczniowie nadal będziemy podążać tą drogą. Ja będę starała się jeszcze lepiej dostrzegać i tworzyć okazje do pobudzania dzieci do myślenia, a one, mam nadzieję, będą na tym korzystać i doskonalić swoje umiejętności zbierania informacji, uogólniania, stawiania i weryfikowania hipotez oraz opowiadania o tym sobie nawzajem.

Hanna Wasilewska
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 13 w Bydgoszczy, w zawodzie 31 lat.

ZADANIA DLA UCZNIÓW, KTÓRZY WOLĄ WF, CZYLI O POZIOMIE TRUDNOŚCI ZADAŃ MATEMATYCZNYCH W KLASACH I–III

Wiesława Binkowska-Wójcik

Wyniki badań OBUT, z którymi się zetknęłam, były zaskakujące. Wyraźnie wskazywały, że uczniowie radzą sobie z zadaniami, w których mogą zastosować poznany schemat rozwiązań. Ponoszą porażkę tam, gdzie zadanie wymaga od nich samodzielnego wypracowania sposobu rozwiązania, głębszej analizy danych, wykorzystania i zastosowania struktur wiedzy. To zainspirowało mnie do podjęcia zmian dotychczasowego sposobu nauczania.

Jak wyglądała nauka dotychczas? W dużej mierze styl pracy narzucały pakiety edukacyjne i tradycja sposobu nauczania. W ćwiczeniach matematycznych roi się od poleceń typu: *zaznacz, pokoloruj, połącz, wpisz* itp., które nie wymagają od ucznia specjalnego wysiłku intelektualnego. Rozwiązywaliśmy zadania bardzo do siebie podobne, wymagające ciągle tych samych sposobów rozwiązań. Jeśli uczniowie opanowali dany schemat rozwiązania, uznawałam, że osiągnęłam sukces. Miałam poczucie nauczycielskiego spełnienia. Co z zadaniami nietypowymi? Oczywiście pojawiały się i takie, ale najczęściej na zajęciach kółka matematycznego. W dostępnych pakietach edukacyjnych zadania takie są oznaczone, np. kaktusem, wężem, sową itp. Daje to sygnał uczniom, że z tym zadaniem sobie nie poradzą lub poradzą sobie tylko niektórzy. W efekcie tylko nieliczni próbowali się z nimi zmierzyć. Jeśli tylko zauważyłam, że uczniowie błądzą, to natychmiast sprowadzałam ich na „właściwe" tory, czyli ciągle kontrolowałam tok myślenia uczniów Teraz wiem, że odbierałam im prawo do popełnia błędów i uczenia się na nich, samokontroli, weryfikacji poprawności rozwiązania.

Zadania, które dotąd uważałam za trudne, to między innymi:

- wielodziałaniowe, złożone (w tym złożone łańcuchowo),
- których rozwiązanie jest niejednoznaczne z powodu braku niezbędnych danych,
- z nadmiarem danych.

Kiedy uczniowie stawali przed koniecznością rozwiązywania tego typu zadań, zauważałam u nich pewnego rodzaju bezradność i brak wiary we własne umiejętności. To był dla mnie impuls do zainicjowania zmian. Stało się dla mnie jasne, że nauczanie matematyki w mojej klasie musi stać się przyjemnością i źródłem satysfakcji dla podopiecznych, a tym samym i dla mnie. Postanowiłam, że uczyć się matematyki będą w sytuacjach, które nie od razu będą kojarzyły się z matematyką. Zawsze punktem wyjścia powinno być praktyczne działanie, zabawa czy też gra. Poniżej omówię kilka przykładów, które sprawdziły się w mojej praktyce.

I Jesienna **zabawa zakupami** rozpoczęła się od przyniesienia przeze mnie gazetek reklamowych różnych sklepów. Dzieci oglądały je, rozmawiały na temat oferty, wybierały coś dla siebie. Następnie przystąpiliśmy do organizowania klasowego sklepu spożywczego, a właściwie kilku sklepów. Każdy otrzymał taką samą kwotę pieniędzy i ruszył po zakupy.

Po zrobieniu zakupów uczniowie obliczali, ile wydali i ile im jeszcze zostało pieniędzy. Zabawa mogłaby się na tym zakończyć, ale dzieciom było mało. Wymyślały kolejne polecenia związane ze sklepem, np.:

- Kto kupi najwięcej produktów za 500 zł?
- Kto kupi najmniejszą liczbę produktów i wyda kwotę najbliższą 500 zł?
- Ile potrzeba pieniędzy, aby kupić po 6 kg każdego rodzaju owoców?
- Ile będą kosztowały produkty potrzebne do przygotowania sałatki warzywnej?
- W którym sklepie warto zrobić zakupy, by sałatka była najtańsza?
- Ile trzeba wydać na całodzienne wyżywienie czteroosobowej rodziny (na podstawie przygotowanego jadłospisu)?

To tylko niektóre propozycje uczniów. Z przyjemnością przyglądałam się, z jakim zaangażowaniem uczniowie obliczają, szacują oraz kontrolują wydatki. Robienie zakupów jest dla nich czymś bliskim i oczywistym. Organizacja tego typu zajęć nie wymagała określania zasad, bo są one im znane z codziennego życia. Zauważyłam, że pewną trudność sprawiały dzieciom: zamiana złotówek na grosze, sumowanie wydatków, gdy cena była wyrażona w zapisie dziesiętnym, oraz wydawanie reszty z dużych kwot.

W miarę zdobywania doświadczeń trudności się zmniejszały i uczniowie coraz sprawniej dokonywali skomplikowanych obliczeń i sprawdzali się w każdej z ról, którą odgrywali: sprzedawcy, klienta czy dostawcy. Mieli do czynienia z nadmiarem danych, ale dokonywali ich selekcji i wyboru bez najmniejszej trudności. Byłam tym faktem ogromnie poruszona. Czy słusznie uważałam, że zadania z nadmiarem danych są zadaniami zbyt trudnymi?

II **Tangram** w roli głównej. Spotkanie z tą znaną układanką rozpoczęło się wiosną od krótkiego zapoznania z jej klockami. Następnie uczniowie wybierali dla siebie wzory do ułożenia. Każdy układał ich tyle, ile chciał. Jeśli ktoś ułożył wzór szczególnie trudny, to głośno to oznajmiał klasie. Natychmiast wszyscy zbierali się wokół niego, chcąc się przekonać, czy to prawda i jak to zrobił. Zapytałam, które wzory są łatwe, a które trudne?

Kajtek: Łatwo ułożyć te, w których widać ułożenie poszczególnych klocków. Trudniej ułożyć te, gdzie klocki tworzą taki zbity wzór.

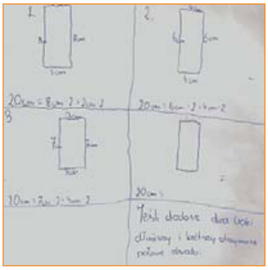
Zaproponowałam, by ułożyły i nazwały swoje wzory – zagadki dla kolegów. Zaangażowanie było tak duże, że niektórzy wypożyczali klocki do domu, by stworzyć *najtrudniejszy na świecie wzór*. Nie sposób opisać satysfakcji uczniów, którzy ułożyli te niezwykle skomplikowane układanki. Oto niektóre z propozycji uczniów:

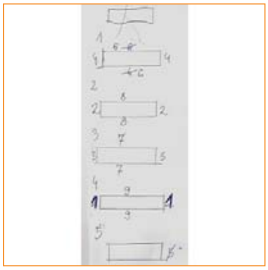
Jeszcze większą satysfakcję mieli ci, którzy ułożyli te „najtrudniejsze w świecie wzory". Byłam zaskoczona pomysłowością uczniów, różnorodnością nowych, stworzonych przez nich zadań. Najwięcej jednak radości miały wtedy, kiedy ja sama miałam problem z prawidłowym ułożeniem tangramowych klocków, starając się złamać ich wzory.

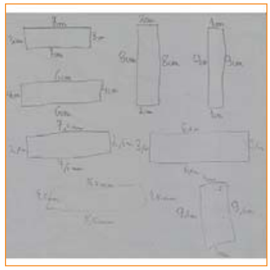
Zabawa tangramami to sprawdzian cierpliwości, umiejętności spostrzegania czy też odtwarzania wzorów. To doskonały wstęp do geometrii, poznawania figur geometrycznych, ich własności i dalej – np. obliczeń związanych z obwodami.

III Zadania związane z **obliczeniami obwodów** rozpoczęłam wiosną od wyjścia na boisko szkolne. Uczniowie podzieleni na trzyosobowe zespoły szacowali odległości, mierzyli je i porównywali z szacunkami oraz pomiarami innych zespołów. W ten sam sposób przystąpili do pomiaru obwodów różnych części boiska, obwodu pni drzew czy długości ogrodzenia. Takie praktyczne działanie dało podstawę do rozwiązywania zadań opisanych językiem matematycznym.

Zadanie 1.
Obwód prostokąta wynosi 20 cm. Jaka może być długość boków tego prostokąta?


Rozwiązanie Nicole


Rozwiązanie Miłosza


Prostokąty Ali

Wszyscy uczniowie posłużyli się rysunkiem pomocniczym. Nicole zwróciła uwagę na pewną własność prostokąta tj. *Jeśli dodasz dwa boki dłuższy i krótszy, otrzymasz połowę obwodu. Wyjaśniła dalej, że „trzeba tak dobrać długości, aby suma była równa 10, bo dłuższy i krótszy to połowa obwodu*. Po tym wyjaśnieniu niektórzy uczniowie dopisywali kolejne rozwiązania, wykorzystując spostrzeżenie koleżanki.

Miłosz zawahał się przy założeniu, że jeden bok będzie miał długość 5 cm: *Nie może być 5 cm, bo wszystkie będą miały 5 cm. To wtedy będzie kwadrat, a nie prostokąt.*

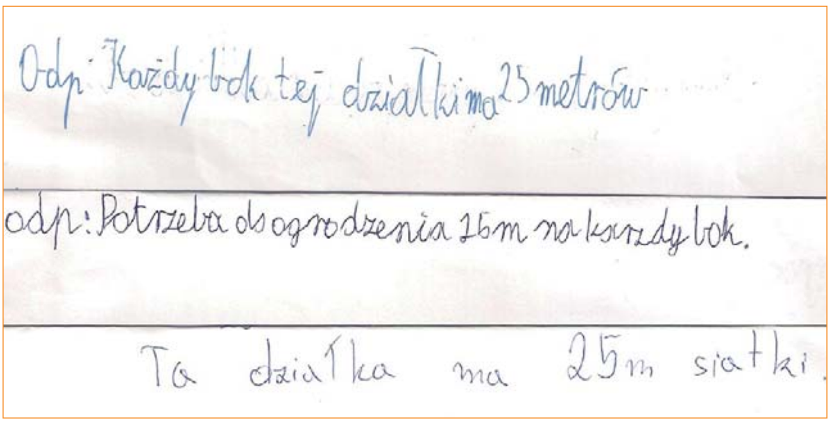
Nadarzyła się okazja, by przedstawić kwadrat jako szczególny przypadek prostokąta. Nastąpiło to po dość burzliwej dyskusji o tym, jakie warunki musi spełniać figura, by można było nazwać ją prostokątem. Co prawda nie wszyscy byli do końca przekonani, czy kwadrat jest prostokątem, ale większość stwierdziła, że spełnia warunki, by nim być. Nie brałam udziału w dyskusji i, co najdziwniejsze, wcale tego nie oczekiwali! Nie chcieli moich zapewnień, że mają rację! Nie byłam im potrzebna? Wystarczyło im zaufać, pozwolić się zastanowić i pomyśleć, a potrafili sami sobie odpowiedzieć na trudne pytanie. A może po prostu powinnam nie przeszkadzać im myśleć?

Ala skorzystała z rady Nicole i dorysowała kilka rozwiązań, w których pojawiły się milimetry. Po czy stwierdziła: *Tych rozwiązań jest bardzo dużo*. Dalej posypała się z ust uczniów lawina rozwiązań: 1 mm i 9,9 cm, 4 cm 3 mm i 5 cm 7 mm itp.[1]

Zadanie 2.

Do ogrodzenia kwadratowej działki zużyto 100 m siatki. Jakie wymiary ma ta działka?

Przykładowe odpowiedzi

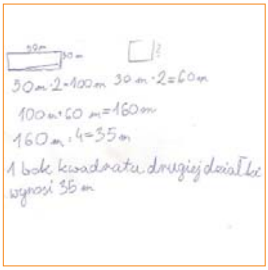


Rozwiązanie zadania nie przysporzyło uczniom trudności. Kłopotem dla niektórych okazało się samo sformułowanie odpowiedzi.

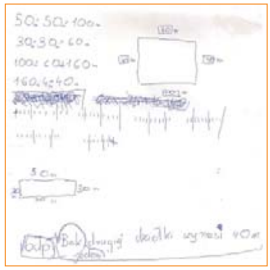
Zadanie 3.

Ogrodzono dwie działki: jedną w kształcie prostokąta o długości 50 m i szerokości 30 m oraz drugą w kształcie kwadratu. Ile wynosi długość boku drugiej działki, jeżeli do ogrodzenia obu działek zużyto tyle samo siatki?

[1] O notacji dwumianowanej i dziesiętnej.



Rozwiązanie Alicji

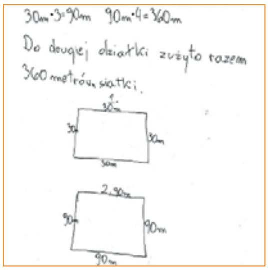


Rozwiązanie Marceliny

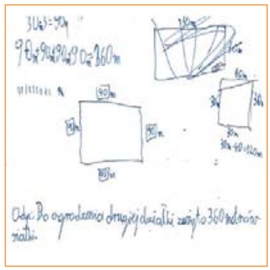
Bardziej złożona treść zadania nie stanowiła trudności. U wszystkich zauważyłam rysunek pomocniczy. W jednym przypadku (Alicja) pojawił się błąd rachunkowy. Marcelina natomiast wymyśliła własny sposób obliczenia ilorazu dużych liczb za pomocą kresek.

Zadanie 4.

Ogrodzono dwie działki w kształcie kwadratu. Długość boku pierwszej działki wynosi 30 m. Ile metrów siatki zużyto do ogrodzenia drugiej działki, jeżeli długość jej boku była 3 razy dłuższa niż pierwszej?



Rozwiązanie Michaliny

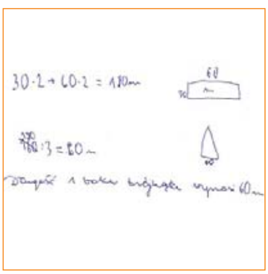


Rozwiązanie Kamili

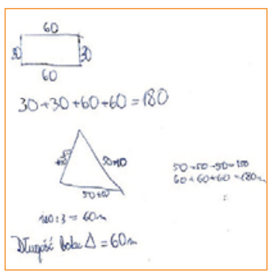
Zaprezentowane rozwiązania różnią się zastosowanymi działaniami. Jednej z dziewczynek wygodniej było posłużyć się dodawaniem, a druga wykonała obliczenia, stosując mnożenie. Każda doszła do tego samego punktu, choć podążały różnymi ścieżkami.

Zadanie 5.

Obwód prostokąta o szerokości 30m i długości 60m jest taki sam, jak obwód trójkąta, który ma wszystkie boki równe. Ile wynosi długość boku trójkąta?



Rozwiązanie Huberta



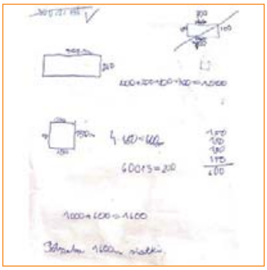
Rozwiązanie Adriana

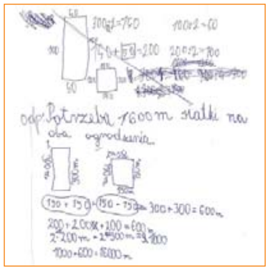
Podobnie jak w poprzednim zadaniu, każdy wybrał swój sposób rozwiązania. Adrian wykorzystał metodę prób i poprawek[2], a tak wyjaśniał swój tok rozumowania: *Najpierw obliczyłem obwód prostokąta. Dodałem wszystkie boki i wyszło mi 180 m. Nie wiedziałem,*

[2] Metoda prób i poprawek plus rozdzielność

ile jest 180 : 3, no to sprawdziłem, czy to może być 50 + 50 + 50 i wyszło mi 150. Brakowało jeszcze 30, a 30 : 3 to jest 10, no to dodałem do każdego boku 10. I się zgadzało, bo wyszło mi 180. Czyli jeden bok [trójkąta] ma 60 m. Jeszcze rok temu uznałabym takie rozwiązanie za błędne. Teraz rozpływałam się w pochwałach nad pomysłowością i to kogo – tego, co dotąd „wolał wf."!

Zadanie 6. (rozwiązywane w zespołach).
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia dwóch działek, jeśli jedna z nich jest prostokątna o długości 300 m, a jeden z boków drugiej jest równy połowie długości pierwszej. Druga jest kwadratem. Szerokość pierwszej jest trzy razy mniejsza od obwodu drugiej.


Rozwiązanie zespołu Michała


Rozwiązanie zespołu Karoliny

Na rozwiązanie tego zadania uczniowie potrzebowali więcej czasu. Obserwowałam ich pracę i przysłuchiwałam się rozmowom. Ten typ zadań dawniej wykonaliby tylko nieliczni i to wyłącznie podczas zajęć kółka matematycznego. Przecież jest to zadanie złożone łańcuchowo. Przyglądając się poczynaniom uczniów, zaczynałam mieć wątpliwości. *Może przesadziłam? Chyba za dużo od nich oczekuję*. Dalej przyglądałam się pracy uczniów, zakładając, że porażka też może czegoś nauczyć, jeśli umiejętnie ją wykorzystamy. W myślach już planowałam kolejne kroki. Nagle jeden z zespołów zgłosił rozwiązanie zadania. Sprawdziłam. Było poprawne. Oniemiałam. Poprosiłam, żeby wyjaśnili, która informacja była według nich najważniejsza dla rozpoczęcia obliczeń. Michał narysował na tablicy prostokąt i kwadrat, wyjaśniając dalej: *Najważniejsze było, że to był kwadrat i prostokąt i jeden bok prostokąta miał 300 m*.

Po tych słowach w zespołach zawrzało. Jedni rozpoczęli obliczenia od początku, inni analizowali swoje rozwiązania. Na ilustracji widać tok myślenia zespołu Karoliny przed wyjaśnieniami kolegów i po nich. Początkowo odczytali długość boku prostokąta jako cały jego obwód. Na tej podstawie założyli długości jego boków i kontynuowali obliczenia. Po wyjaśnieniach kolegów samodzielnie zweryfikowali swoje rozwiązanie jako błędne i wykonali poprawne obliczenia. Bardzo ciekawy jest sposób liczenia tej grupy.

Wszystkie opisane przeze mnie zadania z obwodami nie są zadaniami standardowymi. Umieściłam je w takiej kolejności, w jakiej rozwiązywali je moi uczniowie. Pierwsze z nich to zadanie, w którym rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Każde kolejne było bardziej skomplikowane. Zadania od 1. do 5. zostały rozwiązane przez wszystkie dzieci (praca indywidualna). Zadanie 6. wykonywały w małych grupach (dwu-, trzyosobowych). To zadanie uznano za trudne, ale mimo to wszystkie dzieci podjęły próbę rozwiązania, a połowa grup zrobiła je poprawnie. Obserwując zmagania zespołów, zdałam sobie sprawę, że czytanie ze zrozumieniem treści matematycznych wymaga stałej pracy. Postawiłam na różnorodność zadań tak, by uczniowie mogli ugryźć trudność z każdej strony. Ucieszył mnie fakt bardzo zróżnicowanych rozwiązań tego samego zadania. To mnie utwierdziło w przekonaniu, że ***schematy rozwiązań są dzieciom zupełnie zbędne***. Każde z nich wybiera sposób najdogodniejszy dla siebie. I to było fantastyczne odkrycie dla mnie, a obserwacja i analiza ich toku myślenia stały się źródłem wiedzy o drzemiących w nich możliwościach.

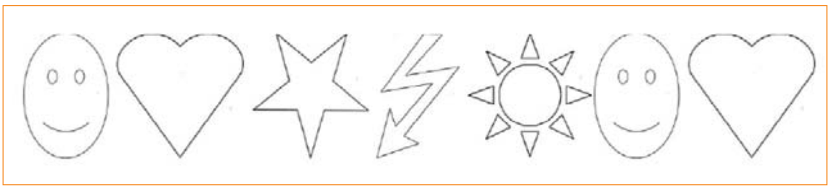
IV Operacja ***„Żywe liczby"***. Moim uczniom bardzo spodobała się ta zabawa. Nie siedzieli w ławkach, czasami zajęcia przenosiły się na korytarz, a przy sprzyjającej pogodzie na boisko szkolne.

Dzieci miały okazję doskonalić rachunek pamięciowy, przewidywać, uogólniać, snuć przypuszczenia, sprawdzać je i wyciągać wnioski. Podczas tej zabawy zauważyłam trudności dzieci we współpracy. Jednak umiejętnie poprowadzone i zachęcone do działań zespołowych, osiągały sukces w tym aspekcie.

Uśmiechnięte buzie wyrażały zadowolenie i satysfakcję z poprawności obliczeń. Mnie jednak najbardziej ucieszyła obserwacja ich współpracy, tego, jak się nawzajem słuchają. Coś, co dotąd nie zawsze się udawało, teraz nie wymagało mojej interwencji, nie było potrzeby godzenia czy rozstrzygania sporów. Byłam tylko niemym (uradowanym) obserwatorem cudownej współpracy uczniów. Poza tym, taki rodzaj zajęć jest szansą na sukces dla każdego ucznia. Przy tym samym poleceniu poszczególni uczniowie mają różne zadania do wykonania. Grupa dostosowuje tempo pracy do każdego uczestnika, bo zadanie kończy się wtedy, gdy każdy z osobna odnajdzie swoje miejsce, rozwiąże swoje zadanie. W razie trudności nie tylko współpracują, ale rozmawiają o matematyce. I jak tu nie kochać „Żywych liczb"? I jeszcze na zakończenie tego tematu komentarz Adriana: *No, taką matematykę mogę mieć codziennie.*

V Wszechobecne **sekwencje.** Prace nad sekwencjami rozpoczęłam zimą od prezentacji obrazków trzech zwierząt: krowy, psa i ryby.
Pytanie: *Co je łączy?*
Odpowiedzi uczniów: *są zwierzętami, hodują je ludzie, mają głowy i kręgosłupy, mają oczy, można je dotknąć, są narysowane …*
Pytanie: *Co je różni?*
Odpowiedzi uczniów: *ryba ma płetwy, a pies i krowa nogi, krowa ma rogi, psa się nie je, ryba nie jest ssakiem, krowa daje mleko, ryba żyje w wodzie i ma łuski …*

Później pojawiały się inne zestawy obrazków i powtarzałam pytania, a dzieci były coraz bardziej pomysłowe w wyszukiwaniu podobieństw i różnic.
Kolejnym krokiem była już praca nad sekwencjami.



Uczniowie bez trudności ułożyli dalszą część tej sekwencji. Chętnie też przystąpili do obliczeń, na których miejscach pojawią się poszczególne obrazki:

Tabela Jakuba

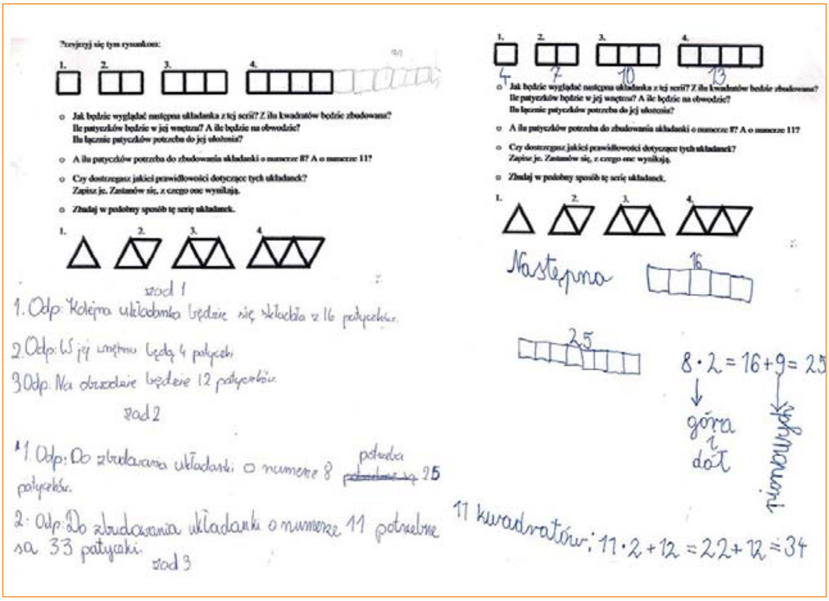
Dostrzegały też prawidłowości:
Hubert: Tutaj co pięć i w każdym kolejnym rzędzie co pięć tylko zaczyna się od innej liczby.
Ala: *A od góry na dół idą po kolei i potem w następnych rzędach.*

Zaskakująco szybko wymieniali wielokrotności liczb, dodawali i mnożyli. Na jednych zajęciach wykonywali tyle różnych działań, nie zaglądając nawet do tradycyjnych kart pracy.

Jedni potrzebowali narysowania kolejnych obrazków, a inni kolejność występowania obrazków zapisywali za pomocą liczb. Wszyscy pracowali, każdy w swoim tempie i w wybrany przez siebie sposób. Kolejnego dnia pokusiłam się o ułożenie sekwencji złożonej z sześciu obrazków, a potem z siedmiu… Nie było sensu kontynuowania, bo już wiedziały jak obliczyć, na którym miejscu będą poszczególne obrazki, ile będzie np. serc w stu obrazkach.

Michał wyjaśnia i wykonuje obliczenia

To był właściwy czas, by przejść do trudniejszych zadań. Uczniowie pracowali nad nimi w zespołach trzyosobowych. Oto przykłady zadań.



Rozwiązania zespołu Agaty

Rozwiązania zespołu Huberta

Jak widać pierwszy zespół po kolei wykonywał polecenia. Na odwrocie kartki robił potrzebne rysunki i zliczał patyczki. Dzieci nie uniknęły błędów rachunkowych. Nie wykonały też wszystkich poleceń. Bardziej zaintrygował mnie zapis zespołu Huberta. Chłopcy niewiele zapisali, ale świetnie tłumaczyli, co oznaczają poszczególne obliczenia i podpisy:
Ja: *Co oznacza „góra i dół"?*
Hubert: *Ósmy rysunek, to osiem patyczków u góry i osiem na dole.*
Ja: *A ta dziewiątka skąd się wzięła?*
Kajtek: *To są pionowe patyki. Zawsze jest o jeden więcej niż kwadratów. Osiem kwadratów to dziewięć patyków.*
Ja: *To jak policzycie, ile patyczków potrzeba do zbudowania układanki o numerze 25?*
Hubert: *25 na górę i 25 na dół i jeszcze 26 pionowych. To będzie…*
Kajtek: *76.*

Więcej wyjaśnień nie potrzebowałam. Chłopcy znaleźli własny sposób obliczeń i regułę. Wiedziałam, że cel został osiągnięty. Chciałam oczywiście, aby wszystkie zespoły kończyły pracę z takim sukcesem. Nie zawsze jest to możliwe. Wykorzystałam dzieci z zespołu Huberta jako ekspertów do wysłuchania i oceny hipotez innych zespołów.
I kolejne zadanie.

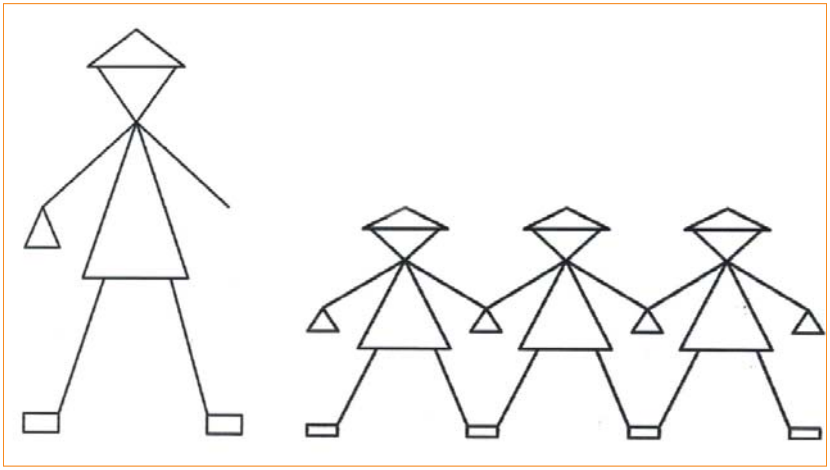
Rozwiązanie zespołu Sary

Taką odpowiedź usłyszałam na ostatnie pytanie zawarte w tym zadaniu:
Sara: *Można łatwo obliczyć dodaną liczbę kropek, bo na miejscu 15 jest 15 razy 15 kropek. W kolejnym dodajemy z boku 15 kropek w pionie i mamy 16 rzędów i u góry po jednej kropce do każdego rzędu czyli 16. A 15 i 16 daje nam 31 kropek więcej.*
Ja: *O ile kropek więcej będzie na 21. wzorku niż na 20?*
Sara: *20 dodać 21, czyli 41.*

Każdy z zespołów osiągał sukces na miarę swoich możliwości, osiągając często tylko częściowy sukces. Najtrudniej było dzieciom znaleźć prawidłowość i doprowadzić zadanie do końca. Jednak im więcej takich zadań rozwiązywały, tym większa liczba dzieci dobrze sobie z nimi radziła.

Ogromnie ucieszyło mnie, że moi uczniowie potrafią myśleć krytycznie, oceniać poprawność wykonania zadania, analizować warunki, wyjaśniać oraz proponować różnorodne rozwiązania. I robią to wszystko, nie poznając wcześniej schematów rozwiązań, przykładowych zadań… Osiągają sukces, który jest samodzielnie przez nich wypracowany.

Oto jedno z zadań opartych na sekwencjach mojego autorstwa.



Prezentując pojedynczego ludka (lewa ilustracja powyżej), zadałam uczniom kilka pytań:
Z ilu trójkątów zbudowany jest jeden ludek?
Z ilu patyczków zbudowany jest jeden ludek?
Z ilu prostokątów zbudowany jest jeden ludek?
Z ilu figur zbudowany jest jeden ludek?

Bez kłopotu przeliczały. Trudność pojawiła się przy ostatnim pytaniu, bo dzieci uznały, że „patyczki" nie są figurami. Może by było lepiej, gdybym w pytaniu użyła słowa „odcinków"? Po wyjaśnieniu wątpliwości zaprezentowałam sekwencję ludków i zadałam kolejne pytania:
Z ilu figur zbudowany jest ciąg trzech ludków?
Z ilu figur zbudowany będzie ciąg złożony z sześciu ludków?

Dzieci podjęły zadanie, starając się odpowiedzieć na te kolejne pytania.

Zadanie okazało się zbyt skomplikowane ze względu na zbyt dużą liczbę figur tworzących jednego ludka. Bardzo dużo czasu zabrało dzieciom przeliczanie, z ilu figur zbudowane są poszczególne kombinacje ludków. Zrezygnowałam z poszukiwań prawidłowości. Nie była to wina dzieci, ale moja. Doświadczyłam, jak ważne jest dokładne przemyślenie zadań tak, aby cel się nie zagubił, bo przecież moim celem nie było przeliczanie. Później unikałam już tworzenia tak skomplikowanych wzorów.

Czas na podsumowanie

Co teraz uważam za najważniejsze w nauczaniu matematyki? Według mnie jest to osobiste doświadczenie matematyki przez każde dziecko. Należy opierać się na bliskich dzieciom, życiowych sytuacjach, by poznawały, dostrzegały strukturę i tworzyły nową. Praktyczne działanie jako punkt wyjścia jest źródłem satysfakcji dającym radość poznania. Jeśli stworzymy im odpowiednie warunki doświadczania, to zbudujemy w nich fundament, na którym oprze się dalszy ich rozwój. Na tym fundamencie będzie można budować rozwiązywanie najróżniejszych problemów matematycznych o nieograniczonym poziomie trudności. Zadania, które dotąd uważałam za zbyt trudne, były wyzwaniem dla uczniów. Wystarczyło tylko pozwolić dzieciom działać i myśleć tak, jak potrafią najlepiej. Oczywiście mają prawo do popełniania błędów. Pokonywanie trudności, mierzenie się z problemami matematycznymi stanowi integralną część rozwoju. Poziom trudności jest uzależniony od wcześniejszych doświadczeń dzieci. Powinniśmy dbać o to, by kolejne problemy matematyczne odwoływały się do wcześniej zbudowanych fundamentów. Nieodzowna jest wiara w możliwości i umiejętności uczniów. Czasami niesłusznie zakładamy, że sobie z jakąś trudnością, zadaniem nie poradzą. Tworzymy w ten sposób szklany sufit. Widzą co prawda świat ponad nim, ale nie mogą go dotknąć. Niejednokrotnie uczniowie zaskoczyli mnie logiką myślenia czy pomysłowością rozwiązań. Dlatego mam zamiar zdemontować szklany sufit i pozwolić swoim podopiecznym doświadczać i odkrywać fascynujący świat matematyki. Obserwacja ich pracy, ich osiągnięcia i sposoby radzenia sobie z problemami będą decydowały o poziomie trudności zadań, jakie przed nimi postawię. Zaufam uczniom i pozwolę im zmierzyć się z tymi zadaniami, które dotąd uznawałam za trudne. Udowodnili mi przecież, że nie ma takich zadań. Wiem już, że potrafią o wiele więcej, niż dotąd sądziłam. Mam nadzieję, że dzięki temu więcej z nich pokocha matematykę, a szczególnie ci, którzy dotąd „woleli wf".

Wiesława Binkowska-Wójcik
nauczyciel edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr14 w Bydgoszczy, w zawodzie 26 lat.

UCZNIOWIE KLASY 3 WYJAŚNIAJĄ, UZASADNIAJĄ I PRZEKONUJĄ NA ZAJĘCIACH Z EDUKACJI MATEMATYCZNEJ, CZYLI... PANI POZWALA NAM MYŚLEĆ

Violetta Majewicz

Taką odpowiedź otrzymała jedna z mam, gdy zapytała swojego syna, ucznia mojej klasy, po powrocie ze szkoły: *...a jak tam na matematyce* Pełna odpowiedź brzmiała: *Pani pozwala nam myśleć i układać różne rozwiązania!* Dziecko powiedziało to z dumą i radością.

Rozmowa z mamą tego ucznia, Adriana, wywołała uśmiech na mojej twarzy. Poczułam, że moje „nowe" nauczanie matematyki jest zauważane przez dzieci i doceniane. Na tym bardzo mi na nim zależało.

Dzieci, podobnie jak dorośli, lubią robić nowe rzeczy, ciekawe, rozwijające, dające radość oraz poczucie dumy z pokonania trudności. Na matematyce jest ku temu wiele okazji, jeśli tylko nie zamkniemy ich w schematycznych kartach pracy, zadaniach zbyt łatwych, wręcz banalnych dla większości. Każdy chce przeżyć sukces, więc dajmy dzieciom tę możliwość, dajmy im szansę badania i odkrywania praw, struktur, prawidłowości, zależności…

Pracując z dziećmi w tym roku szkolnym, w klasie trzeciej, nie tylko z użyciem kart pracy, ale przede wszystkim wykorzystując wiele zadań nietypowych, otwartych, matematycznych gier itp. zauważyłam, że w wielu z moich uczniach drzemie duży potencjał, o który ich wcześniej nie podejrzewałabym. Z czasem okazało się, że niektórzy potrafią bronić swoich racji, zauważają w zadaniach różne aspekty, zadają ciekawe pytania, potrafią rozwiązywać zadania na wiele sposobów, wykraczają poza ramy przyjętego zakresu liczbowego. Potrafią uzasadniać, wnioskować, analizować, przekonywać.

Rozpoczęłam obserwację i dokumentowanie umiejętności matematycznych moich uczniów już w październiku. Jednym z ważniejszych wątków było rozwiązywanie typowych i nietypowych zadań tekstowych.

Zadania tekstowe

Pierwsze z prezentowanych zadań uzupełnione było w podręczniku[1] rysunkiem przedstawiającym sznurek przymocowany do gwoździ, naprężony między dwoma oknami. Oto jego treść:
Anna i Lisa przesyłają sobie listy za pomocą sznurka umocowanego do okien. Sznurek ma 18 m długości. Jaka jest odległość od okna Lisy do okna Anny?
Podkreśl właściwą odpowiedź i uzasadnij ją:

a. mniej niż 9 m
b. 9 m
c. więcej niż 9 m
d. 18 m.

Najpierw głos zabrała Amelka:
Amelka: *To będzie więcej niż 9.*
Ja: *Dlaczego?*
Amelka: *Nie wiem.*
Ja: *A ile to jest więcej niż 9?*
Amelka: *Np. 10. Ach, to może mniej niż 9?*
Ja: *A ile to jest mniej niż 9?*
Amelka: *Np. 8. Już wiem! 9 m!*
Ja: *Dlaczego?*
Amelka: *Bo 9 + 9 to razem 18, a 8 + 8 to 16 – więc za mało, a 10 + 10 to 20, więc za dużo.*

Amelka próbowała rozwiązać to zadanie metodą prób i poprawek. Obawiam się, że gdyby liczby były większe, to nie poradziłaby sobie z nim.

Spytałam uczniów: *Kto inaczej rozwiązał zadanie?*
Dominika: *A ja to sobie zobaczyłam na linijce, że 9 cm i jeszcze raz 9 cm, to będzie równo 18.*
Maja: *A ja odjęłam od 18 jedną długość, połowę i wyszło 18 – 9 = 9.*

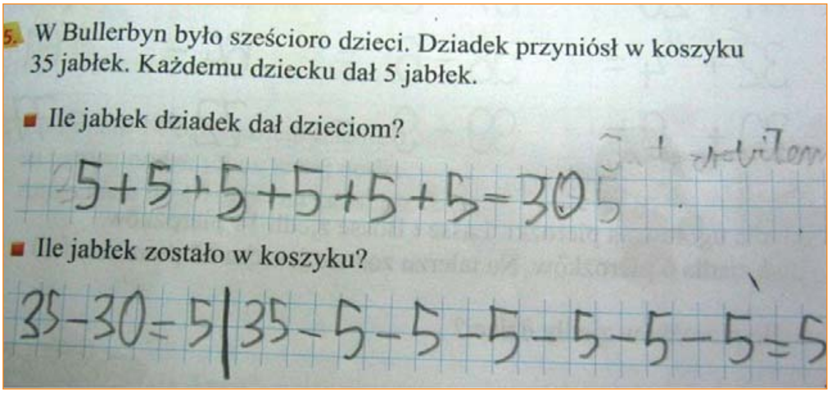
To było najczęstsze rozwiązanie.

[1] To i następne zadanie pochodzi z podręcznika „Wesoła szkoła i przyjaciele", cz. I.

Dominika: *Można jeszcze obliczyć 18 : 2 i też wychodzi 9, bo od okna Lisy do okna Anny jest tyle samo, co w drugą stronę. Dwie takie same drogi, dlatego trzeba podzielić na 2.*

Tak jak Dominika rozwiązało zadanie jeszcze kilka osób, podobnie argumentując.

Muszę już w tym miejscu nadmienić, że wyjaśnianie, dlaczego ma być takie, a nie inne rozwiązanie, sprawiało uczniom dużo problemów. Moje pytanie „Dlaczego?" powodowało czasami wycofanie się, niewiarę we właściwe rozwiązanie, podejrzenie, że został popełniony błąd. Z czasem dzieci przywykły do tego pytania, zniknęły ich obawy i coraz chętniej mówiły o swoich sposobach rozwiązywania zadań. Wiedziały, że chcę tylko dowiedzieć się, jak myślą, bez oceniania ich wypowiedzi. Nauczyły się, że gdy padały różne odpowiedzi, to czasami, nawet te błędne, pozwalały znaleźć właściwe rozwiązanie. Poza tym uczyły się wzajemnie od siebie, a to bardzo cenne doświadczenie.

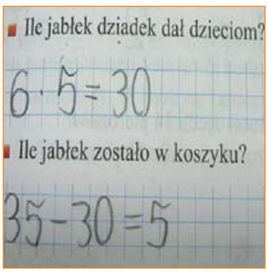

5. W Bullerbyn było sześcioro dzieci. Dziadek przyniósł w koszyku 35 jabłek. Każdemu dziecku dał 5 jabłek.

- Ile jabłek dziadek dał dzieciom?

5+5+5+5+5+5=30

- Ile jabłek zostało w koszyku?

35−30=5 | 35−5−5−5−5−5−5=5


- Ile jabłek dziadek dał dzieciom?

6·5=30

- Ile jabłek zostało w koszyku?

35−30=5

Zadanie o jabłkach, które dziadek rozdał dzieciom, zostało wykonane właściwie tylko dwoma, podobnymi sposobami i jako typowe, nie sprawiło trudności. Wszyscy wykonali je poprawnie.

Zastanawiałam się, czy warto więc rozwiązywać takie zadania.(Już wiem. Nie warto!) Z podobnymi, typowymi zadaniami dzieci miały dotychczas bardzo często do czynienia, gdyż w kartach pracy rzadko pojawiają się zadania otwarte czy nietypowe. Niewiele trzeba myśleć, jeśli na jednej karcie pracy jest kilka zadań o bardzo podobnym schemacie rozwiązania.

Kolejne zadanie[2], troszkę nietypowe ze względu na układ danych, każdy rozwiązywał sam, a potem chętni wyjaśniali swój sposób na tablicy.

Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o 8 modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma 16?

Maja zaproponowała zapis rozwiązania jednym działaniem: 16 + 8 – 2 = 22.

Na pytanie „O co jeszcze możemy zapytać?", padło kilka odpowiedzi:

[2] Zadanie pochodzi z badania OBUT 2012.

Ile modeli mają wszyscy chłopcy razem?
O ile Michał ma więcej od Janka?
O ile Janek ma mniej od Michała i Piotra?

Odpowiedzieliśmy na wszystkie postawione pytania.

Z czasem zaczęliśmy rozwiązywać zadania złożone, otwarte i problemowe. Wielu uczniów miało z nimi dużo trudności, niektórzy mają je nadal. Zauważyłam jednak, że kolejne osoby zaczynają się angażować w ich rozwiązywanie, przestają się bać pokazywania własnych sposobów (ciągle im powtarzam, że każde rozwiązanie jest dobre, jeśli prowadzi do poprawnego wyniku). Nieliczni zaczęli wykonywać rysunki do zadań. Okazało się, że nie tylko najlepsi mają coś do zaproponowania. Dzieci, które wcześniej nie lubiły zabierać głosu na matematyce, teraz chętniej się zgłaszają, podają swoje propozycje, mówią, co zauważyły, uzasadniają swoje zdanie. Zaczęły nawet same układać ciekawe pytania i zadania otwarte czy nietypowe, jak te do znanej wszystkim bajki o Kopciuszku.

Zadanie 1.

Dwie siostry Kopciuszka miały 122 sukienki
Ja: Jakie proponujecie pytanie?

Tu nastąpiła dyskusja dzieci:
Igor P.: *Po ile sukienek miała każda z sióstr?*
Dominik: *122 : 2 = 61.*
Ja: *Co wy na to?*
Uczniowie: *Dobrze jest.*
Igor P.: *Każda ma po 61 sukienek.*
Kinga: *Mają po równo.*
Miłosz: *Miały po tyle samo, to musimy to dopisać.*
Ja: *Dlaczego?*
Miłosz: *Nie wiem, no nie wiem, jak to powiedzieć.*

Tu Miłosz fantastycznie wywnioskował, że skoro w pytaniu nie ma informacji, że trzeba obliczyć taką samą liczbę sukienek, to siostry nie muszą mieć po równo.

Ja: *To dopisek taki jest konieczny czy nie?*
Uczniowie: *tak!*
Poprawiliśmy pytanie i zapisaliśmy rozwiązanie zadania.
Ja: *A inne pytanie, jakie proponujecie?*
Wiktoria: *Ile miała sukienek jedna z sióstr, jeśli druga miała o 50 mniej?*

Wiktoria mile zaskoczyła mnie tym pytaniem. Przeważnie dzieci podają takie pytania, na które znają już odpowiedź lub wydaje im się, że odpowiedź jest prosta. To pytanie skłaniało do myślenia, a dziewczynka nie bała się go zadać.

Ja: *Jak to rozwiążemy?*
Wiktoria: *Możemy odjąć 122 – 50 = 72.*
Ja: *I co wy na to?*
Uczniowie: *???*
Ja: *Ile ma jedna, a ile druga z sióstr?*
Wiktoria: *Jedna ma 50, a druga 72.*
Dominik: *Ale jedna od drugiej ma mniej o 22, a miało być 50!*
Wiktoria: *No to tak nie może być.*
Ja: *Więc?*

Tu nastąpiła długa cisza, która pozwoliła dzieciom na spokojne zastanowienie się. Nie przerywałam jej i… warto było.

Amelka: *Jeśli przyjmiemy, że mają po równo, po 61, to dodajmy 50 do jednej, a od drugiej odejmiemy 50.*
Dominik: *Nie, bo będzie 100 różnicy!*
Ja: *Więc?*
Dominik: *To może dodamy i odejmiemy po 25?!*
Chłopiec wykonał obliczenia: 61 + 25 = 86   61 – 25 = 36   86 – 36 = 50   86 + 36 = 122
Dominik: *Teraz jest dobrze. 86 ma jedna z sióstr, druga ma 36, razem mają 122, a między 86 a 36 jest 50.*
Ja: *Brawo!*

Chłopiec skorzystał z mylnej, ale jakże pomocnej odpowiedzi Amelki, potrafił rozwiązać zadanie, a także wyjaśnić, jak to zrobił i udowodnić, że ma rację.

Zadanie 2.

Siostry miały razem 15 naszyjników, ale jedna miała o 3 więcej od drugiej.
Ja: O co spytamy?

Amelka: *Ile naszyjników miała każda siostra.*
Kacper B.: *Jedna miała 7, a druga 8 i to razem jest 15.*
Ja: *Co myślicie o propozycji Kacpra?*

Uczniowie: *???*
Maja: *Ale 8 – 7 = 1, a nie 3.*
Kacper: *1, oj, to nie!*
Dominik: *Trzeba od 15 odjąć 3: 15 – 3 = 12 i teraz jak jest 12, to podzielić na 2 siostry: 12 : 2 = 6.*
Ja: *Co oznacza 6?*
Dominik: *Tyle ma jedna z sióstr, a druga ma 6 + 3 = 9.*
Ja: *Brawo!*

To były dla dzieci trudne zadania, nie wszystkie zrozumiały, jak Dominik je rozwiązał i dlaczego właśnie tak. Oczywiście, ciągle trwa praca nad umiejętnością rozwiązywania zadań tekstowych, trudna i żmudna praca, ale dająca coraz więcej satysfakcji i dzieciom i mnie. Dominik skorzystał z wcześniejszego zadania o sukniach i w tym nowym zadaniu zastosował zdobytą wiedzę. Uznałam, że muszę więcej wykorzystywać podobnych zadań na lekcjach.
Pod koniec roku szkolnego wpadło mi w ręce zadanie z egzaminu gimnazjalnego:
Uczniowie klas III wybierali przedstawicieli do samorządu uczniowskiego. Było trzech kandydatów: Ola, Paweł i Romek. W klasie jest 32 uczniów i każdy oddał jeden głos. Zwyciężyła Ola, która uzyskała mniej niż połowę głosów, reszta głosów rozłożyła się po równo na pozostałych. Ile głosów otrzymała Ola? Ile głosów mógł otrzymać każdy z kandydatów? Ile jest możliwych rozwiązań zadania?

Zmodyfikowałam nieco to zadanie, jeszcze bardziej je otwierając. Dałam też dzieciom do wykorzystania klocki. Usłyszałam kiedyś, że problem staje się dużo łatwiejszy, jeśli przy jego rozwiązywaniu można manipulować. Po raz kolejny przekonałam się, że to racja. Wszystkie dzieci, nawet te najsłabsze, poradziły sobie z tym zadaniem i wskazały chociaż kilka możliwości. Oto zadanie po modyfikacji:
Ola, Krzyś i Paweł mieli razem 28 klocków. Ola miała mniej niż połowę, a resztę mieli chłopcy. Podaj jak najwięcej możliwości odpowiedzi na pytanie: po ile klocków miał każdy?

Rozdałam klocki i obserwowałam zmagania dzieci.

Notowałam spostrzeżenia:
Dominik: *Dużo jest tych możliwości!*
Adrian (po jakimś czasie): *Ja już liczę bez liczenia!*
Wiktoria: *A mogę napisać, że Ola ma wszystkie liczby < 14?*

Jeden ze słabszych uczniów podzielił klocki na połowy i doszedł do pierwszego wniosku, że Ola nie może mieć 14 i 15, i więcej.
Tyberiusz: *Jest 13 możliwości, bo Ola nie może mieć więcej niż 13!*
Dominik: *Może być więcej, bo chłopcy mogą mieć na przemian!*
Adrian: *A ja mam już 15 i chyba może być jeszcze więcej, może o 10.*
Igor P.: *A ja mam 5 i tyle mi wystarczy* (tu zakończył swoje poszukiwania i zaczął bawić się klockami).

Ola	Krzyś	Paweł
12	8	8
14	5	5
13	5	10
11	9	8
10	10	8
9	11	8
8	2	18
7	3	18
6	4	18
5	5	18
4	6	18
3	7	18

ciąg dalszy

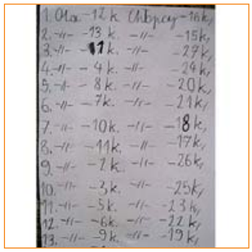
Część uczniów narysowała sobie tabelki na kartkach i uzupełniała je.
Dominik: *Może być 69 możliwości, bo Ola ma od 1 do 13, Paweł i Krzyś po 28.*

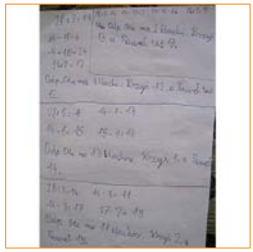
I na potwierdzenie podał działanie: 28 + 28 + 13 = 69.
Wiktoria: *Czy Ola może mieć 0?*
Dzieci doszły do wniosku, że musi mieć choćby 1, bo przecież „coś tam miała".
Tyberiusz: *Jest 39 możliwości, bo każdy ma po 13.*

Poparł swoją propozycję działaniem: 13 × 3 = 39.
Dominika: *W tabelce jest lepiej robić, bo jest jak w słupkach!*
Kinga: *Jak Ola ma 13 klocków, to Paweł 14, a Krzyś 1, ale też Paweł może mieć 1, a Krzyś 14!*

Dzieci miały już wiele możliwości zapisanych na swoich kartkach, więc spytałam o to, ile w końcu jest tych możliwości. Padały różne odpowiedzi: 27, 39, 69, 120, 270.

Ola	Paweł	Krzyś
13		
13	14	1
13	1	14
13	13	2
13	2	13
13	3	12
13	12	3





Kinga zaproponowała, żebyśmy spisali je wszystkie w tabelce na tablicy i wtedy się dowiemy. Zaczęliśmy od zapisu, który wcześniej podała, potem dodając kolejne:

Następnie dopisywaliśmy dla Oli 12 oraz kolejne możliwości dla Pawła i Krzysia.
Obok tabelki zapisywałam, ile jest możliwości dla chłopców przy 13, 12, 11 itd. klockach Oli.
Ola: 13 klocków, możliwości: 14.
Ola: 12 klocków, możliwości: 15.
Ola: 11 klocków, możliwości: 16.

W tym momencie Miłosz zauważył, że gdy liczba klocków Oli się zmniejsza, to liczba możliwości zwiększa i przy 10 klockach Oli będzie 17 możliwości itd.
Hugo: *To teraz wystarczy pododawać wszystkie liczby w słupku i mamy!!!*

Okazało się, że jest 260 możliwości rozwiązania tego zadania.

Byłam dumna z moich uczniów, a oni jeszcze bardziej z siebie. Każdy z nich odniósł jakich sukces, bo każdy miał na kartce pewną liczbę z tych 260 rozwiązań.

Praca nad zadaniem zajęła nam 2 lekcje, ale na pewno nie był to czas stracony. Zadanie niestereotypowe, otwarte, było bardzo dobre dla uczniów o różnych umiejętnościach matematycznych. I słaby, i zdolny uczeń miał możliwość wykazania się i sprawdzenia. Pełna indywidualizacja – bez dodatkowych kart pracy.

Myślę, że gdybym dała dzieciom to zadanie na początku roku szkolnego, to nie byłoby takiego sukcesu. Po wielu doświadczeniach z rozwiązywaniem różnorodnych zadań nietypowych, otwartych, widać, jak bardzo zmieniło się ich podejście. Nie było okrzyków „to za trudne", „nie da się tego zrobić" itp. Dzieci wzięły klocki i po prostu zaczęły działać. Swoją drogą nie wiem, czy na początku roku dałabym im do rozwiązania to zadanie. Może uznałabym je wtedy za zbyt trudne?

W połowie roku szkolnego, postanowiłam sprawdzić, jak poradzą sobie moi uczniowie z zadawaniem pytań do rysunku, wykresu lub układu klocków.

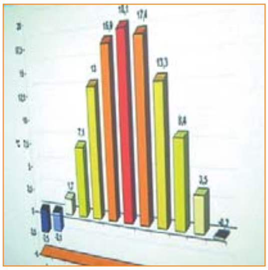
Uważam, że zadawanie pytań jest kluczowe w życiu codziennym. Pomaga w zbieraniu informacji, rozwiązywaniu problemów, planowaniu – sprzyja rozwojowi człowieka.

Lekcja z pomiarem i odczytywaniem temperatury

Na początku lekcji uczniowie otrzymali papierowe termometry i zaznaczali podane przeze mnie wartości. Następnie dokonywali obliczeń typu: *temperatura wzrosła (spadła) o… stopni, ile teraz wskazuje termometr? Rano było…. stopni, a wieczorem… O ile spadła lub wzrosła temperatura?*

Przy każdym pytaniu dzieci przedstawiały swój sposób postępowania. Np. Dominika odejmowała lub dodawała po jednym stopniu na termometrze, a Kacper K. odejmował w pamięci, np. 8 – 3. Podobnie inne dzieci.

Następnie wyświetliłam na tablicy interaktywnej wykres słupkowy, który pokazywał średnie temperatury w poszczególnych miesiącach:



Dzieci miały za zadanie zadawać pytania. Oto, jakie pytania się pojawiły:

- Jaki miesiąc ma najniższą temperaturę?
- Jaka jest temperatura we wrześniu?
- Które dwa miesiące miały podobną średnią temperaturę?
- Które miesiące miały temperaturę niższą niż lipiec?
- Jakie miesiące miały średnią temperaturę niższą od 0?

I wiele innych bardzo podobnych. Tu skończyły się pomysły dzieci.

Spytałam więc: *Jakie mogą być pytania, aby można było dokonać obliczeń?*

- O ile kwiecień ma wyższą temperaturę od marca?
- O ile styczeń ma niższą temperaturę od lipca?
- O ile temperatura spadła od X do XII?
- Od I do VII o ile stopni wzrosła średnia temperatura?

Liczyliśmy w pamięci i na tablicy. Na koniec dzieci miały okazję wystąpić w roli prezentera prognozy pogody.

W czasie tej lekcji dzieci nie tylko obliczały spadek lub wzrost temperatury, ale także nauczyły się odczytywać wykresy (były trzy różne), utrwalały kolejność nazw miesięcy oraz znaki rzymskie. Najtrudniejsze jednak było samo zadawanie pytań. Uznałam, że wiele w tym względzie jest jeszcze do zrobienia, nie tylko na matematyce. Umiejętność zadawania pytań ma ogromne znaczenie w uczeniu się, przede wszystkim skłania do myślenia!

Ważenie

Jesienią nabyłam dla mojej klasy wagę i odważniki i w końcu mogłam z dziećmi ważyć do woli. Wszystkie bardzo chętnie zajęły się ważeniem, gdyż wcześniej nie miały okazji pracować z wagą szalkową.

***Lekcja 1.* Dzieci przyniosły na nią różne rzeczy.**
Spytałam: Co możemy z tym zrobić?
Maja: *Zważyć.*
Igor K.: *Porównać, co jest cięższe.*
Miłosz: *Policzyć, o ile jest lżejsze lub cięższe.*
Najpierw zważyliśmy maskotkę i piórnik. Na tablicy zapisaliśmy 115 g i 160 g. Dzieci powiedziały, że maskotka jest lżejsza.
Ja: *Skąd to wiemy?*
Monika: *Bo jest wyżej na wadze.*
Ja: *co możemy zrobić z tymi danymi?*
Amelka: *Na tablicy napisać znak mniejszości: 115 g < 160 g.*
Ja: *Jak jeszcze możemy porównać?*
Mateusz powiedział, że na jednej szalce możemy dokładać odważniki, aż się waga zrówna.
Świetne spostrzeżenie, pomyślałam i spytałam, czego się dowiemy
Mateusz wyjaśnił: *O ile jest lżejsza maskotka.* Wykonaliśmy takie ćwiczenie.
Ja: *Jak możemy to jeszcze obliczyć inaczej?*
Kacper K.: *Możemy odjąć 160 g – 115 g.*
Zadania podobnego typu wykonaliśmy kilkakrotnie.

Lekcja 2.* *Powiedziałam do uczniów, że mamy do dyspozycji jednakowe długopisy Mai (komplet 6 sztuk) i spytałam, jakie zadania możemy z nimi ułożyć.
Wiktoria: *Możemy zważyć, ile ważą wszystkie długopisy.*
Ja: *Co jeszcze możemy obliczyć? Dowiedzieć się?*
Maja: *Ile waży jeden długopis?* Zważyliśmy.
Ja: *Jak inaczej obliczyć, ile waży jeden długopis?*
Kamil zaproponował, żeby podzielić: 60 g : 6 = 10 .
Amelka: *A jak wiemy, ile waży jeden długopis, to możemy pomnożyć przez 6 i będziemy wiedzieli, ile ważą wszystkie.*
Ja: *Mamy pięć różnych butelek z napojami, co proponujecie?*

Monika: *Możemy zważyć wszystkie razem.*
Kacper B.: *Możemy zważyć każdą po kolei.*
Igor K.: *Możemy ustawić butelki od najlżejszej do najcięższej.*
Igor P.: *Możemy ustawić butelki od najcięższej do najlżejszej.*
Wykonywaliśmy podobne ćwiczenia praktyczne na różnych przedmiotach.

Lekcja 3. i 4:

Spytałam uczniów: czy słyszeliście kiedyś słowa: BRUTTO, NETTO, TARA?

Maja: *Jest sklep NETTO!*
Uczniowie: *Nie wiemy!*

Kamil zauważył nagle: *U mnie na czekoladkach* (akurat miał je na ławce, bo był to 6 grudnia, mikołajki) *jest napisane: masa netto 45 g.*
Ja: *Czy wiecie co to znaczy?*
Uczniowie *?*
Ja: *A jak myślicie, co to może znaczyć?*
Amelka: *To chyba może tyle ważyć to, co jest w środku.*
Ja: *Właśnie, to jest waga towaru, który jest w opakowaniu.*

Wyjaśniłam znaczenie pozostałych nazw i zaczęliśmy liczyć. Ważyliśmy fasolkę w kubeczku, sam kubeczek i samą fasolę. Obliczenia zapisywaliśmy na tablicy, ciężar sprawdzaliśmy na wadze i porównywaliśmy z tym, co dzieci zważyły.

Po wielu ćwiczeniach praktycznych liczyliśmy w pamięci. Trudność sprawiało zapamiętanie nowych nazw, ale gdy zastępowaliśmy je takimi słowami, jak opakowanie, zawartość, „to, co w środku" z obliczeniami nie było kłopotów.

Na kolejnej lekcji liczyliśmy, jakie mogą być tara i netto przy podanym brutto. Dzieci podawały różne propozycje, które zapisywaliśmy w tabeli: Następnie próbowaliśmy podsumować wyniki naszych działań.

Ja: *Co nam mówi ta tabelka?*

Monika: *Brutto to jest netto + tara.*

Igor K.: *Jak brutto było w kg, to netto i tara też.*

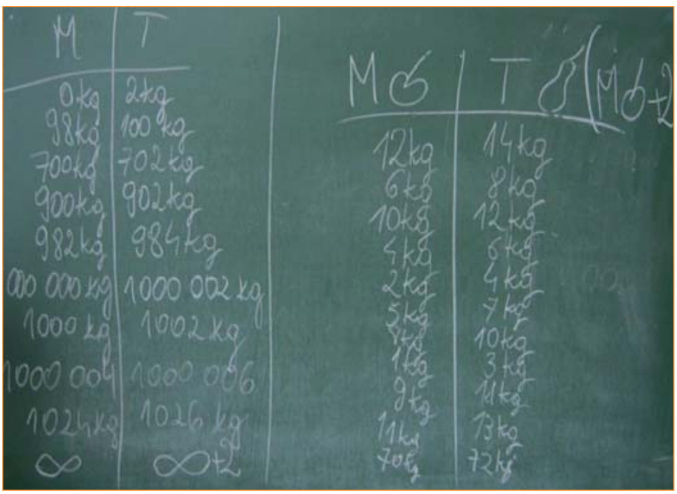
Adrian: *Jak brutto było w dag, to netto i tara też.*

Hugo: *Brutto jest większe od netto i tary.*

Ja: *A może być inaczej?*

Dominik: *Może być takie samo jak netto albo tara, np. 1kg brutto = 1 kg netto + 0 kg tara albo odwrotnie.*

Rozwiązywaliśmy także zadania tekstowe. Jedno z nich brzmiało tak:



Mama kupiła pewną ilość jabłek, a tata kupił o 2 kg więcej gruszek. Jakie mogą być dane w tym zadaniu?
Zapisywaliśmy w tabelce rozmaite możliwości i propozycje dzieci.
Co zauważyliście? – spytałam.
Dominika: *Jak mama kupiła więcej, to i tata miał więcej, a jak mama mniej, to i tata miał mniej.*
Kamil: *Może być nieskończoność możliwości.*
Ja: *W każdą stronę?*
Kamil: *Początek będzie zawsze taki sam: mama 0 kg, a tata 2 kg, a potem do nieskończoności* (kilka osób wiedziało, jak wygląda symbol nieskończoności).
Maja: *Jak mama kupiła parzystą liczbę, to tata też parzystą, a jak mama nieparzystą, to tata też nieparzystą.*
Ja: *Dlaczego tak jest?*

Tyberiusz wyjaśnił, że liczby są o 2 większe, tak jak parzyste i nieparzyste np. 1, 3, 5, 7,…, 2, 4, 6, 8,… Zauważył również, że gdy dodamy wagę owoców mamy i wagę owoców taty, to zawsze wynikiem jest liczba parzysta.
Ja: *Jak możemy to powiedzieć językiem matematycznym?*
Igor P.: *Jak dodamy dwie liczby parzyste lub dwie nieparzyste, to zawsze suma jest parzysta.*
Dominik: *Suma jest nieparzysta, gdy parzystą dodamy do nieparzystej.*

Cały tydzień zajęły nam zadania z wagą i obliczenia w kilogramach, dekagramach czy gramach. Dzieci ogromnie lubią lekcje tego typu: ważenie, mierzenie, układanie, manipulowanie. Z lekcji na lekcję coraz swobodniej posługiwały się wagą i dokonywały obliczeń. Utrwaliły też pojęcia: brutto, netto, tara.

Na wiosnę wróciliśmy do zadań z wagą: ważyliśmy plecaki, ale mieliśmy niewiele odważników, o łącznej wadze 2,5 kg.
Ja: *Co zrobić, żeby zważyć plecaki, które ważą więcej niż 2,5 kg?*
Hugo: *Pożyczyć odważniki.*
Ja: *Nie mamy skąd.*
Miłosz: *Zważyć jakiś przedmiot i on może być odważnikiem.*
Hugo: *Mogę dać swoje książki.*
Igor K.: *Może mój piórnik?*
Wiktoria: *A może napełnić wodą butelki?* I pokazała swoją butelkę od napoju.
Ja: *Mamy tu akurat butelki 1 l, jak myślicie, ile waży 1 l wody?*

Dzieci mówiły, że 1 kg, pół kg, więcej niż 1 kg, mniej. Zważyliśmy więc. Doszedł nam odważnik 1 kg. Ważyliśmy plecaki po szacowaniu ich wagi: każdy podawał wagę swojego plecaka, a potem ważył go. Okazało się, że najcięższy plecak ważył 4,6 kg, a najlżejszy: 2,6 kg. Przy okazji uczyliśmy się zamiany gramów na dekagramy i kilogramy. To było trudne, na początku dla wielu zbyt trudne, ale potem było coraz lepiej. Porównywaliśmy, dodawaliśmy, odejmowaliśmy. Niektóre dzieci nie miały pojęcia, ile to jest 1 kg. Brały do ręki napełnioną litrową butelkę i „czuły" ten ciężar.

(Mała dygresja w tym miejscu: otóż zawsze, gdy przejeżdżamy autokarem przez most na Wiśle w Bydgoszczy, podaję dzieciom informację, że ten most ma długość 1 km i proszę, aby podczas jazdy nie odzywały się, ale „przeżyły" ten 1 km, spróbowały go odczuć).

Ważenie bez odważników

Przygotowałam różne materiały: fasolę, kubeczki, miseczki i różne pojemniki jednakowej wielkości i zapowiedziałam, że będziemy ważyć bez odważników. Dzieci były zdziwione, ale zaraz odezwał się Miłosz, że mamy przecież jeden odważnik, czyli wczorajszą butelkę 1 l. Zważyliśmy fasolę, żeby utwierdzić się w przekonaniu, że jest jej 1 kg.

Na tablicy napisaliśmy 1 kg = 100 dag = 1000 g, aby łatwiej było przeliczać jednostki wagi. Moje pierwsze pytanie brzmiało: Jak zważyć pół kilograma fasoli?


Amelka: *Wziąć pół litra wody i zważyć fasolkę.*

Dzieci od razu przypomniały Amelce, że nie mamy przecież używać odważników.

Hugo: *Przesypać fasolkę do drugiego pojemnika aż będzie po równo.*

Maja zapisała na tablicy 100 dag : 2 = 50 dag.

Ja: *Jak zważyć 25 dag fasoli?*

Igor P.: *Podzielić na 4 miski po równo.*

Miłosz zapisał 100 dag : 4 = 25 dag.

Adrian zapisał to samo inaczej: 1000 g : 4 = 250 g.

Ja: *Czy w tych 4 pojemnikach jest na pewno po równo?*

Adrian: *Trzeba sprawdzić.*

I razem z Hugonem zważyli, kładąc na wadze po jednym pojemniku i porównując, przesypując, aż było w każdym tyle samo.

Zadałam kolejne pytanie: *Jak zważyć 10 dag fasolki?*

Mateusz: *Wyjąć 10 kubeczków i rozłożyć fasolę po równo.*

Chłopiec zważył, a Amelia zapisała 1000 g : 10 = 100 g.

Ja: *Jak inaczej zważyć 10 dag?*

Hugo: *Z jednego pojemnika, gdzie jest 25 dag, podzielić na pół.*

Ja: *To ile będzie w każdym?*

Miłosz: *Będzie 12 i pół, a nie 10.*

Adrian: *Można wziąć pół kg i rozsypać do 5 kubeczków i w każdym będzie 10 dag.*

Ja: *Jak jeszcze inaczej można odważyć 10 dag?*

Na razie nie było innych pomysłów, więc spytałam: *Jak zważyć 20 dag?*

Dominik: *Kilogram podzielić na 5 pojemników.*

Maja zapisała: 1000 g : 5 = 20 g, a Miłosz dopisał 100 dag : 5 = 20 dag.

Ja: *Ponawiam pytanie – jak jeszcze inaczej zważyć 10 dag?*

Kinga: *Podzielić na dwa jeden pojemnik, gdzie jest 20 dag.*

Kacper K. zapisał: 20 dag : 2 = 10 dag.

Ja: *Jak zważyć 30 dag?*

Amelia: *Do 20 dodać 10.*

Podeszła do wagi i położyła na jednej szali 20, a na drugiej 10 dag, pomyślała i zmieniła zdanie, tzn. na jednej szali położyła 20 i 10 dag, a na drugiej też 20 i 10 dag. Do końca nie była pewna, czy wykonała zadanie poprawnie.

Ja: *Co wy na to?*

Maja: *Właściwie jest dobrze, bo na każdej szali jest 30 dag, ale Amelka podzieliła 60 dag na 2.* Zapisała na tablicy 60 dag : 2 = 30 dag.

Igor P.: *Można rozdzielić 3 kubeczki, gdzie jest po 10 dag, postawić po jednej stronie, a na drugiej stronie pojemniki z 20 dag i 10 dag.*

Ja: *Co jeszcze proponujecie do obliczenia i zważenia?*

Dominik: *Znaleźć 70 dag.*

Miłosz podszedł do wagi i zaczął ważyć. W 2 pojemnikach było po 30 dag, postawił je na wadze po obu stronach. Wziął 10 dag w kubeczku, rozsypał po równo, aby mieć po 5 dag, podosypywał do 30 dag i mając 35 dag po każdej stronie, zdjął z wagi i powiedział, że to jest 70 dag razem.

Dominik: *Jak mamy 30 dag w pojemniku i dodamy całą resztę do 1 kg, to będzie właśnie to 70 dag.*

Zapisał: 100 dag – 30 dag = 70 dag.

Spytałam: *Czego nauczyliście się na dzisiejszej lekcji?*

Igor P.: *Że można ważyć bez odważników, są niepotrzebne.*

Miłosz: *Dzieliliśmy, odejmowaliśmy…*

Maja: *Ważenie to w ogóle dobra zabawa, a nie nauka.*

Z coraz większą łatwością uczniowie posługiwali się wagą na tej lekcji, a najbardziej zdziwiło mnie to, że wielu uczniów bez kłopotów przeliczało w gramach lub dekagramach, zamiennie i swobodnie. Są jeszcze tacy uczniowie, którzy mają kłopoty z zamianą jednostek, dla których ważenie wcale nie jest proste, ale i oni podchodzą do lekcji tego typu coraz chętniej i odważniej. Dla mnie to także nowe doświadczenie, gdyż wcześniej nie poświęcałam zadaniom z ważeniem tak wiele uwagi, jak w tym roku. To był błąd, gdyż ważąc, dzieci uczą się wielu rzeczy, dzielą się nawzajem swoimi spostrzeżeniami, wiedzą, pomysłami. Zadania są ciekawe, różnorodne, wymyślane przez same dzieci.

Bardzo często pracuję z dziećmi w grupach. Uważam, że jest to świetna forma pracy, wpływająca korzystnie na każdego członka zespołu, ucząca współpracy, pomagająca uczyć się wzajemnie od siebie, sprzyjająca argumentowaniu i budowaniu struktury wiedzy. Tym razem chciałam sprawdzić, jak moi uczniowie poradzą sobie z obliczeniami pieniężnymi.

Obliczenia pieniężne

Rozpoczęłam jesienią, od łatwiejszego zadania.

Zadanie z ubrankami dla dzieci

Uczniowie mieli do wykonania zadanie w małych zespołach. Należało, dysponując określoną kwotą, wybrać ubrania dla chłopca lub dziewczynki, ubrać postać i dokonać obliczeń. Zadanie nie sprawiło kłopotów. Każda grupa dokonała zakupów w granicach przydzielonej kwoty: niektórzy wydali dokładnie tyle, ile należało, inni mniej. Obliczenia były różnorodne: jedni dodali wszystkie ceny i obliczyli sumę, inni odejmowali od danej kwoty kolejne ceny, aż do pozostawienia niewielkiej lub zerowej reszty. Działania zapisywane były w jednym lub wielu zapisach. Wszystkie grupy wykonały zadanie prawidłowo.

Kupowanie prezentów pod choinkę

Tuż przed świętami Bożego Narodzenia dzieci pracując w zespołach, otrzymały inne zadanie. Wykorzystując gazetki reklamowe, dzieci wybierały produkty, które mogłyby być prezentami. I tak, jedna grupa kupowała dla babci i dziadka, druga dla cioci i wujka, trzecia dla mamy i taty, a czwarta dla siostry i brata. Każda grupa miała do wykorzystania 100 zł i w całości tyle powinna wydać. Ustaliliśmy, że jeżeli towar kosztuje np. 3 zł 99 gr, to jeśli grupa chce, może zaokrąglić cenę do 4 zł. Powstały m.in. takie prace:

Na tablicy powiesiliśmy prace i zaczęliśmy je omawiać. Oto niektóre wypowiedzi uczniów:
Igor K.: *100 zł rozbiliśmy na różne sposoby.*
Igor P.: *Składniki są inne, a suma taka sama.*
Kinga: *Dużo można zrobić takich przykładów, więcej niż zrobiliśmy.*
Miłosz: *Jak jeden prezent kosztował nieparzyście, to drugi też.*
Wiktoria: *Jak ciocia ma więcej, to wujek ma mniej.*
Kamil: *Jak jeden składnik jest mniejszy, to drugi większy.*
Dominika: *Możemy policzyć, kto dostał więcej i o ile* (obliczaliśmy w pamięci różnice).
Patrycja: *Jak jeden składnik jest z groszami, to drugi też.*

Przygotowywanie past na kanapki

Podzieliłam klasę na zespoły czteroosobowe. Każdy zespół miał do wykonania inną pastę. Najpierw zapisaliśmy składniki (każda grupa swoje), następnie uczniowie w grupach przeglądali gazetki reklamowe, aby wybrać dwa sklepy, w których najtaniej można dokonać zakupów. Kolejnym zadaniem było obliczenie, ile będą kosztowały produkty na wykonanie pasty, jeśli dokonamy zakupów w wybranych sklepach.

Po wykonaniu przez dzieci obliczeń wypisałam na tablicy koszty zakupów każdej grupy.
Ja: *Jakie kłopoty napotkaliście, tworząc listę zakupów?*
Kamil: *Nie wszystkie produkty można było znaleźć.*
Miłosz: *Obliczenie, ile kosztuje 30 dag sera, gdy znaliśmy cenę 1 kg.*
Kacper K.: *Cena 1 jajka.*
Patrycja: *Co się bardziej opłaca, czy kupić duży jogurt w promocji, czy mały w normalnej cenie* (same dzieci doszły do wniosku, że mały lepiej kupić, bo potrzebujemy tylko 1 łyżkę).
Ja: *Jak myślicie, co wpłynęło na to, że w jednym sklepie są tańsze zakupy, a w drugim droższe?*
Maja: *W Tesco była promocja!*
Monika: *Zbyt duże opakowania kupili, które były droższe.*
Igor K.: *Grupa, która wykona pastę rybną, zapłaci więcej, bo makrela jest droga.*
Ja: *Jakie pytania możemy zadać do tego, co mamy na tablicy?*
Kamil: *Jakie są różnice między wynikami?*
Kacper B.: *Która grupa wyda najwięcej, a która najmniej i o ile?*

Dokonywaliśmy tych obliczeń pamięciowo. Wspólnie obliczyliśmy cenę 1 jajka w różnych przypadkach i 30 dag sera żółtego (z moją pomocą). Następnego dnia uczniowie przynieśli potrzebne produkty i wykonali pasty kanapkowe.

Ważenie, mierzenie, obliczenia pieniężne są bliskie dzieciom, spotykają się z nimi w życiu codziennym, dlatego trudności, jakie się pojawiają, są związane zazwyczaj z rachunkami. Tematy te sprawiają, że uczniowie podchodzą do zadań odważniej, mają ochotę dyskutować, angażują się bardziej w rozwiązywanie problemów.

Praca w grupach pozwoliła dzieciom na spieranie się, argumentowanie, podsuwanie swoich pomysłów i wyjaśnianie ich znaczenia dla końcowego efektu. Każdy był zaangażowany w wykonanie zadania, każdy był ważny. A jeśli jeszcze taka praca kończy się pysznym poczęstunkiem, jak to było w przypadku past kanapkowych, to już jest sama radość.

Mniej bliskim dzieciom tematem były sekwencje. Obawiałam się, czy moi uczniowie będą zauważać reguły, prawidłowości tkwiące w sekwencjach, jak sobie z nimi poradzą. Zaczęłam to sprawdzać w połowie roku szkolnego.

Rytmy, sekwencje, prawidłowości

Narysowałam na tablicy sekwencję znaków:

∆ O ∆ O ∆ O ∆ O ∆ O ∆ O ∆ O ∆ O ∆

Ja: *Czy widzicie w tym rysunku jakieś prawidłowości?*
Kacper B.: *Figury powtarzają się co 2.*
Dominika: *Jest co drugie koło i co drugi trójkąt.*
Kinga: *Są liczby parzyste i nieparzyste.*
Ja: *Wytłumacz, jak to rozumiesz.*
Kinga: *Kółko to zawsze liczba parzysta: 2, 4, 6, 8,..., a trójkąt to zawsze nieparzysta: 1, 3, 5, 7, 9,…*
Ja: *Skoro tak, to jaka figura będzie na miejscu 17? A jaka na 25? A na 237? Dlaczego?*

Dzieci bezbłędnie określały rodzaj figury. Mówiły, że jak w jednościach jest nieparzysta, to cała liczba jest też nieparzysta i podobnie jest z parzystymi.

Na tablicy pojawił się kolejny rytm:

\+ O ∆ + O ∆+ O ∆ + O ∆ + O ∆ + O ∆+ O ∆ + O ∆ +

Ja: *Jakie tu widać prawidłowości?*
Kinga: O jest co 3, + jest co 3, ∆ też jest co 3.
Ja: *Jaka figura jest na miejscu 7? Na którym miejscu jest piąte kółko? Jaka figura jest na miejscu 27? Na którym miejscu jest jedenasty +? Jak to obliczaliście?*
Igor P.: *Liczyłem po kolei, doszedłem do końca i dalej od początku.*
Dominik: *Ale to nie tak, bo za + powinno być O, a ty masz znowu +!*

Igor zastanowił się i musiał podejść do tablicy, aby to sprawdzić. Przeważnie dzieci liczyły po kolei. Gubiły się, gdy podałam dalsze miejsca znaków np. 44. Postanowiłam zapisać kolejne miejsca znaków.

\+ 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
O 2, 5, 8, 11

W tym momencie Tyberiusz zauważył, że liczby dolnego rzędu są o 1 większe od górnego i nie trzeba liczyć, tylko pisać liczbę o 1 większą.

Δ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

Dominika: *Te liczby dla Δ są jak w mnożeniu przez 3.*
Igor P.: *W pionie liczby są po kolei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, …*

Kolejny rysunek i pytania podobne jak poprzednio:

□¤ O Δ ↑ ¤ O Δ ↑ ¤ O Δ ↑ ¤ O Δ ↑ ¤ O Δ ↑ ¤ O Δ ↑ ¤ O

Hugo dodał, że ↑ są na miejscu 4, 8, 12, 16, 20, 24 i te liczby wszystkie są parzyste.
Kinga: To jest mnożenie razy 4.
Następnie dzieci same wymyślały i rysowały swoje rytmy złożone z 4 lub 5 powtarzających się znaków, obrazków, liter itp. Zastanawiały się, co będzie dalej i wyjaśniały, skąd to wiedzą, gdy podchodziłam do ławek i pytałam.
Na koniec lekcji rysunek i pytanie: *Czy tu jest jakaś prawidłowość?*

O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑ O ↑ ♥ ↑

Wiktoria powiedziała, że jest błąd, ale nie potrafiła wytłumaczyć jaki, coś jej nie pasowało.
Hugo: *Powtarzają się strzałki co 2 pole. Jest 2, 4, 6, 8,…*
Maja pokazała, że powtarza się O ↑ ♥ ↑.
Amelka: O i ♥ są co 4.

Sekwencje w grupach

Na kolejnej lekcji były sekwencje działań. Uczniowie pracowali w zespołach trzy-, czteroosobowych, zapisywali kolejne działania. Każdy zespół miał inne zadanie.

Zespół I:
16 + 12 = 28
15 + 12 = 27
14 + 12 = 26
13 + 12 = 25

Monika: *Jak pierwsza liczba zmienia się o 1, a druga się nie zmienia, to wynik też zmienia się o 1, tzn. zmniejsza.*
Ja: *Co będzie po działaniu 0 + 12?*
Igor P.: *Będzie 0 + 11.*
Dominik: *Nie może tak być. Przecież 12 się nie zmienia.*
Dominika: *Będzie chyba –1 + 12, –2 + 12.*

Zespół II:
16 + 12 = 28
16 + 13 = 29
16 + 14 = 30
16 + 15 = 31

Maja: *Suma jest coraz większa, gdy drugi składnik jest też coraz większy.*
Kinga: *Zwiększa się o tyle samo, co drugi składnik, tu o 1.*

Zespół III:
16 + 12 = 28
17 + 13 = 30
18 + 14 = 32
19 + 15 = 34

Dzieci wyjaśniały podobnie jak poprzednio:
Amelka: *tu widać, że nieparzysta + nieparzysta, to jest parzysta.*
Maja: *Gdy obie liczby zwiększają się o 1, to wynik jest większy o 2.*

Zespół IV 16 + 12 = 28 15 + 13 = 28 14 + 14 = 28 13 + 15 = 28	Dzieci zauważyły, że wynik się nie zmienia, gdy jeden składnik rośnie, a drugi maleje. Nie umiały jednak na początku powiedzieć, dlaczego tak się dzieje. W pewnej chwili Miłosz zauważył, że pierwsza liczba maleje o tyle samo, co druga rośnie i dlatego wynik jest wciąż 28. Podobnie Kinga powiedziała, że wynik nie zmienia się wtedy, gdy jeden składnik rośnie, a drugi maleje o tyle samo.

Uczniowie z trudem zauważali prawidłowości i reguły, być może dlatego, że zetknęli się z takimi zadaniami dopiero w klasie trzeciej. Postanowiłam, że gdy będę uczyła w 1 klasie, zajmę się sekwencjami i rytmami znacznie wcześniej.

Żywe liczby

Najpierw bawiłam się w żywe liczby z dziećmi z mojej klasy 3.

Zabawa polega na tym, że każdy uczestnik jest liczbą (są to kolejne liczby od 1 do tylu, ile jest osób; im więcej, tym lepiej; liczby są zawieszone lub przypięte w widocznym miejscu na osobie), a prowadzący wydaje polecenia dotyczące ustawiania się liczb.

Moje były następujące: złap za rękę liczbę o 1 większą od ciebie; złap za rękę liczbę o 2 mniejszą od ciebie; weź za rękę liczbę o 4 większą od ciebie; znajdź liczbę, która z tobą utworzy liczbę parzystą; znajdź liczbę, która z twoją będzie tworzyć sumę 20. Z czasem polecenia mogą dotyczyć coraz trudniejszych działań, nadają się też dla klas starszych.

Dzieci ustawiały się i tworzyły szeregi, o których następnie rozmawialiśmy:

- Hugo zauważył, że tu jest podobnie, jak w rytmach, liczby podobnie się układają.
- Dominika zauważyła wielokrotności liczby 3, gdy dzieci szukały liczby o 3 większej.
- Wielokrotności 2, 4, 5 widział Tyberiusz odpowiednio w ustawieniach co 2, 4, 5.
- Wiktoria wyjaśniła, że w liczbach o 2 mniejszych powstały liczby parzyste w jednym szeregu i nieparzyste w drugim, bo same są co dwa.
- Najwięcej prawidłowości uczniowie zauważyli w sekwencjach co 5:

1, 6, 11, 16, 21, 26 2, 7, 12, 17, 22, 27 3, 8, 13, 18, 23, 28 4, 9, 14, 19, 24, 29

W tym dniu nie mogliśmy wykonać już więcej zadań, ale ogromnie ucieszyło mnie zdanie Hugona, który zauważył związek jednej lekcji z drugą.

Następne spotkanie z „żywymi liczbami" odbyło się 3 tygodnie później. Gościliśmy klasę 2 b (klasę siedmiolatków). Mimo, że dzieci były o 2 lata młodsze, zauważały wiele – a co ciekawe, widziały inne prawidłowości niż trzecioklasiści. Np. był jeden szereg, gdy dzieci szukały liczby o 1 większej, 2 szeregi, gdy szukały liczby o 2 mniejsze, 5 szeregów, gdy szukały liczby o 5 większej. Dostrzegały liczby parzyste i nieparzyste. Na pytanie, dlaczego w trzech szeregach liczb zwiększanych o 3 są na zmianę liczby parzyste i nieparzyste, drugoklasista wyjaśnił, że „3 jest nieparzyste i raz daje liczbę parzystą, a raz nieparzystą". Dzieci umiały też podać, w jakim szeregu będzie podana przeze mnie duża liczba, gdy była sekwencja „piątkowa", np. liczba 286 będzie tam, gdzie 1, a liczba 788 – tam gdzie 3. Młodsze dzieci na początku były spłoszone i nieśmiałe, ale gdy kilkoro ich kolegów zaczęło dawać prawidłowe odpowiedzi, inni też zaczynali chętniej i odważniej pracować. Starsze dzieci bardzo pomagały młodszym szukać miejsca w szeregu, jeśli nie mogły się odnaleźć, było to spontaniczne i miłe.

Podsumowanie

W ciągu całego roku szkolnego obserwowałam moich trzecioklasistów, jak rozwijają się na lekcjach matematyki. Coraz chętniej i odważniej podchodzili do nowych i niełatwych zadań czy problemów. Te dzieci, które wcześniej nie miały wiele do powiedzenia, bo słabo liczyły, teraz wykazywały się spostrzegawczością, ciekawymi pomysłami i zainteresowaniem matematyką, a nie tylko bojaźnią przed nią. Zdolniejsze rozwinęły skrzydła. Często słyszałam zdania typu: *Ciekawe, co dzisiaj będziemy robili?, O, znowu coś nowego!, Ale fajnie!*.

Przekonałam się, że dzięki moim pytaniom *Dlaczego?, Jak to obliczyłeś?, Dlaczego to rozwiązanie jest dobre?, Co zauważyliście?* skłaniałam dzieci do myślenia, przekonywania siebie i innych do swoich racji, uzasadniania wypowiedzi, argumentowania. Po roku innej pracy na lekcjach matematyki wiem, że dzieci lepiej ją rozumieją, gdy same poszukują rozwiązań, dyskutują, dociekają, nawet jeśli to trwa dłużej niż przewidywaliśmy. Nauczyłam się obserwowania i słuchania uczniów. Nie spieszę się, daję im więcej czasu na myślenie i działanie. Karty pracy zaczynają mi przeszkadzać, bo ograniczają moje i dzieci pomysły oraz możliwości. Wykorzystuję na każdej lekcji różnorodne pomoce dydaktyczne, ale takie, które służą manipulowaniu, pomagają przemyśleć i rozwiązać zadanie, rozwijają zdolność logicznego myślenia, a nie tylko ćwiczą sprawność rachunkową. Wiem, że dzieci potrafią więcej niż myślimy, co udowodniły w ciągu tego roku szkolnego.

Przeprowadziłam wśród swoich uczniów ankietę, z której wynika, że:

- najbardziej lubiły ważyć i mierzyć,
- bardzo polubiły „żywe liczby",
- nie lubiły kart pracy,
- dla wielu uczniów ulubione zadania to gry, sekwencje, problemy z klockami,
- w rozwiązywaniu zadań najbardziej pomagały im:
  - rysunek (sporo z nich uznało, że warto wykonać go zamiast zapisywania danych),
  - liczenie na konkretach,
  - zapis działania,
- zdecydowanie najwięcej dzieci najchętniej pracuje w parach lub zespołowo.

Na pytanie, co sądzisz o lekcjach matematyki w tym roku, najczęściej padały następujące odpowiedzi:

- lubię gry matematyczne,
- matematyka jest łatwa i zabawna,
- matematyka jest fajna,
- nie lubię kart pracy,
- żeby w 4 klasie było jak w 3 na matematyce.

Widzę głęboki sens pracy z dziećmi bez kart pracy, za to wsłuchując się w ich pomysły, sugestie, poskramiając swoją przemożną chęć powiedzenia im wszystkiego, a pozwalając na samodzielne odkrywanie, zauważanie, wnioskowanie, spieranie się, przekonywanie.

One to naprawdę potrafią!!!

Violetta Majewicz
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej w Szkole Podstawowej nr 56 w Bydgoszczy, w zawodzie 27 lat.

Czy układanie matematycznych zagadek jest trudne? Wykorzystanie różnorodnych wiadomości matematycznych do układania zagadek

Zagadki pod hasłem *Jaki to numer mieszkania?* i *Jaka to liczba?* były kontynuacją podobnych propozycji, które pojawiły się w naszych podręcznikach. Dzieci bardzo polubiły te zagadki. Wykorzystałam ten fakt i wspólnie zaczęliśmy myśleć nad zagadkami. Okazało się, że motywacja do pracy narastała w miarę upływu czasu, bo dzieci wzajemnie pragnęły zaskoczyć innych taką zagadką, która będzie trudna do rozwiązania. W związku z tym poszukiwały takich treści, reguł, wiadomości i, jak to określiły, *naszych matematyczności*, po które nikt inny jeszcze nie sięgnął. Jestem przekonana, że gdybym zrobiła tradycyjną powtórkę i pytała o wszystkie zagadnienia, które zawarli w zagadkach, nigdy bym tego nie osiągnęła.

Zagadki pod tytułem *Licz jak Eskimos* to naturalna konsekwencja zagadek, które przedstawił główny bohater lektury Aliny i Czesława Centkiewiczów „Anaruk, chłopiec z Grenlandii". Uczniów bardzo zainteresowała książka ze względu na zupełnie inne obyczaje, a rachunki różniły się na tyle, że najpierw długo rozszyfrowaliśmy sam sposób obliczeń. Kiedy tego dokonaliśmy, układaliśmy swoje.

Jaki to numer?	Jaka to liczba?	Licz, jak Eskimos
Jakub: Numer mojego mieszkania to iloczyn 8 i 10. Jaki może być numer mieszkania Roberta, jeżeli ja mieszkam na 3, on na 5 piętrze, a na jednej kondygnacji są 3 mieszkania? **Kacper:** Mój numer mieszkania to 4 najmniejsze cyfry nieparzyste, a jednocześnie 2 najmniejsze liczby dwucyfrowe nieparzyste. **Mariam:** Numer tego mieszkania ma 3 cyfry. Dwie pierwsze to iloczyn 9 i 6. Ostatnia to najmniejsza jednocyfrowa. Robert: Numer mojego mieszkania to trzecia kolejna dwucyfrowa liczba parzysta. **Agata:** Numer mieszkania jest między 60 a 70. Jest to liczba parzysta składająca się z dwóch identycznych cyfr.	**Kacper:** Jeżeli dodasz do 82926 liczbę, o której myślę, otrzymasz 92926. Jaka to liczba? **Mariam:** Jeżeli moją liczbę podzielę przez 5, pomnożę przez 5, podzielę przez 5, pomnożę przez 5, podzielę przez 5, to otrzymam 5. Jaka to liczba? **Ada:** Jeżeli do tej liczby dodam 1000, dodam 4000, odejmę 100, 50, 50, 20, 20, 20, 20, 20, 500, 50, 100, 50, 1000, 500, 500, 1000, 500, 500 to otrzymam 1. Jaka to liczba? **Bruno:** Jeżeli do 20 dodasz liczbę 2 razy większą niż 40, otrzymasz liczbę, o której myślę. **Misia:** Jeżeli do liczby wszystkich miesięcy dodasz liczbę, o której myślę, otrzymasz 100. Jaka to liczba?. **Agata:** Gdy pomnożysz tę liczbę przez 1, 23, 67, to otrzymasz 0. Jaka to liczba?	Sposób liczenia Eskimosów: - 1 ręka: 5 - czwarty palec jednej ręki: 4 - trzeci palec drugiej ręki: 8 - drugi palec jednej nogi: 12 - czwarty palec drugiej nogi: 19 - cały człowiek: 20. **Julia:** Trzeci palec jednej nogi dodać trzeci palec drugiej nogi. **Ania:** Cały człowiek dodać drugi palec jednej nogi. **Kuba:** Trzeci palec jednej ręki razy czwarty palec drugiej ręki. **Karolina:** Pierwszy palec drugiej ręki trzeciego człowieka podziel przez pierwszy palec jednej ręki. **Łukasz:** Czwarty palec drugiej ręki piątego człowieka minus trzeci palec drugiej nogi drugiego człowieka. **Ada:** Ilu ludzi potrzebuję, żeby powstała liczba 38?

CZY MATEMATYKA NAM POMAGA? O STOSOWANIU WIEDZY MATEMATYCZNEJ W NOWYCH SYTUACJACH PRZEZ UCZNIÓW KLAS I–III MOJA MATEMATYKA

Ewa Kapczyńska

Siedemnaście spośród osiemnastu lat pracy z moimi kolejnymi uczniami odkrywałam, doświadczałam, pozwalałam eksperymentować, podróżować własnymi ścieżkami na wszystkich zajęciach oprócz matematyki. Byłam przekonana, że matematyka to nie miejsce na kreatywność, inicjatywę dzieci. Prowadziłam wszystkie kolejne zajęcia, zgodne z programem i z przygotowanym planem. Tylko ja znałam tę jedyną właściwą drogę dojścia do rozwiązania. Przygotowując się do zajęć, rozwiązywałam wszystkie zadania, żeby na lekcji nie tracić czasu na wspólne dochodzenie do celu czy choćby refleksję nad dziecięcym pomysłem. I znów ja:

- przedstawiałam,
- prezentowałam,
- pokazywałam,
- prowadziłam za rękę,
- wskazywałam,
- pytałam, jednocześnie odpowiadając,
- sprowadzałam na tę jedyną prawidłową drogę,
- preferowałam pracę indywidualną,
- sprawdzałam wynik, nie słuchając wyjaśnień,
- szłam zaplanowaną drogą, nie zważając na reakcje dzieci, ich ciekawość czegoś, czego nie dotyczył mój scenariusz.

To naprawdę była moja matematyka, na której – dziś mogę to szczerze powiedzieć – po prostu wiało nudą. Nowych sytuacji nie było. Wszystko przecież zaplanowałam. Najgorsze jest to, że nie budziło to mojego niepokoju. Brakowało mi świadomości, że matematyka może mieć inne oblicze.

Ile potrzebujemy taśmy? Mierzenie obwodów

Niewiarygodne, jak prozaiczna czynność przyczyniła się do powstania sytuacji, która wyznaczyła dalszy bieg zajęć poświęconych mierzeniu i obliczaniu obwodów. Chcieliśmy oznaczyć grupy poprzez oklejenie obwodów stołów różnokolorowymi taśmami. Tę informację przekazałam dzieciom i poprosiłam, aby zmierzyły, ile potrzebują okleiny.

Karolina, Nikodem i Bruno potrzebowali kilku miar i wielu rąk, żeby wykonać to zadanie. Poprosili o pomoc panią Annę, bo nie miał *kto trzymać już tych początków i końców*. Ta sytuacja nie trwała długo, bo po chwili wpadli na sposób, o którym opowiada Bruno: *Teraz zrobiliśmy to nową metodą. Najpierw rozciągnęliśmy miarę na 100 centymetrów. Przyłożyliśmy do stołu. Tam, gdzie było 100 centymetrów, trzymaliśmy palec. Później znów zrobiliśmy od zera do 100. Potem było już tylko 14. Wystarczyła nam tylko jedna miarka, a my już wiedzieliśmy, że 100 i 100 i 14 to 214 cm, czyli 2 metry, bo dwie całe miarki i 14 cm.*

Dla Agaty, Michaliny, Mariam i Agaty obwodem stołu był zupełnie inny wymiar – zmierzyły obwód stołu tak, jak obwód własnego brzucha. Owinęły miarą stół wokoło od spodu do góry. Pierwsza moja myśl: źle. Po zastanowieniu: czemu nie? Dałam sobie czas na przemyślenie wszystkich dziecięcych propozycji i umówiłam się na ich omówienie dnia następnego. Muszę przyznać, że długo myślałam nad propozycją dziewczynek, nim doszłam do wniosku, że ta sytuacja jest warta dyskusji, że mogę dzieciom pokazać, że każdy ma prawo myśleć inaczej, że blat stołu ma więcej niż jeden obwód. Nawet się nie zdziwiłam, kiedy idąc rano na dyżur , już usłyszałam: *I co, nasz obwód jest dobry?* (Agata). Nie potrzebowałam scenariusza tego dnia, bo cały czas poświęciliśmy na mierzenie i obliczanie obwodów, przedtem wyjaśniając sobie, że to co zmierzyły dziewczyny, to też jest obwód stołu.

Czy duże może zmieścić się w małym? Miary objętości

Czy bardzo duży pęk waty zmieści się w pudełku po zapałkach?
Czy, w takim samym pudełku, zmieści się mały drewniany klocek?

Segregując klocki, kierowaliśmy się zasadą: małe do małego pudełka, duże do dużego. Przez chwilę pomyślałam sobie, że to dobry moment, aby uświadomić dzieciom, że duże też może zmieścić się w małym, a małe nie zawsze się tam wciśnie.


Julia: *Watę da się włożyć, pomimo że jest większa od samego pudełka, bo można ją zgnieść. Wtedy zrobi się mała. Klocka nie da się zmniejszyć, zgnieść, dlatego jego nie da się włożyć.*
Bruno: *Wata jest podobna do wody. Robi się taka, jak pozwala jej naczynie, w którym się znajdzie. Przybiera jego kształt.*
Michalina: *Szkoda, że pudełko się nie rozciąga, wtedy można byłoby więcej do niego zmieścić.*
Karolina (prawa fotografia): *Mi się klocek zmieścił, ale trochę oszukałam, bo podniosłam do góry górną przykrywkę.*

Z podziwem słuchałam tych wypowiedzi. Uczniowie wiedzieli, że niektóre obiekty zmieniały swą objętość, zmniejszały się (wata), a inne nie. Uśmiechnęłam się przy rozwiązaniu Karoliny. W końcu, nie siedziała bezradna, tylko wykorzystała swój pomysł, choć nie wszyscy uczestnicy grupy go zaakceptowali.

Jak sprawdzić, co jest cięższe, nie mając wagi? Ważenie

Mając do dyspozycji woreczek foliowy, gumkę recepturkę i spinacz, zważ jabłko, farbki i monety.

Dokładnie tak rozpoczęłam jedną z lekcji. Nic więcej nie tłumaczyłam. Zaufałam uczniom. Wiedziałam, że coś wymyślą. Pomysłów było bardzo dużo. Nie wszystkie dobre, ale ich skuteczność od razu była weryfikowana przez praktykę.

Saamer od początku, z wielkim zaangażowaniem, podejmował kolejne próby. Zauważyłam, że nieudane wcale go nie zniechęcały. Sama aktywność dawała mu dużo satysfakcji. Jego dociekliwość doprowadziła do efektu, który usatysfakcjonował jego i przekonał pozostałe dzieci. Saamer: *Mnie się udało zważyć. Na spinaczu powiesiłem gumkę, na której zaczepiłem woreczek. Do niego wkładałem ważone rzeczy. Patrzyłem na gumkę. Jeżeli rozciągała się mocno, to znaczyło, że coś jest ciężkie, jeżeli mniej, to oznaczało, że jest to lżejsze. Teraz mogę powiedzieć, że najlżejsze były monety, a najcięższe jabłko.*

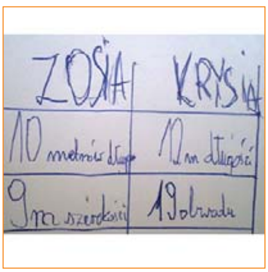
Kolejnym etapem zajęć było porównywanie wagi różnych przedmiotów. Biorąc pod uwagę doświadczenia Saamera, dzieci mierzyły długość rozciągniętej podczas ważenia gumki. Potem przyłożyły swoją wagę do ściany i na niej zaznaczały wyniki pomiaru. Drugi sposób oceniły jako bardziej wiarygodny, bo gumka, kiedy ją mierzyły, nie zawsze zachowywała się grzecznie. Na koniec swoje pomiary weryfikowaliśmy za pomocą wagi kuchennej. Uczniowie dostrzegli, że jest dokładniejsza, ale nie zawsze ją mamy, a gumkę raczej tak.

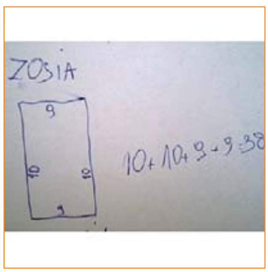
Czy można to obliczyć? Obliczanie obwodu w zadaniu tekstowym

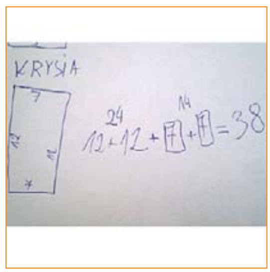
Zadanie: ***Ogród Zosi ma długość 10 metrów i szerokość 9 metrów. Ogród Krysi ma 12 metrów długości. Jaką szerokość ma ogród Krysi, jeśli jego obwód jest taki sam jak obwód ogrodu Zosi?***[1]
Sposób Mariam:

[1] Zadanie zaczerpnęłam z ćwiczeń do matematyki klasy trzeciej „Już w szkole", wydawnictwa Nowa Era.

Dziewczynka z przekonaniem prezentowała kolejne etapy rozwiązania zadania. Inne dzieci rozumiały tę metodę i chętnie podpowiadały następne kroki.
Sposób Karoliny:





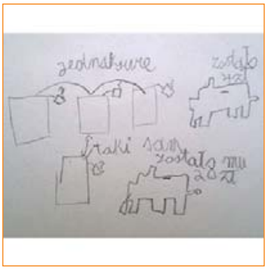


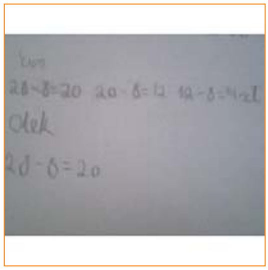
Moje zainterosowanie wzbudziły wpisane w tabelę dane, a właściwie jedna. Przy pomiarach Krysi: *19 obwodu*. Poproszona o wyjaśnienie Karolcia, odpowiedziała: *Obwód ogrodu Zosi wynosi 38 metrów, Krysi jest taki sam, też 38 metrów, a więc jego połowa to 19 metrów. Skoro połowa ma 19 metrów, długość 12, to ile brakuje do 12, żeby było 19. Tak wymyśliłam, że szerokość to 7 metrów*. Po chwili dodała: *Niepotrzebnie się tyle napracowałam, przecież nie musiałam obliczać obwodu ogrodu Krysi. On był taki sam, jak Zosi, a ja się dodatkowo męczyłam.*

Czy można to rozwiązać? Obliczenia pieniężne w zadaniach tekstowych

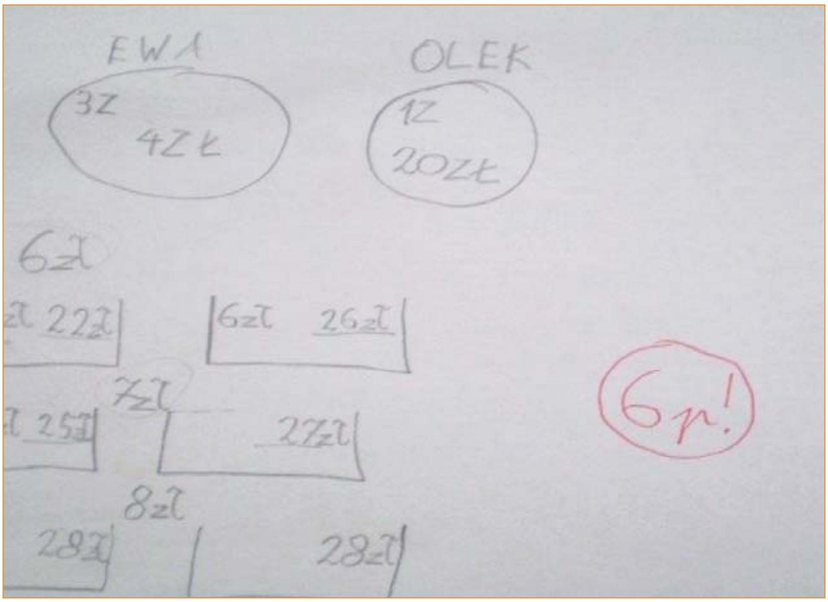
Zadanie: ***Ewa i Olek mieli po tyle samo pieniędzy. Ewa kupila 3 jednakowe zeszyty i zostało jej 4 złote. Olek kupił jeden taki zeszyt i zostało mu 20 złotych. Ile kosztował jeden zeszyt?***[2]
Sposób Karoliny:

[2] Zadanie zaczerpnęłam z ćwiczeń do matematyki klasy trzeciej „Już w szkole", wydawnictwa Nowa Era.





W pracy Karolci zadziwiła mnie wizualizacja zadania: pieniądze ulokowane w skarbonkach, rozrysowane ze strzałkami i komentarzem, zeszyty, znaki zapytania umieszczone tam, gdzie kryła się jakaś tajemnica. Zdjęcie pierwsze i drugie pokazują, jak wyobraża sobie to, co jest zapisane: *Dzieci mają po tyle samo pieniędzy w świnkach. Nie wiem ile? Jak Ewa kupiła 3 zeszyty, to zostało jej 4 złote. Jak Olek kupił 1, to zostało mu 20 złotych. Wiem też, że kosztowały tyle samo. I teraz sprawdzałam, kolejno, ile mogli mieć pieniędzy i ile mógł kosztować zeszyt*. Zdjęcie ostatnie pokazuje te próby. Przyjmując kolejne założenia, Karolina mazała poprzednie. Szkoda, bo podpowiedziałyby jej wiele.
Sposób Mariam:
Dziewczynka kolejno przyjmowała założenia dotyczące ceny zeszytu, obliczała wartość zakupów obojga dzieci, doliczała resztę i sprawdzała, czy wyniki, czyli początkowy stan finansów Ewy i Olka, są takie same. Nie skreślała swoich obliczeń, dlatego wywnioskowała, że jeśli podnosi cenę zeszytu, zbliża się do prawidłowego rozwiązania. Radość z rozwiązania zadania widać chociażby po zupełnie spontanicznej samoocenie (6 punktów to w naszej skali wynik maksymalny).



Czy choinka kryje jakieś tajemnice?
Układanie pytań matematycznych

To jest ekologiczna choinka klasy 3 c. Zanim przystąpiliśmy do jej likwidacji, poprosiłam dzieci, aby pytały o wszystko, co dotyczy choinki i wiąże się z matematyką. Sytuacja zupełnie nieznana dzieciom. Zadawać pytania dotyczące naszej choinki – okey, ale

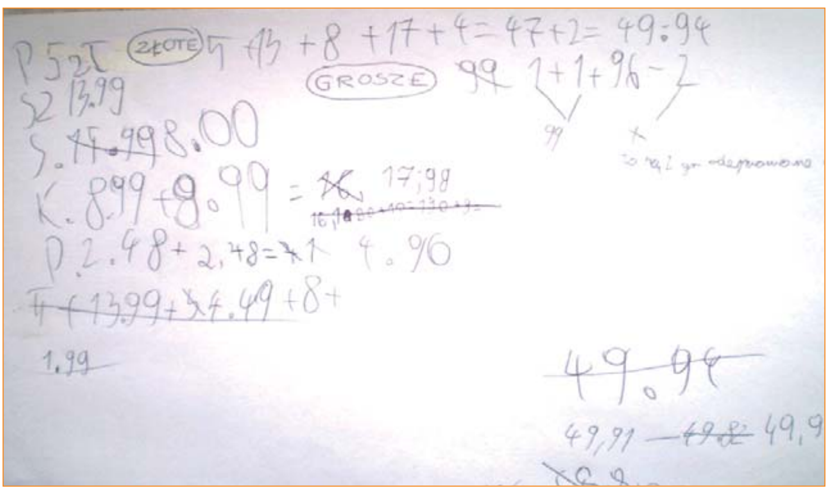
matematyczne? Niemożliwe. – usłyszałam na wstępie, a oczy dzieci zdawały się mówić Czego ona chce? Sama zwątpiłam w swój pomysł. Na szczęście na krótko.
Oto rezultat kilkuminutowej pracy:

- Zmierz choinkę i sprawdź, ile ma metrów i centymetrów.
- Z ilu kartonów jest zbudowana?
- Czy można podzielić liczbę kartonów na dwie części tak, żeby zrobić z nich dwie mniejsze choinki o równej liczbie kartonów?
- Czy z jednej choinki można zrobić cztery o równej liczbie kartonów?
- Ile pudełek leży na ziemi, a ile jej nie dotyka?
- O ile więcej pudełek nie dotyka podłogi niż dotyka?
- Ile jest pudełek oklejonych, a ile pomalowanych?
- Ile pięter ma choinka?
- Ile ważą wszystkie kartony?
- Po ile anielskich włosów przykleiło każde dziecko, jeżeli włosów było 40, a dzieci 16? Jeżeli w klasie jest 20 dzieci i każde miało przynieść 1 karton, a choinka ma 16, to ilu uczniów było nieobecnych lub nie przyniosło?
- Jeżeli kartonów jest 16 i każdy oklejono 50 centymetrowym papierem, to ile zużyto papieru?

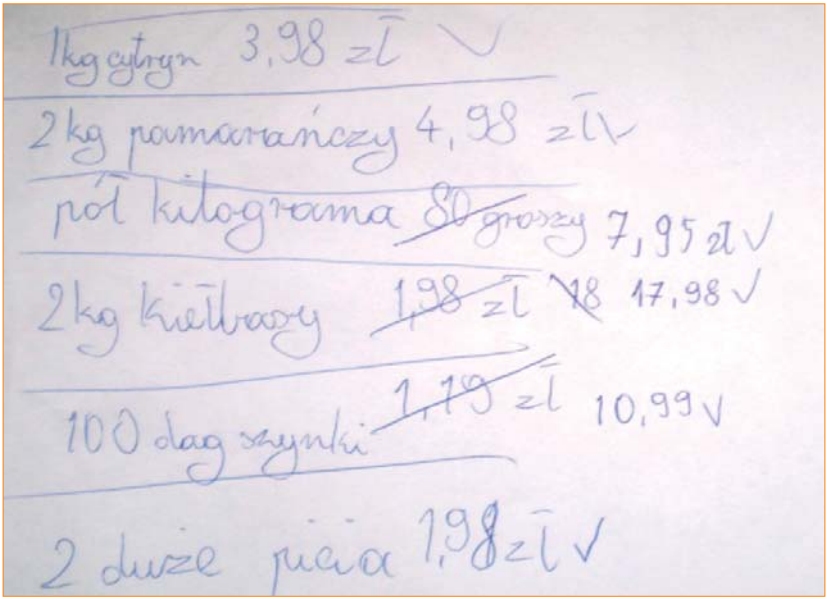
Nie zakładałam, że uczniowie będą szukać odpowiedzi na te pytania. Jednak oni byli tak zmotywowani, że spontanicznie udzielali odpowiedzi. W efekcie, zadanie z ważeniem zrealizowaliśmy następnego dnia, kiedy jeden z chłopców przyniósł wagę.

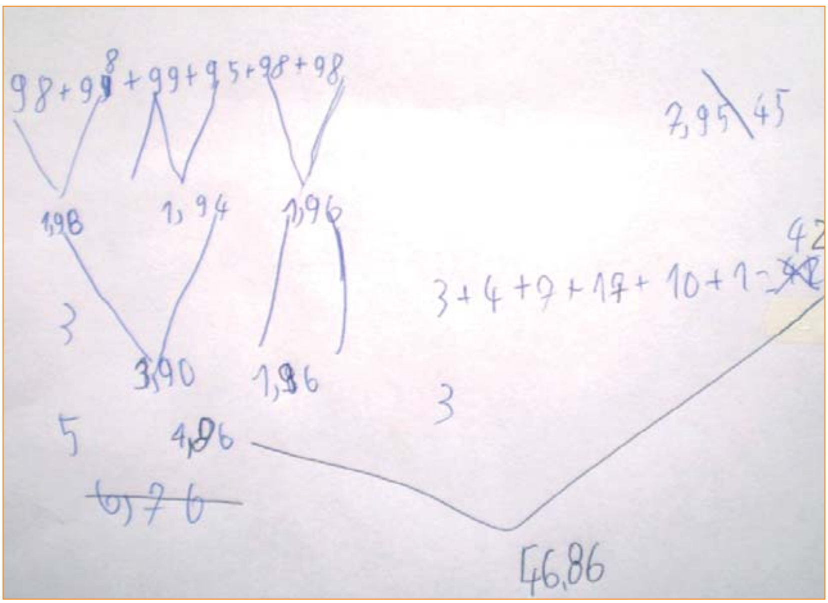
Jak zrobić korzystne zakupy? Obliczenia pieniężne

Polecenie: ***Znajdź najkorzystniejszą ofertę i oblicz cenę całkowitą wskazanych zakupów:***
Lista zakupów:
- 1 kg szynki
- 2 kg kiełbasy
- 1 kg żółtego sera
- 2 opakowania picia
- 1 kg cytryn
- 2 kg pomarańczy



Uczniowie pracowali w kilkuosobowych grupach. Mieli do dyspozycji ulotki reklamowe różnych sklepów.
Tak poradzili sobie z tym zadaniem Julia, Kuba, Kacper i Karolina: Sprytnie policzyli grosze.
Poniżej efekt pracy Łukasza, Oli, Karoliny i Saamera:





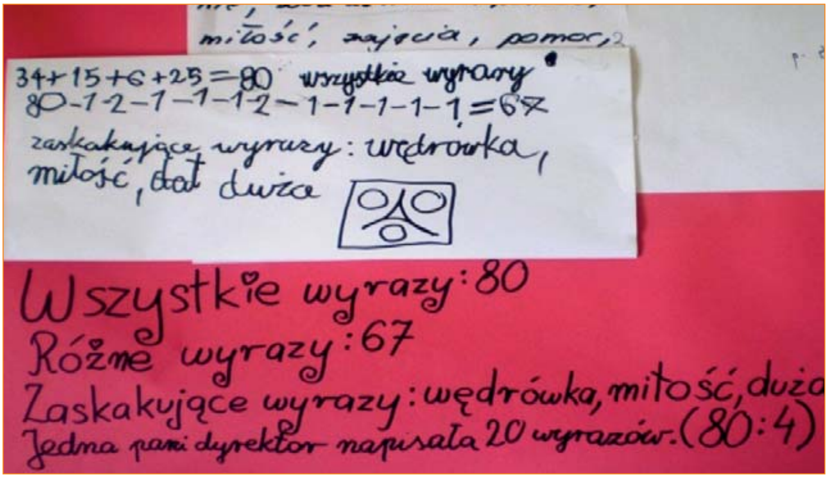
Uczniowie świetnie porównywali ceny, dodawali liczby dziesiętne, zamieniali jednostki, poszukiwali drogi rozwiązania. Zaskoczeniem było dla mnie, gdy dzieci zaczęły zwracać uwagę na pojemność, wagę lub liczbę sztuk wybranych produktów. To było istotne doświadczenie, które tego dnia zweryfikowało ich rozwiązania, a w przyszłości pozwoli im uniknąć wielu tanich chwytów reklamowych. Uczniowie dostrzegli, że wcześniejsze analizowanie cen, przeglądanie ofert reklamowych i korzystanie z nich, pozwala na zrobienie tańszych zakupów. Dalszą konsekwencją zadania było sporządzenie listy zakupów na swoje własne przyjęcie.

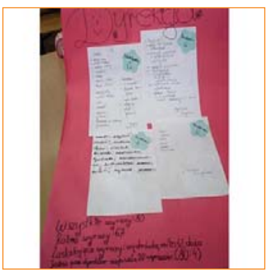
Bardzo matematyczny Międzynarodowy Dzień Języka Ojczystego. Opracowywanie danych

Z okazji Międzynarodowego Dnia Języka Ojczystego dzieci robiły „napady", czyli wchodziły do dyrekcji, sekretariatu, księgowości, biblioteki, klas i wierszowanym tekstem prosiły o podanie w przeciągu jednej minuty jak największej liczby wyrazów, kojarzących się z hasłem „nasza szkoła". W przypadku klasy pierwszej napadający spisywali podawane przez napadniętych wyrazy, a uczniowie starszych klas i dorośli robili to samodzielnie. Dozwolone były wszystkie części mowy i związki frazeologiczne. Zebrany materiał planowałam opracować sama, ale autentyczne zainteresowanie uczniów spowodowało zmianę decyzji i to oni są autorami opracowań materiałów w kategoriach:

- wszystkie wyrazy,
- różne wyrazy,
- liczba wyrazów napisanych przez jedną osobę,
- wyrazy, które wywarły na nas najwieksze wrażenie, zaskoczyły nas.

Efekt napadu na dyrekcję:

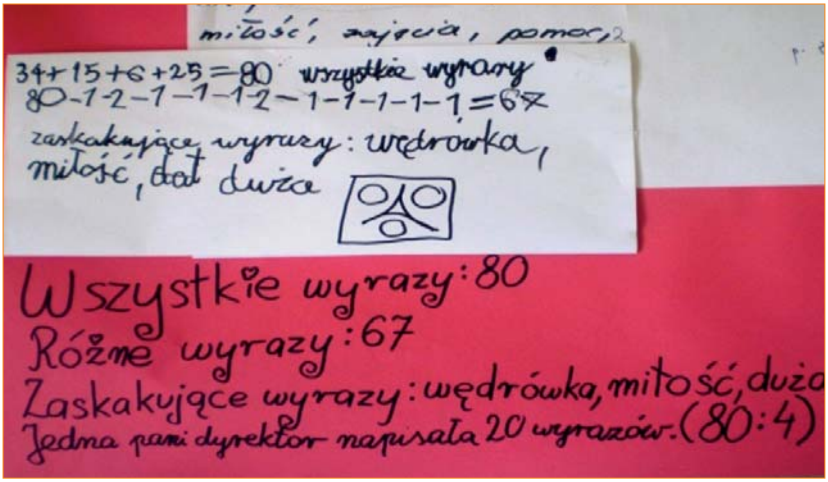




Dzieci nie miały żadnych wątpliwości dotyczących obliczeń. Chociaż robiły to pierwszy raz, wszystko było jasne. Obserwując ich obliczenia, zauważyłam, że uczniowie:

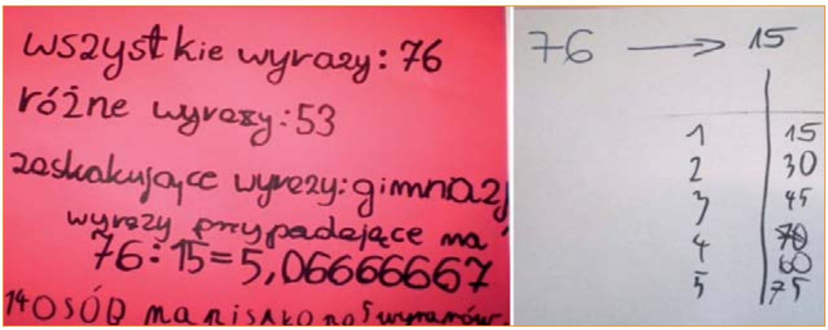
- licząc sumę wszystkich wyrazów, łączyli 34 i 6, potem 15 i 25,
- szukając różnych wyrazów, kolejno odejmowali powtarzające się,
- obliczając, ile średnio napisała jedna pani dyrektor, bez zastanowienia podzielili wszystkie wyrazy na 4, bo tyle pań pisało; iloraz pojawił się natychmiast.

Efekt napadu na klasę 3 b:



Tutaj uczniowie obliczając, ile wyrazów napisał każdy trzecioklasista z klasy „b", odejmowali kolejno liczbę biorących w zabawie udział. W ten sposób początkowo pozostało im 8 wyrazów. Przez moment zastanawiali się, dlaczego tak wyszło. Mówili, że nie starczy dla wszystkich, bo wyrazów jest 8, a dzieci 21. Po chwili sami wpadli na pomysł, że nie wszyscy napisali po tyle samo.

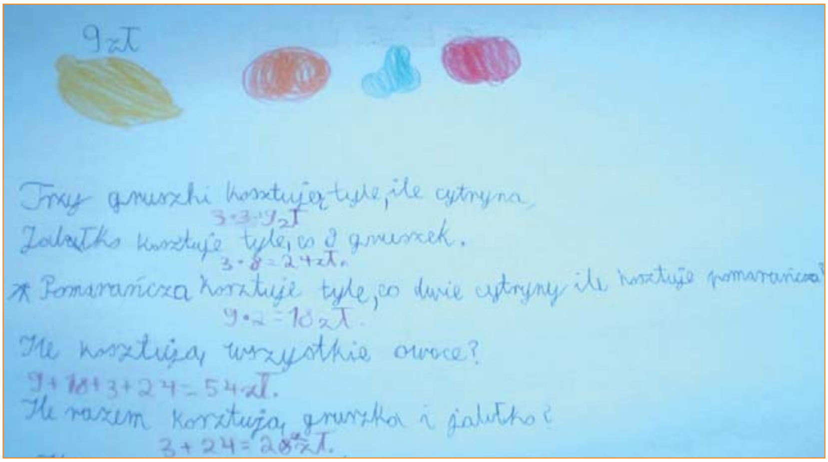
Efekt napadu na klasę 2 d:



Uczniowie przez jakiś czas męczyli się, obliczając średnią liczbę napisanych wyrazów. Gdy efekty, mimo wysiłków, były niezadowalające, skorzystali, po cichutku, z kalkulatora. Jakież było ich zdziwienie, gdy zobaczyli wynik 5,06666667. Usłyszałam: bez sensu i zobaczyłam ich marsowe miny. Już chciałam podejść, wyjaśniać, podać receptę. Okazało się to zbyteczne, bo Kacper narysował tabelkę. Nowy sposób przyniósł upragnione rozwiązanie. W tym momencie na ich twarzach zagościło zadowolenie. Mnie nie dawał spokoju wynik z kalkulatora, ale dlatego, że nie umiałam im go wyjaśnić, chciałam więc ten problem pominąć. Dociekliwość maluchów nie pozwoliła jednak na to. Myśli kłębiły mi się w głowie. Co powiem? „Pięć przecinek…", „Pięć i sześć setnych…", „Pięć i sześć w okresie…". Ratunek przyszedł ze strony Jakuba: To jest 5 całych wyrazów, pozostało jeszcze 8, których nie da się podzielić po jednym i kalkulator podzielił je na części. Nic dodać, nic ująć.

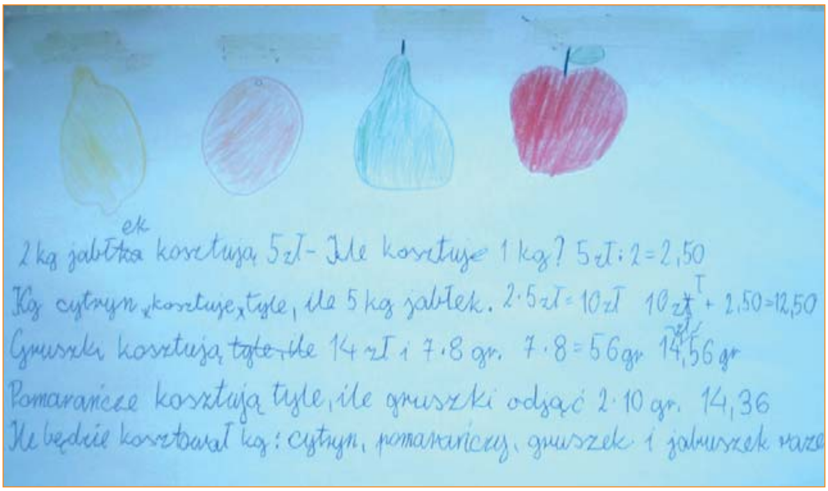
Czy można wymyślać ciekawe ceny? Konstruowanie zadań

Zadaniem dzieci było opisanie w formie zadania nieznanej ceny produktu, przez odniesienie jej do podanej ceny innego produktu. Karolina i Kacper wymyślili tak:



Zaciekawiło mnie, że do obliczenia ceny gruszki użyli mnożenia, a nie dzielenia, co dla mnie byłoby bardziej zasadne. Oni uzasadnili to tak, iż w głowie obliczyli cenę gruszki, a tu tylko sprawdzili.

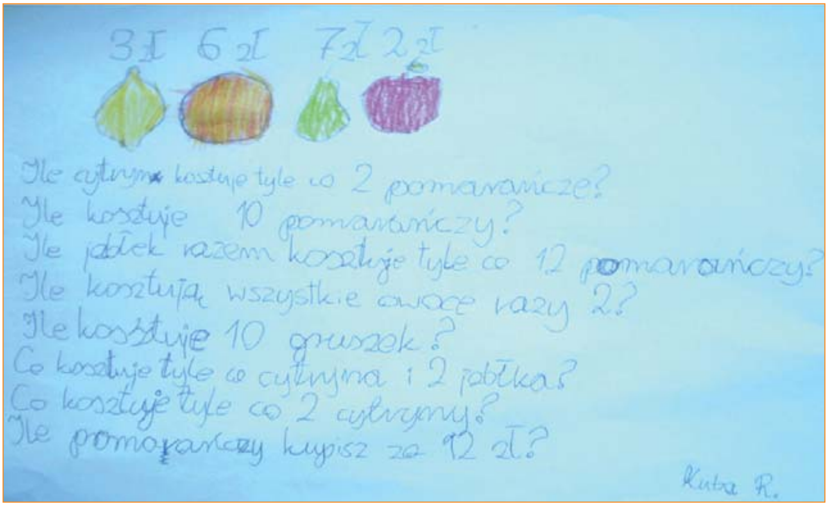
Pomysł Michaliny, Brunona i Nikodema :



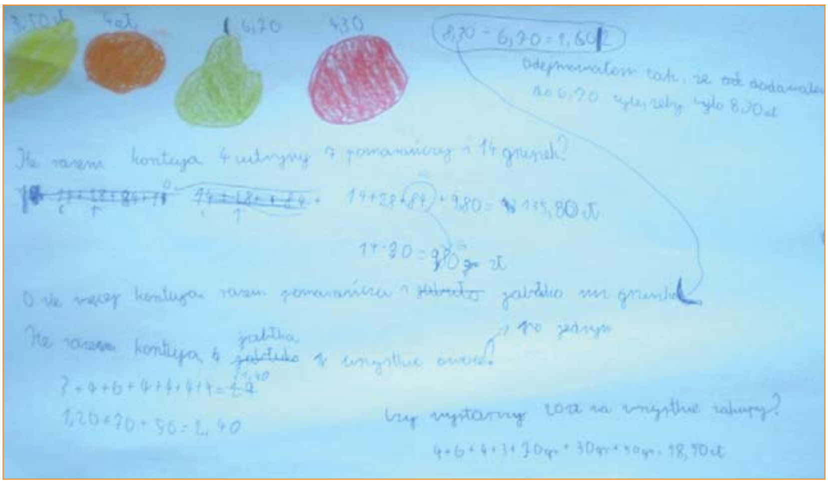
W ich zadaniach dostrzegłam wszystkie znane im działania matematyczne, które sprawnie wykorzystali, układając zadania. Dzieci stwierdziły jednoznacznie, że ceny owoców podaje się za kilogram, lub inną wagę, a bardzo rzadko za pojedynczą sztukę.

Czu można wymyślić ciekawe zakupowe zadanie? Konstruowanie zadań

W tym zadaniu uczniowie wymyślali zadania, mając podane ceny owoców.
To propozycje Jakuba:



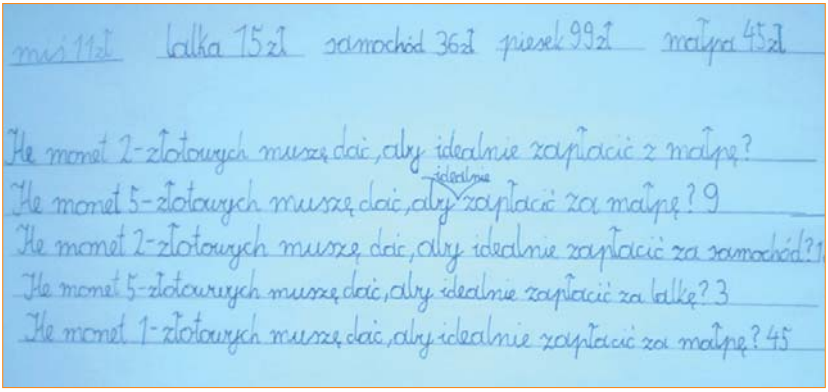
A to efekt pracy Łukasza i Saamera:

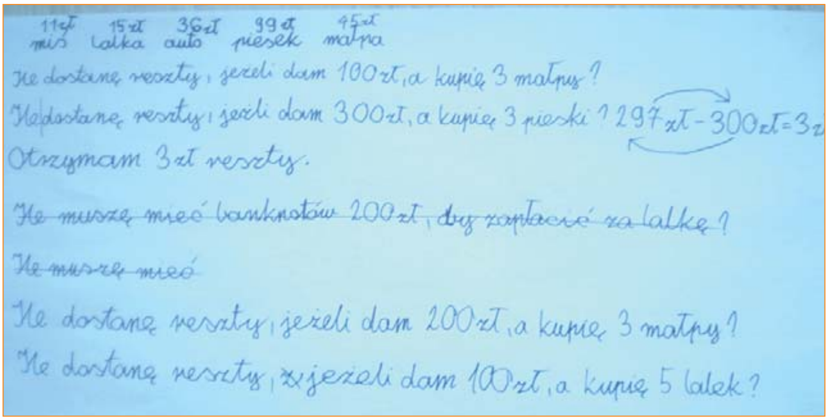


Chłopcy doskonale radzili sobie z dodawaniem i odejmowaniem liczb dziesiętnych, a przy tym ostatnim działaniu wykorzystywali dopełnianie do odjemnika, aby uzyskać odjemną. W ten sposób obliczali różnicę.

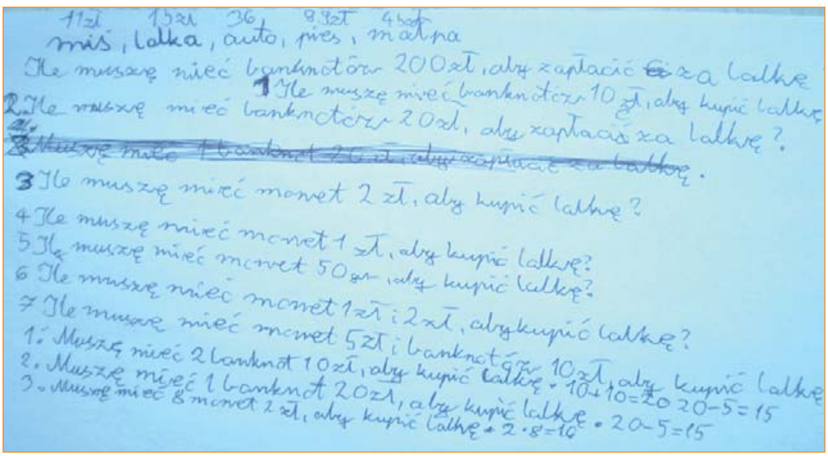
Czy można się pomylić? (Tak!) Analizowanie i poprawianie pytań

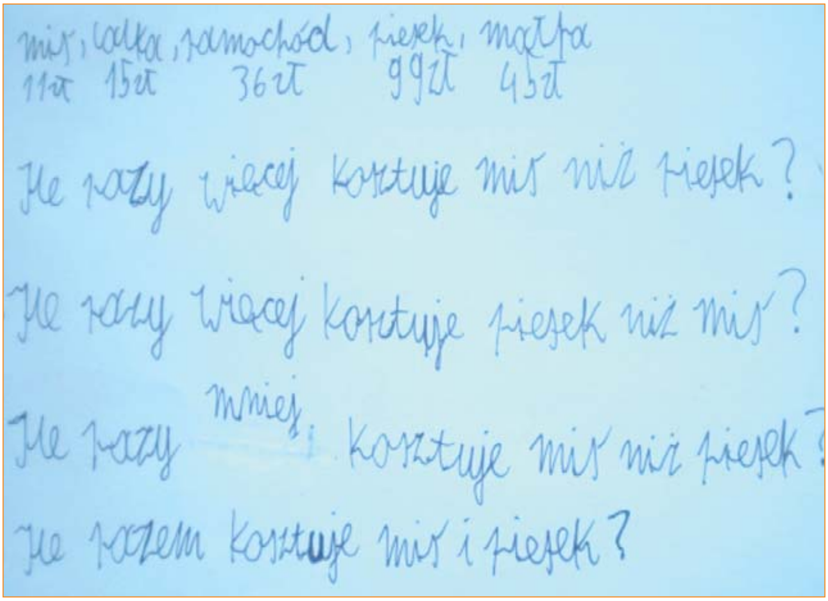
Tę formę zadania wymyśliły dzieci. Stało się to podczas układania pytań dotyczących zakupów. W momencie, gdy ktoś ułożył błędne pytanie, inni dostrzegali pomyłkę i od razu podawali poprawną wersję. To uniemożliwiało refleksję osobie, która popełniła błąd. Mimo moich upomnień, nadal to się zdarzało. Kiedy pomylił się Saamer, znów koledzy podali poprawną wersję. Wtedy on zaproponował, żebym ja napisała błędne pytania, a oni będą je poprawiali.





Dlatego, we wszystkich przykładach pierwsze pytanie jest błędne.





Moi uczniowie wierzą we własne siły i ochoczo podejmują nowe wyzwania. Podczas tej aktywności wykazały się odwagą, bo przecież to one zaaranżowały zupełnie nową sytuację, w której ja też uczestniczyłam po raz pierwszy. Rzeczywiście, przez siedemnaście lat nie zaproponowałam dzieciom takiego zadania. I co warte podkreślenia, teraz też bym tego nie zrobiła. Tę nową sytuację stworzyły od początku do końca dzieci, a ja podjęłam działania jako jeden z jej uczestników. Zarówno uczniowie, jak i ja byliśmy bardzo zdziwieni, że każde pytanie można poprawić na aż tak wiele sposobów.

Czy termometr ma swoje tajemnice? Temperatura i liczby ujemne

Zaznaczone na termometrach temperatury wynikały z treści zadania *(zaznacz temperaturę, jaka była w nocy i w dzień)*, które na tym etapie miało mieć swój koniec. Jednak zasłyszane dyskusje dzieci sprowokowały mnie do dalszego działania. Zachęciłam je, żeby napisały pytania, które nasuwają się im, gdy patrzą na te termometry. Pomyślałam sobie tylko, żeby nie było ich za dużo, bo przecież nie po to siedziałam w weekend nad scenariuszami zajęć na cały tydzień, żeby teraz ich nie realizować. Moje obawy były uzasadnione, bo już wielokrotnie w tym roku szkolnym takie sytuacje miały miejsce. I to teraz, bo dotychczas przez siedemnaście lat nie miałam z tym problemu.

Oto wybrane pytania zaproponowane przez dzieci:
- *Jeżeli pierwszy termometr się zepsuł i pokaże temperaturę 6 razy większą, to jaka ona będzie?*
- *O ile więcej było w dzień niż w nocy?*
- *Jaka będzie temperatura na drugim termometrze, jeżeli spadnie o 20 stopni?*
- *Jaka będzie temperatura na drugim termometrze, jeżeli dodam 5 stopni, odejmę 5 i odejmę 1 stopień?*
- *Jaka będzie suma temperatur na obu termometrach?*
- *O ile musi wzrosnąć temperatura na pierwszym termometrze, aby było 26 stopni?*

Odpowiadając na pytania, dzieci wykorzystywały wiedzę zdobytą podczas rozwiązywania innych zadań związanych z działaniami na termometrach i zauważyły, że:
- *Liczby, które znajdują się poniżej zera, mają minusy.*
- *Liczby mniejsze od zera nazywa się ujemnymi.*

- *Liczby, które są poniżej zera, to jakby braki.*
- *Liczby większe od zera to liczby dodatnie.*
- *Jeżeli od liczby dodatniej odejmujesz liczbę większą od niej, to wyjdzie ci liczba ujemna.*
- *Jeżeli będziesz odejmował od liczby ujemnej, to ta liczba się powiększy.*
- *Jeżeli do liczby ujemnej dodasz liczbę dodatnią, większą od niej, to otrzymasz liczbę dodatnią.*
- *Jeżeli do liczby ujemnej dodasz liczbę dodatnią, ale mniejszą od niej, to nadal pozostanie liczba ujemna, tyle, że mniejsza.*
- *Jeżeli liczba ujemna i dodatnia będzie taka sama, wyjdzie zero.*
- *Liczby dodatnie i ujemne rozdziela zero.*
- *Gdybyśmy położyli temometr, to, patrząc od zera w prawą stronę, liczby stają się coraz większe, a patrząc od zera w lewą stronę, liczby niby są coraz większe, ale tak naprawdę, są coraz mniejsze.*

I tak sprawdzenie jednego ćwiczenia, które dzieci wykonały w domu, przerodziło się w żywą dyskusję, którą prowadziły między sobą. Moja rola ograniczała się do koordynowania całości, próśb, by uczniowie powtórzyli swoje spostrzeżenia, gdy nie do końca byłam pewna ich wniosków. To była bardzo długa lekcja. Widząc zaangażowanie, trafne wnioski, postanowiłam podążać dalej tym tropem. Zaproponowałam uczniom oglądanie prognozy pogody i notowanie przewidywanych temperatur. Ten bank danych posłużył do dalszych operacji na liczbach dodatnich i ujemnych:

- dostrzegliśmy, że prognozy podawane przez różne źródła różnią się od siebie, nie zawsze się sprawdzają,
- poszukiwaliśmy najwyższych i najniższych temperatur,
- obliczaliśmy różnice i sumy wybranych przez dzieci temperatur (chociaż nie widziałam specjalnie celu obliczania sumy np. temperatur pierwszego i ostatniego dnia tygodnia albo całego tygodnia, ale skoro to ich ciekawiło…),
- wykonaliśmy wykresy temperatur nocnych i w ciągu dnia oraz porównywaliśmy je (dzieci samodzielnie kreśliły te wykresy).

Czarny scenariusz, którego się obawiałam, sprawdził się. Sytuacja wypracowana przez samych uczniów pochłonęła bardzo dużo czasu. Zastanawiałam się: *Po co ty to robisz? Przecież teraz każdy ma termometr elektroniczny, który wszystko pokaże i obliczy sam*. Nie powiem, przez chwilę miałam wątpliwości, czy nie zmarnowałam czasu. Jednak, jak spojrzałam na to, co zrobiliśmy, doszłam do wniosku, że na pewno nie, bo te umiejętności znajdą zastosowanie jeszcze w wielu sytuacjach.

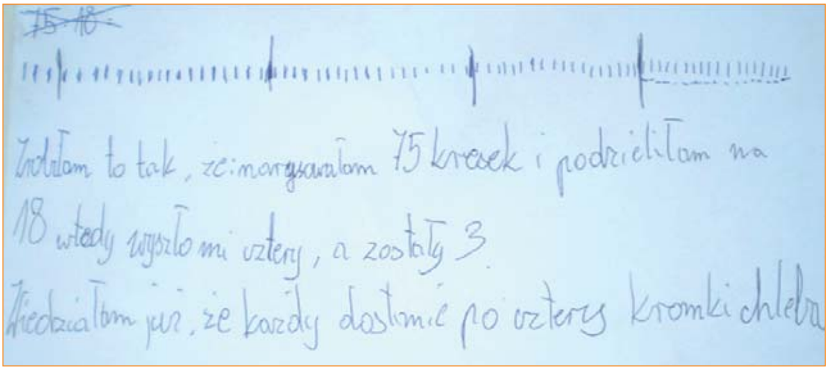
Ile kromek chleba zje każdy? Dzielenie z resztą, ułamki

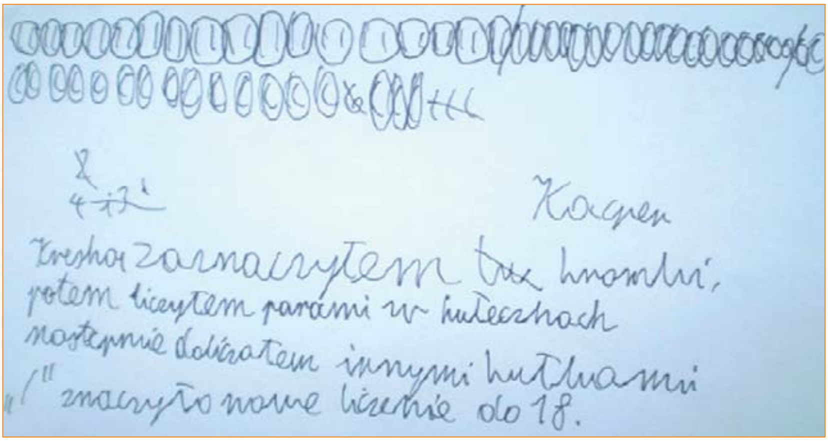
Dzień Dziecka, cała szkoła świętuje, a uczniowie 3 c, rozwiązują skomplikowane problemy matematyczne. Taka była rzeczywistość, choć z punktu widzenia dzieci była to naprawdę wielka frajda. Tego dnia przygotowywaliśmy sobie śniadanie – kanapki z czekoladą. Kiedy położyłam na stole potrzebne produkty, dzieci zauważyły, że jest 10 pojemników z czekoladą, która jest w dwóch smakach. Usłyszałam, że każda grupa dostanie po dwa rodzaje czekolady. Noży było 18, oczywistym był fakt, że każdy dostanie po jednym. Zamieszanie wywołał chleb. Leżały trzy bochenki. Kanapka z czekoladą to przepyszna sprawa. Uczniowie bez żadnej podpowiedzi z mojej strony zaczęli rozmawiać o tym, że trzeba ów chleb podzielić po równo. I w tym momencie rozpoczęła się fantastyczna matematyczna przygoda.

Jasne było, że najpierw obliczymy liczbę wszystkich kromek. To nie sprawiło żadnego kłopotu, chociaż mnie bardzo zaskoczyło. Poprosiłam Anię, aby wykonała to zadanie. Byłam pewna, że poradzi sobie z tym, przeliczając elementy kolejno. W tym samym czasie pozostali mieli przygotować się do pracy. Anna, gdy podeszła i zobaczyła, że są trzy chleby, od razu zapytała, czy mogą inni jej pomóc. Zawołała trzy osoby, przydzieliła im poszczególne bochenki i poleciła przeliczenie kromek. Po otrzymaniu wyników wspólnie obliczyli sumę. Andzia świetnie zorganizowała sobie pracę. Wiedziała, że pracując wspólnie, można osiągnąć więcej. Byłam z niej naprawdę dumna.

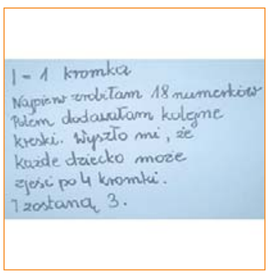
Suma wynosiła 75. Nas było 18. Motywacja do obliczenia, ile każdy może zjeść, była silna, bo przecież w perspektywie była smakowita czekoladowa kanapka. Jeżeli ktoś zje więcej, inny będzie miał mniej. Nie wiem, czy rzeczywiście czar czekolady, czy jeszcze coś innego, spowodowało taki zapał do pracy i mnogość pomysłów na wykonanie działania 75 : 18 = ? Poniżej propozycja Mariam, a dalej Karoliny i Kacpra.

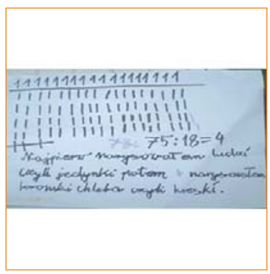
Zarówno Karolina, jak i Kacper posłużyli się rysunkiem. Oboje narysowali całkowitą liczbę kromek. Dalsze ich postępowanie było zgoła odmienne. Karolina dzieliła po 18, bo, jak powiedziała, *za każdym razem, gdy każdy weźmie po jednej kromce, to ubędzie 18.* Kacper kolejno przydzielał kromki, ale oszacował, że dwie dostanie każdy. Kolejną osiemnastkę jasno oddzielał. Na obu rysunkach widać resztę, ale tylko Karolina uwzględniła ją w komentarzu.



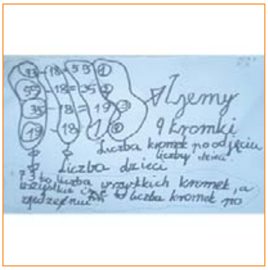


Agata (z lewej) i Saamer rozpoczęli pracę od narysowania liczby osób, które będą brały udział w podziale chleba. Potem kolejno każdej z nich przydzielali po jednej kromce. Na uwagę zasługuje fakt, że Saamer skreślił resztę. Zrobił tak, bo, jak powiedział, *tego już nie dało się podzielić*. Agata przydział chleba zakończyła na 72 kromkach, resztę, którą dostrzegła, tylko zaznaczyła na swoim rysunku, nie wciągając jej do podziału.



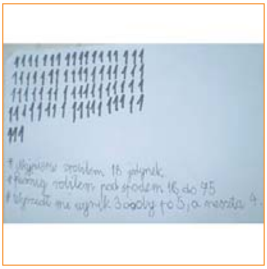


Ada pomyliła wyjściową liczbę kromek, przyjęła 73. Kiedy doszliśmy do tej pomyłki, zapytałam ją, czy prawidłowa liczba, czyli 75, zmieni wynik i o ile. Po chwili namysłu odpowiedziała: *Nie, bo to będzie tylko więcej w reszcie. Zostaną 3, a nie 1 kromka*. Podczas operacji rachunkowych też wkradła się pomyłka, ale została poprawiona. Ada, odejmując zawsze stałą liczbę kromek, doszła do takiej odjemnej, od której nie dało się już odjąć 18. Tym samym osiągnęła zamierzony cel.

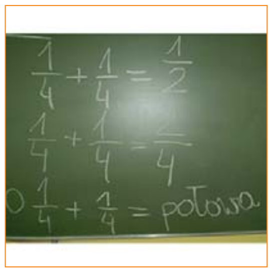


W tym momencie pomyślałam, co by było, gdyby nie mój udział w „Bąblu"? Pomyłka Ady urosłaby do rangi problemu, a najważniejszego, czyli tego, że dzieci umieją i rozumieją matematykę (bo przecież tylko wtedy są w stanie badać nowe, nieznane im sytuacje i świetnie się w nich czuć) nie umiałabym dostrzec.

Podczas analizy rozwiązania Nikodema wywiązała się dyskusja. Usłyszałam: *Przecież miało być po równo, a tu 3 osoby mają po 5 kromek, a 15 po 4. To nie jest równo.* W tym momencie ukształtowało się nam pojęcie reszty: *Dobra, to wszyscy dostaną po równo, czyli po 4, a reszta, czyli 3 kromki, będą dla pań.*



Wydawało mi się, że w tym momencie możemy przystąpić do przygotowania śniadania. Ale byłam w błędzie! Uczniowie chcieli koniecznie podzielić sprawiedliwie kanapki między panie, a na zajęciach oprócz mnie był jeszcze nauczyciel wspierający. Zatem byłyśmy we dwie, a kanapki były trzy. W zupełnie naturalny sposób Bruno zaproponował, żeby każda z nas wzięła po 1 kromce, a trzecią, żebyśmy podzieliły na równe części i żeby każda z nas zabrała po jednej części. Michalina dodała, że: *te części to ułamki, które nazywają się jedna druga. Jedna druga i jedna druga to jedna cała, a jeśli przekroję kromkę na 4 części, to każda z nich będzie się nazywała jedna czwarta*. I tak, jeszcze głodni, z zapałem stworzyliśmy tabelkę pokrojonych całości:



Ten dzień miał wyglądać zupełnie inaczej. Zgodnie z zaleceniami, nie miało być zajęć dydaktycznych, a czas miał upływać na zabawie. To dziecięca ciekawość, dociekliwość i, chyba wrodzone, poczucie sprawiedliwości, sprowadziły naszą aktywność na zupełnie niezaplanowane ścieżki. To jeden z tych momentów, w którym zrozumiałam, że trzeba „iść za dzieckiem", bo jakże mogłabym zostawić je i nie pozwolić dotrzeć do prawd, które ich tak bardzo interesowały. Bawiliśmy się wspólnie. Autentycznie podróżowałam razem z nimi i nie byłam maszynistą tego pociągu ani nawet konduktorem. Byłam jednym z pasażerów.

Podczas dzielenia chleba, zaskoczyła mnie liczba różnorodnych rozwiązań. Spontaniczna działalność uczniów poszła w wielu kierunkach. Jest to dowód na to, że możemy realizować trudne zagadnienia matematyczne w sposób bliski dziecku. Wiedza nabyta w trakcie samodzielnych doświadczeń, dyskusji i wspólnych ustaleń na bieżąco weryfikowanych przez praktykę, będzie autentyczna i w pełni rozumiana.

Jak napisać zadanie o tym, z tym…? Układanie zadań tekstowych

Wielokrotnie układaliśmy zadania tekstowe. Tym razem zaproponowałam, żeby dzieci też ułożyły treść, ale dodatkowo podałam warunki, które należało spełnić:

- *treść dotycząca naszej klasy: 3c,*
- *przynajmniej jedna z liczb występujących w zadaniu podzielna przez 3 (jeżeli będzie ich więcej – brawo),*
- *przynajmniej jedna liczba w zadaniu większa niż 30 (jeżeli będzie ich więcej – brawo),*
- *wynik równy jeden.*

Pomysłowość uczniów znowu przerosła moje oczekiwania. Sama nie potrafiłabym wymyślić tak różnorodnych zadań, dzięki którym uczniowie wykorzystywali wiedzę i umiejętności z wielu działów matematyki. Oto kilka przykładów.
Karolina:

1. *Pani przyniosła 60 naklejek. Chciała dać każdemu z uczniów po 3. W klasie jest 21 dzieci. Dla ilu zabraknie naklejek?*
2. *Klasa 3 c poszła na lody. Gałka kosztuje 3 zł. W klasowej skarbonce było 69 zł. Po ile gałek może kupić każdy, jeżeli lody będą też jadły panie?*

Jakub:

1. *Klasa 3 c zorganizowała zbiórkę zabawek dla dzieci z domu dziecka. W poniedziałek zebrali 69 zabawek, we wtorek 33, a w środę 90. Po ile zabawek dostanie każde dziecko, jeżeli jest ich 192?*
2. *Uczniowie 3 c kupili dla psów ze schroniska kilka paczek różnej karmy. W jednej paczce było 42 kg, w drugiej 111 kg, w trzeciej 150 kg, a w czwartej 225 kg. Ile kilogramów karmy dostanie każdy pies, jeśli jest ich 528?*
3. *Podczas wycieczki do lasu uczniowie klasy 3 c nazbierali 117 kwiatków. Po drodze zgubili 36. Postanowili, że te, które im zostały, wręczą nauczycielom ze szkoły. Po ile kwiatków dostanie każdy, jeżeli w szkole jest 81 nauczycieli?*

Mariam:

1. *W klasie 3 c znajdują się 33 krzesła. Klasa liczy 33 uczniów. Ile krzeseł przypada na jednego ucznia?*
2. *Klasa 3 c (z zadania 1) zebrała 1236 kasztanów. Dzieci rozdały 1203 kasztany. Po ile kasztanów zostawiło sobie każde dziecko?*
3. *Chłopcy mają razem 216 kredek, a dziewczynki 2 razy więcej niż chłopcy. Dzieci podczas lekcji plastyki zatemperowały 647 kredek. Ilu kredek nie naostrzyły dzieci?*

Jakub:

1. *Łukasz lubi cukierki tylko w kolorze czerwonym. Pani dała mu 99 cukierków żółtych, różowych, zielonych, pomarańczowych, czerwonych, fioletowych, brązowych, błękitnych. Wszystkich, z wyjątkiem czerwonych, było po 14. Ile było czerwonych cukierków?*
2. *Klasa 3 c w 44. minucie czterdziestopięciominutowego meczu zaczęła grać fatalnie. Ile czasu klasa 3c grała bardzo źle?*
3. *Ada dała 33 uczniom zadania. Było ich tyle, ile dzieci. Ile zadań dostali uczniowie, jeżeli każdy dostał po równo?*

Robert:

1. *W klasie 3 c jest 20 dzieci. Każde z nich przyniosło po 3 nakrętki. Po przeliczeniu okazało się, że tylko 59 spełnia wskazane normy. Ile było nakrętek niewłaściwych?*
2. *20 dzieci z 3 c było na wycieczce w szkółce leśnej. Każde z nich posadziło po 3 sadzonki młodych drzew. Po roku okazało się, że połowa uschła. Następnego roku 15 drzew zaatakowała choroba i obumarły, a 14 zostało zniszczonych przez ogień. Ile drzew przetrwało?*
3. *Dzieci z klasy 3 c zebrały 91 jabłek. Każde z 20 dzieci zabrało do domu po 4 jabłka, a pani Ewa i pani Ania po pięć. Ile jabłek zostało dla pani dyrektor?*

Nikodem:

W klasie 3c jest 21 uczniów. Nikodem kupił 66 lizaków. Dla każdego ucznia przyniósł po 3 sztuki i po jednym dla pani Ewy i pani Ani. Ile zostało lizaków?

Gdy zobaczyłam, że układanie zadań tekstowych, zgodnie z podanymi warunkami, sprawia dzieciom taką radość i uaktywnia ich myślenie w wielu obszarach matematycznych, postanowiłam robić to częściej. Po pewnym czasie nie tylko ja, ale także uczniowie sami wymyślali warunki. Oto niektóre z nich:

- Wszystkie liczby w zadaniu (wynik także) mają być parzyste.
- Wszystkie liczby w zadaniu (wynik także) mają być nieparzyste.
- W treści zadania musisz użyć 13 liczb, a wynik ma równać się 1.
- Treść zadania ma być taka, żeby można było do niej ułożyć przynajmniej 3 pytania.
- Zadanie ma być o malowaniu domu i kupnie farb.
- W treści wszystkie liczby mają być trzycyfrowe, wynik ma się równać zero i do obliczenia należy wykorzystać dodawanie.
- W zadaniu nie może wystąpić żadna liczba.
- Odpowiedź do tego zadania ma brzmieć: „Ala może mieć 33, 34, albo 35 pomysłów".

Były to bardzo twórcze i ciekawe zajęcia.

Czy to samo zadanie może mieć różne wyniki? Co skłoniło mnie, żeby pokazać, jaka jest kolejność wykonywania działań

***Zadanie brzmiało:* Wybierz takie liczby i działania (bank danych był przygotowany), aby otrzymać wynik równy 38.**

Zadanie Nikodema: $2 + 2 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 \times 2 = ?$

Michalina sprawdzając je, liczy: $2 + 2 + 1 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 = 34; 34 \times 2 = 68$

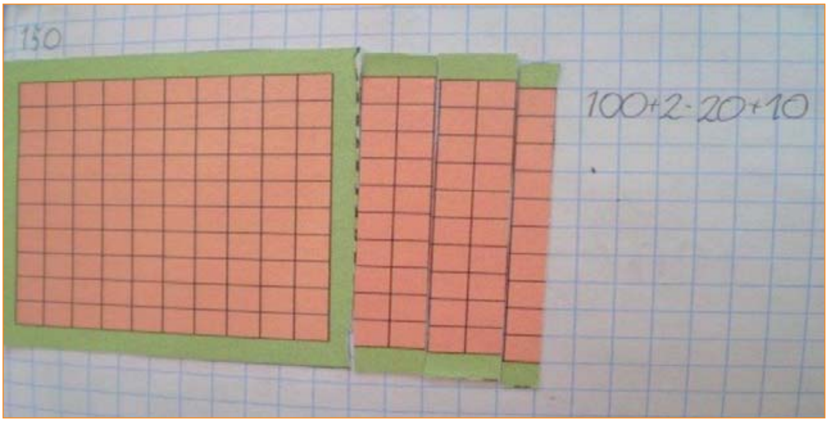
Nikodem w odpowiedzi: *Nie, ja to wymyśliłem tak, że wiedziałem, że $6 \times 5 = 30$. Do tego chciałem dodać 8, ale, żeby było trudniej, zamiast 8 dałem 2×4. Dodatkowo, też żeby było trudniej, jedną piątkę zamieniłem na $2 + 2 + 1$.*

Ten przykład posłużył nam do tego, aby kolejny raz uświadomić sobie, że:

- każdy z nas myśli inaczej,
- musimy uczyć się uzasadniania swoich pomysłów,

- musimy poznawać zasady, które obowiązują wszystkich (dzieci w tym przypadku poznały kolejność wykonywania działań).

Kilka dni później miałam informację zwrotną, że było warto. Ten zapis pojawił się przy realizacji zupełnie innego tematu. Zadanie polegało na zilustrowaniu liczby 150. I Robert zastosował właściwą kolejność wykonywania działań.



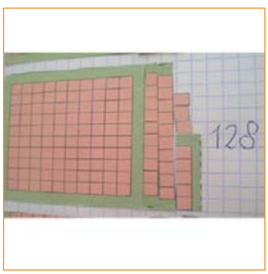
Czy sto to dużo? Rozszerzenie zakresu liczbowego

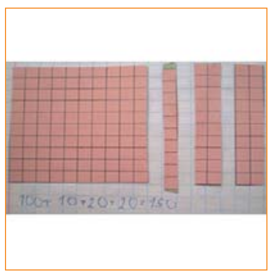
Czy sto to dużo? – to pytanie usłyszałam od Ani. Skłoniło mnie ono do sprawdzenia, czy Ania mimo wielu dysfunkcji poradzi sobie z operacjami na większych liczbach, czy ma ukształtowane pojęcie liczby.

W celu uzyskania liczby 100, gromadziliśmy różne przedmioty (klocki, zapałki, kasztany itp.). Potem były liczmany, na których uczennica pracuje na co dzień (liczydło, koraliki, kształty Numikon, żetony). Kolejnym krokiem było liczenie kratek w zeszycie.
Po tych doświadczeniach dziewczynka miała swoje wnioski:

- czasem sto to dużo, czasem mało (często miało to związek z wielkością przeliczanych elementów, ale nie zawsze),
- warto podczas przeliczania *robić sobie „kupki", bo wtedy jest lepiej* (chodzi o grupowanie przeliczonych elementów np. po 5, 10 itd.).

Poniżej pokazuję prace, w których Ania doskonale radzi sobie z graficznym przedstawieniem liczby, co więcej, udawadnia, że wie, co to 100, 10, 1, bo układając daną liczbę, od razu ją analizuje i wycina odpowiednią liczbę kratek. Dziewczynka osiągnęła sukces na miarę swoich możliwości.





Pierwsze doświadczenia z wycinaniem kwadracików, potrzebnych do przedstawienia liczby 100, wiązały się z wycinaniem stu pojedynczych kwadracików. Dopiero, kiedy Ania doświadczyła, że coś spadło, ileś się zgubiło, jakaś liczba umknęła przy przeliczaniu, sama sięgnęła po przydatne struktury.

Nasza matematyka

Po rocznej przygodzie w „Bąblu" zmieniło się wszystko – ja i moje lekcje matematyki są jak z innej planety. Przez ten czas dzieci zaskakiwały mnie wielokrotnie:
- swoimi pomysłami na rozwiązanie zadania,
- pytaniami, które, jeśli im pozwolimy, tworzą bez końca,
- niewiadomymi, które je interesują, a jednocześnie wyznaczają drogę i kierunek ich eksploracyjnych poczynań,
- autentycznym zaciekawieniem i entuzjazmem,
- spostrzegawczością i umiejętnością wykorzystania swojej wiedzy w sytuacji nietypowej,
- umiejętnością aranżowania nowych sytuacji matematycznych.

Wspólnie tworzyliśmy matematyczną edukację. To była ***nasza matematyka***. Wśród całej gamy nowych sytuacji zdarzały się też takie, w których to uczniowie postawili mnie w nowych, niespodziewanych okolicznościach. Wielokrotnie byłam zmuszona na bieżąco modyfikować swoje myśli, tworzyć rozwiązania i reagować stosownie do aktualnej sytuacji. Nie zapomnę kilku z nich, które wywołały mój uśmiech. Nazwałam je: ***Uśmiechnięte historie***.

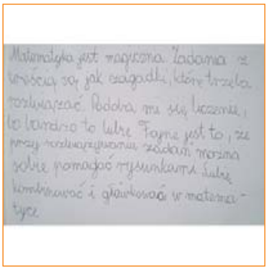
Michalina i liczby podzielne przez 3

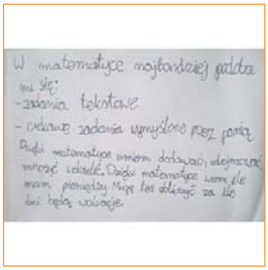
Podczas analizowania tabeli liczb od 1 do 100 dzieci opowiadały o swoich spostrzeżeniach. Okazało się, że jest to prawdziwa kopalnia pomysłów, które zdawały się nie mieć końca. Bez trudu uczniowie uogólnili, które liczby dzielą się przez 2, 5 i 10. Zatrzymaliśmy się na podzielności przez 3. Hipotez było wiele, ale nie przechodziły przez perfekcyjne sito ekspertów z 3 c. Zadzwonił dzwonek, który wcale nie przerwał rozpatrywania problemu. Musiałam wielokrotnie powtarzać komunikat o konieczności pójścia na przerwę. Miałam dużur. Michalina nie dała za wygraną, mimo zapewnień z mojej strony, że zadanie będziemy kontynuować po przerwie, zabrała kartkę na przerwę, mówiąc sama do siebie: *Zaraz coś mądrego wymyślę. Na pewno*. I usiadła przy parapecie na korytarzu.

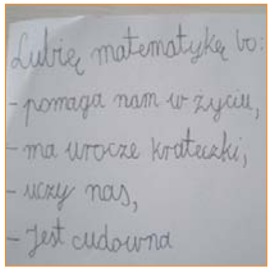
Łukasz
Kiedy zobaczył zadanie otwarte, potrzebował tylko chwili na analizę, by stwierdzić: *Przecież to zadanie ma tyle rozwiązań, że możemy tu siedzieć do wieczora*.

Klasa 3 c
Któregoś dnia sprawdzaliśmy, jakie mamy poczucie upływającego czasu. Zaaranżowałam zabawę w minutowego śpiocha. Dzieci przyjmują wygodną pozycję leżącą. W momencie usłyszenia komendy: „śpioch zasypia", zamykają oczy i mają dokładnie określony czas snu, np. minutę. Samodzielnie podejmują decyzję, kiedy, ich zdaniem, mija wyznaczony czas i wstają. Osoba prowadząca zabawę stara się uchwycić moment wstania możliwie wielu dzieci. Podczas pierwszej minutowej próby sama po niespełna 4 minutach, prosiłam o wstanie jedno z dzieci. Było tak oburzone, że przerwałam zabawę, nie chciało uwierzyć, że minuta minęła prawie 3 minuty wcześniej. Rekordzista „z drugiej strony" wstał po 14 sekundach. Po tym doświadczeniu wiedziałam, że częściej będziemy zwracali uwagę na zegar.

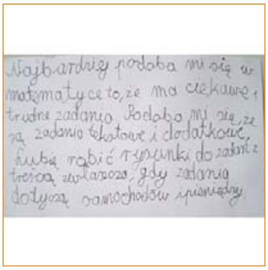
Nasza matematyka stała się zrozumiała dla mnie i moich uczniów. Zaobserwowałam wiele zachowań, które ugruntowały mnie w przekonaniu o słuszności przyjętej strategii, choć na początku miałam wiele wątpliwości. Dzieci w miarę kolejnych doświadczeń coraz odważniej podchodziły do pojawiających się wyzwań. Stawiane w nowych sytuacjach nie oczekiwały schematów rozwiązań. Przeciwnie, poszukiwały, proponowały pomysły, odnosiły się do poprzednich sytuacji i maksymalnie wykorzystywały swój potencjał. W tym samym czasie obserwowałam, jak małe dzieci radzą sobie z sytuacjami matematycznymi, które świadomie aranżowałam albo zadziały się, bo doprowadziła nas do nich dziecięca ciekawość. Takie lekcje uskrzydlają i ubarwiają szkolną codzienność. Zapytałam uczniów, co o nich sądzą. Poniżej zamieszczone są wypowiedzi dzieci, na których napisanie miały dokładnie trzy minuty. Jak można się domyślać, podczas tej aktywności czas płynął im bardzo szybko i nawet podejrzewały, że im go skróciłam. Zależało mi, aby była to esencja ich odczuć, dlatego były tylko 3 minuty.

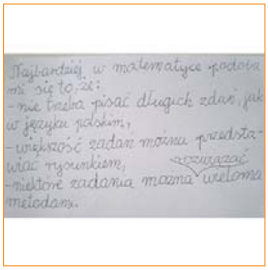


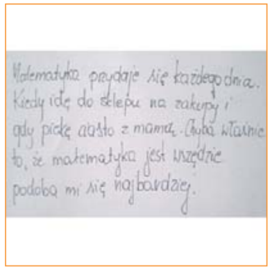




Nie chciałabym już nigdy wrócić do **mojej starej matematyki**. Mam nowe spojrzenie na jej nauczanie w edukacji wczesnoszkolnej i będę z dziećmi tworzyć **naszą matematykę**.







Ewa Kapczyńska
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej, w zawodzie 3 lata.

ŚRODOWISKO SPRZYJAJĄCE ROZWOJOWI UMIEJĘTNOŚCI MATEMATYCZNYCH UCZNIÓW KLAS I–III

Katarzyna Szcząchor

Szybki rozwój zaawansowanych technologii informacyjnych stawia przed edukacją nowe wyzwanie. Dzisiejsza szkoła musi przygotować uczniów „do pracy w zawodach, które jeszcze nie istnieją, do używania technologii, których jeszcze nie wynaleziono, do rozwiązywania problemów, o których jeszcze nawet nie wiemy, że mogą stanowić jakąś trudność”. W związku z tym środowisko edukacyjne powinno być bardziej skoncentrowane na uczniu, na jego pomysłach, wątpliwościach, sposobie myślenia i na samej czynności uczenia się. Ogromna w tym rola nauczyciela, aby stworzył bogate środowisko uczenia się, które:

- pobudzi uczniów do dyskusji, eksperymentowania, rozumowania, podejmowanie decyzji, rozwiązywania problemów, weryfikowania przydatności różnych rozwiązań,
- zaktywizuje ucznia na lekcji, czyniąc go współodpowiedzialnym za proces kształcenia,
- pobudzi do współpracy,
- pozwoli wreszcie na samodzielne myślenie.

Zwykła, a zarazem niezwykła plansza

Na jednym ze spotkań „Bydgoskiego Bąbla” nauczycielom biorącym udział w projekcie zaproponowano, aby wykorzystali w pracy z dziećmi gry matematyczne. Najistotniejsze w tej propozycji było to, aby w czasie aktywności matematycznej uczniów obserwować, jak radzą sobie z rozwiązywaniem problemu, jak go analizują i jakie strategie rozwiązania wybierają. W listopadzie rozpoczęła się moja przygoda z grą „Prostokąty”.

Klasa III, spotkanie pierwsze

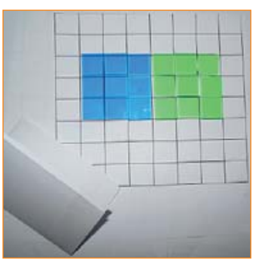
Do gry potrzebne są:

- jedna plansza (prostokąt 8 kratek na 8 kratek) na parę uczniów,
- liczmany – kolorowe kwadraciki takiej wielkości jak pola planszy,
- dwie sześcienne kostki do gry.

Reguły gry:

Gracze po kolei rzucają dwoma kostkami. Liczby oczek na kostkach mogą pomnożyć, dodać, odjąć czy podzielić. Gracz wybiera, co chce zrobić z wynikami rzutu w danym ruchu. Po rzucie zawodnik układa na planszy prostokąt zbudowany z tylu kolorowych kwadracików, co uzyskany wynik. Wygrywa zawodnik, który wypełni do końca planszę. Jeśli pod koniec gry uczeń wyrzuci za dużo oczek, traci kolejkę. Na kartkach uczniowie zapisują, ile oczek wyrzucili. Grę rozpoczyna ta osoba, która wyrzuci mniej oczek na kostce.

Po wyjaśnieniu reguł uczniowie rozpoczęli grę. Ja tymczasem obserwowałam, co robią i przysłuchiwałam się rozmowom. Jedna przyciągnęła moją uwagę na dłużej, a dotyczyła pojęcia prostokąta. Kiedy podałam regułę, że z kolorowych kwadracików układany jest prostokąt, Wiktor powiedział do Agnieszki:
Wiktor: *Może być też kwadrat.*
Agnieszka: *Każdy kwadrat jest prostokątem.*
Wiktor: *No pewnie, bo jak złożymy prostokąt na połowę to otrzymamy kwadrat.*
Ja: *Zrób to.*



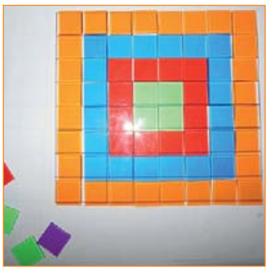
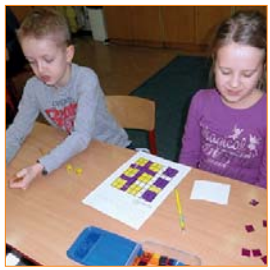
Wiktor złożył prostokątną kartkę na pół i okazało się, że po złożeniu nadal jest prostokąt o różnych bokach. Złożył kartkę jeszcze raz i nadal nie było kwadratu.
Inne dzieci zaczęły składać prostokątną kartkę tak, aby po jej złożeniu na pół otrzymać kwadrat.
Zuzia i Cyprian wykonali kilka prób, po czym krzyknęli:
Cyprian: *Ja już mam!* Zuzia: *Ja też!*
Ja: *Kiedy będzie to możliwe?*
Cyprian: *Dwa takie same kwadraty położone obok siebie tworzą prosto*kąt.
Chłopiec ułożył na planszy dwa kwadraty.
Obserwując działania uczniów w czasie gry „Prostokąty”, zauważyłam że:

- niektórzy uczniowie układali kwadraciki w przypadkowych wolnych miejscach,

- w przypadku kilku par widać było uporządkowany system układania kwadracików, np.
  - od zewnętrznej strony planszy do środka,
  - rzędami, pionowo i poziomo,
  - od środka planszy na zewnątrz,
  - kolorami i rzędami, każda osoba z pary uzupełnia jeden rząd jednym kolorem,

- niektóre pary dyskutowały o tym, gdzie i jakiego koloru kwadracik ułożyć na planszy,
- niektórzy uczniowie dbali o atrakcyjną stronę wizualną zadania, układając pewien wzór na planszy; dobierali tak działania, aby uzyskany wynik pozwalał na kontynuowanie pracy nad wzorem, zatem nie liczyło się zwycięstwo, ale wspólne tworzenie wzoru,

- była też grupa uczniów, która układała kwadraciki na planszy wbrew regule: wynik wykonanych obliczeń był poprawny, ale na planszy nie był ułożony w kształt prostokąta,
- najczęściej uczniowie wykonywali dodawanie i mnożenie – i to nawet wtedy, gdy wynik był większy od liczby wolnych pól na planszy, zatem nie pozwalał na ułożenie prostokąta; uczniowie w związku z tym tracili kolejkę zamiast wykonać odejmowanie lub dzielenie.

Po rozegraniu dwóch partii zapytałam uczniów: *Jak się grało?*
Igor: *Dobrze, trzeba było kombinować, czy warto dodawać, mnożyć, czy raczej odejmować lub dzielić. My mieliśmy trudniej, bo dodatkowo układaliśmy na planszy wzór.*
Ja: *Kiedy warto było odejmować lub dzielić?*
Cyprian: *Pod koniec gry, kiedy niewiele pól zostało do zakrycia.*
Wiktoria: *Kiedy zostało mało pól w rzędzie, kiedy układaliśmy wzór.*
Ja: *Jakie działania wykonywaliście najczęściej?*

Dawid: *Mnożenie i dodawanie.*
Ja: *O co jeszcze możemy zapytać?*
Dawid: *Ile rzutów trzeba wykonać, żeby wygrać?*
Zuzia: *6.*
Ja: *Jak to sprawdzić?*
Cyprian: *Pomyśleć, jak ułożyć kwadraciki na planszy, żeby zakryć jak najwięcej pól, bo wtedy trzeba rzadko rzucać kostką.*
Kacper: *Ile razy trzeba rzucić kostką, aby zremisować?*
Cyprian: *32, 16, 8, albo 31, albo 30.*
Dawid: *Czy piątkami można zakryć całą planszę?*
Wiktoria: *Nie, bo jeden zostanie.*
Uczniowie układali na planszy po pięć kwadracików w różnych kolorach. Kiedy zakryli „piątkami" całą planszę, okazało się, że jeden kwadracik się nie zmieści.
Patryk: *Ile piątek można położyć na planszy?*
Cyprian: *12, bo 10 razy 5 to 50 i 5 to 55 i 5 to 60. Na polu są 64 kwadraty, czyli zostaną jeszcze 4 kwadraty.*
Patryk: *Czy czwórkami można zakryć całą planszę?*
Dawid: *Tak, bo w jednym rzędzie jest 8, a to dwie czwórki.*
Karolina: *Ile czwórek trzeba położyć, żeby zakryć planszę?*
Dawid: *16, bo 8 czwórek u góry i 8 czwórek na dole, to razem 16.*

Na tym zakończyło się pierwsze spotkanie, w czasie którego dzieci poszukiwały własnej strategii działania, zadawały pytania, wyciągały wnioski. Zapisywanie rozmów i pytań uczniów w trakcie gry okazało się nie lada wyzwaniem, gdyż nie wszystko co uczniowie mówili czy robili udało się usłyszeć i zapisać. Po pierwszych doświadczeniach uznałyśmy z koleżankami, że warto, aby na lekcji każdej z nas pojawili się obserwatorzy. I tak też zrobiłyśmy, jedna z nas prowadziła lekcję, a dwie pozostałe obserwowały i zapisywały, jak działają, myślą i co mówią uczniowie.

Klasa III, spotkanie drugie

Reguły gry:
Rzut dwiema kostkami, można wybrać tylko jedno z działań: mnożenie albo dzielenie. Pozostałe warunki gry są takie same jak poprzednio. Plansza: prostokąt 10 na 10 kratek


Po wyjaśnieniu reguł gry jeden z chłopców, opierając się na doświadczeniach z pierwszego spotkania, powiedział:
Igor: *Ale to szybko się skończy!*
Po zakończeniu gry, Igor stwierdził ,że wcale nie było szybciej, gdyż Wiktoria chciała układać na planszy wzór i to wydłużyło grę. Chłopiec zaproponował Wiktorii, aby drugi raz zagrali „normalnie", bez wzoru.


Spostrzeżenia koleżanek nieco mnie zaskoczyły, gdyż obserwując działania wszystkich uczniów w klasie, w ogóle nie zauważyłam, że:

– w przypadku jednej pary pojawiło się coś nowego, a mianowicie dodatkowa reguła – blokowanie ruchów przeciwnika w celu zwiększenia szansy wygranej,
– niektóre pary kontrolowały wzajemnie swoje działania, tzn. jedna osoba z pary sprawdzała poprawność wykonania zadania przez drugą osobę,
– jedna para miała problem z rozpoczęciem gry, gdyż każda ze stron chciała narzucić drugiej swoją strategię układania kwadracików na planszy.

Nadal jednak były pary, które postępowały wbrew regule, układały na planszy taką liczbę kwadracików, aby zapełnić planszę zgodnie z obliczonym wynikiem, zapominając, że wynik mnożenia lub dzielenia należy ułożyć w kształt prostokąta.

Uczniowie rozegrali po dwie partie, po których zadawali spontanicznie pytania.
Jagoda: *Jaka jest najmniejsza liczba rzutów, żeby zakryć plansze?*
Wiktor: *Wystarczy rzucić jeden raz, bo 8 i 8 jest 64. Nie, bo nie mamy kostki z ośmioma oczkami (autorefleksja).*
Wiktor: *Nie, dwa, bo 6 i 6 i 4 i 7.*
Igor: *Nie może być 28, bo nie mamy kostki z siedmioma oczkami.*
Igor: *Trzy: 6 i 6, 6 i 4, 2 i 2.Wynik końcowy wynosi 64.*
Ja: *Ułóżcie na planszy te prostokąty.*
Dzieci ułożyły pierwszy prostokąt 6 na 6 kratek i stwierdziły, że drugiego prostokąta 6 na 4 nie można już ułożyć na planszy.
Igor: *A było tak blisko!*

Działania dzieci były poprawne, ale zabrakło wizualizacji. Dzieci nie połączyły wyników działań z ich obrazem graficznym na planszy. Stąd zaskoczenie niektórych uczniów, że mimo poprawnie wykonanych działań rozwiązanie Igora nie spełniło warunków gry.
Ja: *To jaka jest najmniejsza liczba rzutów, aby wygrać?*

Tym razem uczniowie zweryfikowali swoje hipotezy, układając kwadraciki na planszy.
Wiktor: *Trzeba rzucić cztery razy kostką, pierwszy rzut 6 i 6, drugi 6 i 2, trzeci 2 i 6 i czwarty 2 i 2.*
Ja: *Jest inne rozwiązanie?*
Cyprian: *A ja mam 5 i 6, 6 i 2, 6 i 3, 2 i 2, ale też cztery rzuty.*

Kiedy spotkałam się z koleżankami, by porozmawiać o tym, co nas zaskoczyło i czego dowiedziałyśmy się o myśleniu matematycznym dzieci w czasie tych dwóch spotkań, każda z nas zwróciła uwagę na to, że nie wszystkie dzieci układały wynik działań w kształt prostokąta. Zastanawiałyśmy się, co może być powodem tego, że uczniowie nie potrafią ułożyć na sieci kwadratowej z kolorowych kwadracików prostokąta np. 6 rzędów po 5 kwadracików, mimo że wynik obliczeń był poprawny. Uznałyśmy, że powodem może być:

– sama sieć kwadratowa, która utrudnia dostrzeganie konkretnego obrazu,
– za dużo warunków, których należy przestrzegać w czasie gry,
– pominięcie przez nas jakiegoś etapu, który powinien się pojawić, aby uczniowie wykonali poprawnie ***naszym zdaniem*** zadanie.

Naszymi wątpliwościami podzieliłyśmy się na spotkaniu, na którym pojawił się jeszcze jeden pomysł: może dzieci tworzą swoje struktury inne od tych, które my mamy w naszych głowach, a my ich zwyczajnie nie dostrzegamy.

W czasie obserwacji działań uczniów klasy drugiej byłyśmy już bardziej czujne na pytania dzieci i na to, co robią, dopytywałyśmy uczniów o to, jak rozwiązali zadanie, aby lepiej zrozumieć ich sposób myślenia.

Strategie działania uczniów zaskoczyły nas, gdyż nasze założenia były zupełnie inne. Oto przykład:

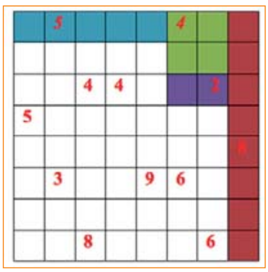
Norbert ułożył 16 pomarańczowych kwadracików w dwóch rzędach. Zapytany, jak układał kwadraciki, wyjaśnił, że liczył po 4 czwórki i ułożył jedną obok drugiej w ciągu. Podobna strategia działania pojawiła się w przypadku działania 4 × 5, 20 fioletowych kwadracików ułożył w dwóch rzędach. Norbert wyjaśnił, że najpierw ułożył dwie piątki obok siebie, a następnie pod nimi jeszcze raz dwie piątki. Zaobserwowałyśmy, że nie była to strategia przypadkowa, chłopiec w taki sam sposób układał kolorowe kwadraciki przy wykonywaniu innych działań. Toczył nawet niewielką walkę o taki właśnie sposób układania kwadracików na planszy z koleżanką, która nie do końca rozumiała jego strategię działania. Kiedy podzieliłyśmy się naszymi spostrzeżeniami, że chłopiec, który siedzi przed nami, dobrze wykonał zadanie, jedna z koleżanek powiedziała: *Ale to nie jest 4 razy po 5.* Jednak po chwili zastanowienia przyznała, że tak też może być! Jak się później okazało, nie tylko Norbert myślał w ten sposób, inni uczniowie również.

Udział obserwatorów na lekcji pozwolił nam lepiej poznać sposób, w jaki myślą i działają dzieci w konkretnej sytuacji, jak radzą sobie z problemem i jak nauczyciel reaguje na pomysły dzieci. Jako nauczyciele jesteśmy zbyt mocno przywiązani do własnych strategii działania i myślenia, uważając je za jedynie słuszne. Myślę, że mi też to umknęło, gdyż oczekiwałam od wszystkich uczniów jednego sposobu myślenia zgodnego z moim, jedynie słusznym. Taka postawa nauczyciela ogranicza aktywność uczniów, dziecko żyje w przekonaniu, że kolejny raz źle rozwiązało zadanie, bo nie zrobiło tego tak, jak oczekiwał nauczyciel i skutecznie zniechęca się do poszukiwania własnych schematów działania. Pora to jak najszybciej zmienić!

Po przeprowadzeniu kilku lekcji w swoich klasach, spotkałyśmy się, aby porozmawiać o naszych wątpliwościach i nowych pomysłach. Wspólnie doszłyśmy do wniosku, iż gra „Prostokąty" powinna być poprzedzona innymi zadaniami, aby dzieci nabyły więcej doświadczeń, które będą mogły wykorzystać przy wykonywaniu kolejnych zadań. Zakładamy, że kiedy uczniowie nabędą umiejętność układania prostokątów w sieci kwadratowej i „nacieszą się" tworzeniem obrazów z kolorowych kwadracików, będzie można przystąpić do gry według podanych wcześniej reguł.

Oto nasze propozycje zadań:

1. *Swobodna zabawa – układanie mozaik na planszy. Szacowanie i sprawdzenie poprzez ułożenie kolorów w ciągi – jeden pod drugim, porównywanie liczby kolorów i zliczanie, ile jest kolorowych kwadratów w danym kolorze.*
2. *Odbicie lustrzane – uczniowie układają połowę mozaiki. Następnie wymieniają się planszami i układają drugą część mozaiki.*
3. *Tworzenie sekwencji z kolorowych kwadratów. Kończenie sekwencji rozpoczętej przez nauczyciela lub innego ucznia*
4. *Tworzenie struktury 6 • 3: rzut pierwszą kostką to długość jednego z boków prostokąta, drugi rzut kostką to długość drugiego boku prostokąta. Na początku nie liczy się wynik, tylko tworzenie figur geometrycznych.*
5. *Gracze po kolei rzucają kostką i układają kolorowe kwadraciki na planszy w dowolne kształty zgodnie z liczbą wyrzuconych oczek na kostce. Wygrywa zawodnik, który wypełni do końca planszę. Jeśli pod koniec gry gracz wyrzuci za dużo oczek, traci kolejkę.*
6. *Uczniowie na planszy układają prostokąty, tak aby zakryć planszę. Następnie analizujemy sytuacje: ile ułożyli prostokątów, jaka jest najmniejsza możliwa liczba prostokątów.*
7. *Uczniowie na planszy układają kolorowe prostokąty. Każdy powinien obejmować jedną i tylko jedną liczbę oraz każdy powinien się składać z tylu kratek, ile wskazuje liczba (por. niżej).*

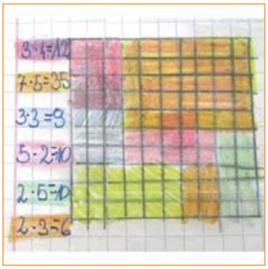



8. *Uczniowie grają przy użyciu dwóch sześciennych kostek, uzyskane liczby mogą dodawać, odejmować, mnożyć lub dzielić, przyjmując najlepszą dla siebie strategię, aby wypełnić całą planszę. Początkowo tworzą dowolne kształty, później jedynie prostokąty.*
9. *Nauczyciel rzuca dwoma kostkami, a uczniowie ilustrują iloczyn na planszy za pomocą kolorowych kwadratów. Cała klasa wykonuje to samo działanie. Nauczyciel zapisuje działania. Następnie analizujemy zadanie pod kątem zgodności działania z opisem graficznym na planszy.*
10. *Gracze po kolei rzucają kostką i układają kolorowe kwadraciki na planszy w kształt prostokąta, w zależności od liczby oczek uzyskanych na kostce. Wygrywa zawodnik, który pierwszy wypełni do końca planszę. Jeśli pod koniec gry uczeń wyrzuci za dużo oczek, traci kolejkę. Uczniowie zapisują działania po każdym rzuciei układają kolorowe kwadraty. Analiza zadania – sprawdzamy zapisy działań matematycznych z obrazem na planszy.*
11. *Gracze rzucają kostką ośmiościenną, pozostałe zasady jak wyżej.*

Prosta z pozoru plansza do gry zainspirowała nas do poszukiwania różnych sposobów jej wykorzystania przy realizacji innych treści matematycznych, np.

1. *Doskonalenie umiejętności dzielenia (poprzez mieszczenie).*
2. *Doskonalenie umiejętności mnożenia – zapisywanie i odczytywanie działań.*

Przygotowałam planszę (10 na 10 kratek), wypełnioną kolorowymi prostokątami. Zadaniem uczniów było odczytać i zapisać działanie.



Następnie zapisałam na tablicy działania, a zadaniem uczniów było narysować na planszy prostokąt odpowiedni do działania.
Igor: *Ale to nie jest takie proste, bo nie można po kolei wykonywać działań, trzeba kombinować, bo inaczej się nie* zmieści (nie będzie możliwe narysowanie wszystkich prostokątów).

3. *Liczby parzyste i nieparzyste (odkrywanie zależności):*

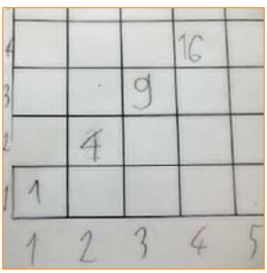
– *podziel planszę 4 kratki na 4 kratki na dwie równe części w dowolny sposób,*
– *podziel planszę (3 kratki na 5 kratek) na trzy równe części w dowolny sposób,*
– *podziel planszę (2 kratki na 5 kratek) na dwie równe części w dowolny sposób.*

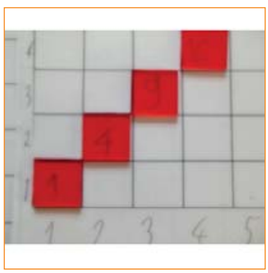
4. *Gra w statki.*
5. *Tabliczka mnożenia – plansza.*

Zauważyłam, iż niektóre dzieci nie korzystają z planszy „Tabliczka mnożenia", gdyż nie potrafią odszukać na planszy pola, które wskaże wynik działania np. 3 razy 5. Kolejny raz plansza „Prostokąty" okazała się nieoceniona. Zaproponowałam dzieciom grę „Statki", aby miały możliwość oswojenia się z miejscem pola na planszy. Po rozegraniu kilku partii przystąpiliśmy do uzupełnienia tabliczki mnożenia. Na pustej planszy (8 na 8 kratek) uczniowie odszukiwali:

- Pole, w które można wpisać wynik działania 1 razy 1, 2 razy 2, 3 razy 3,…

Ja: *Jaki będzie kolejny wynik?*
Igor: *16.*
Ja: *A kolejny?*
Igor: *25.*
Ja: *Dlaczego?*
Wiktoria: *Idziemy po kolei w górę: 1, 2, 3, 4…*
Igor: *Liczby, które mnożymy przez siebie, są takie same: 2 razy 2, 3 razy 3, 4 razy 4.*
Ja: *Co jeszcze zauważyliście?*
Magda: *Liczby dzielą plansze na połowę, po skosie.*

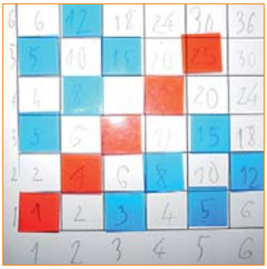




- Pole, w które można wpisać wyniki pozostałych działań np. 4 razy 3, 6 razy 4, 3 razy 5, 5 razy 6 itp.

Ja: *Jak wpisać pozostałe wyniki działań?*
Zuzia: *Liczby w słupkach wzrastają o 2, np. tutaj 2, 4, 6, 8 itd., trzeba ciągle dodawać 2.*
Cyprian: *Podobnie jest w poziomie. Wystarczy zwiększać liczby o 2 i już mamy wypełnione pola.*
Ja: *Co jeszcze zauważyliście, wypełniając tabelę?*
Magda: *Liczby po skosie rosną (czerwone pola), na przemian jest liczba parzysta i nieparzysta.*
Ja: *Dlaczego tak jest?*
Cyprian: *Dwie liczby parzyste pomnożone przez siebie dają liczbę parzystą, dwie nieparzyste dają nieparzystą, parzysta i nieparzysta to liczba parzysta.*
Ja: *Co jeszcze zauważyliście?*





Wiktor: *Po jednej i po drugiej stronie (pól zaznaczonych na czerwono) są te same liczby, np. 12 i 12, 15 i 15 (niebieskie pola).*
Ja: *Dlaczego?*
Cyprian: *Bo raz jest 3 razy 5, a potem jest 5 razy 3, na przemian. Nie musimy znać całej tabliczki mnożenia, bo wystarczy wiedzieć, że 2 razy 3 i 3 razy 2 daje ten sam wynik.*
Wiktor: *To ja już wiem, jak to robić! (korzystać z tabliczki mnożenia).*

Najkrótsze, ale zarazem bardzo ważne podsumowanie tej lekcji.

To tylko niektóre przykłady wykorzystania planszy „Prostokąty" do rozwijania myślenia matematycznego. Przygotowane przeze mnie zadania pobudziły uczniów do mówienia o tym, co zrobili, zainspirowały do poszukiwania prawidłowości.

Lektura szkolna a myślenie matematyczne

Spotkania „Bydgoskiego Bąbla" sprawiły, że postanowiłam zmienić sposób omawiania lektury pt. „Dzieci z Bullerbyn" i zaproponowałam dzieciom różne kontekstowe zadania matematyczne, aby zachęcić je do myślenia i działania nie tylko na matematyce.

1. Zajęcia plastyczne stały się okazją do utrwalania pojęć matematycznych, np. odcinki równoległe i porównywanie różnicowe.

Zadanie polegało na wykonaniu choinki z papierowych pasków. Choinka składała się z kilku warstw, różnej szerokości. Każda warstwa wykonana była z ośmiu pasków tej samej długości. Krótsze boki każdego paska po założeniu ich do środka, trzeba było przykleić w połowie długości każdego z nich. Tak przygotowane paski należało nałożyć na patyk tworząc rodzaj kwiatka. Różnica długości pasków w poszczególnych warstwach wynosiła 1,5 cm. Wspólnie zastanawialiśmy się, jak pociąć kartkę na paski tej samej szerokość. Było kilka pomysłów:
Magda: *Złożyć kartkę na połowę wzdłuż dłuższego boku kartki, potem jeszcze raz i jeszcze raz, a potem rozłożyć kartkę i po liniach złożenia pociąć kartkę.*
Cyprian: *Na kartce wzdłuż dłuższego boku odmierzyć 1 cm i zaznaczyć na kartce kropkę. Robić to tak długo, aż dojdziemy do końca kartki. To samo robimy po lewej stronie. Potem łączymy kropki ze sobą i mamy paski tej samej szerokości.*

Wykonanie kolejnego etapu wymagało od dzieci czujności, gdyż każda kolejna warstwa pasków była krótsza od poprzedniej o 1,5 cm. Większość dzieci skróciła paski tylko o 1,5 cm i zastanawiała się, jak wykonać kolejną warstwę, węższą od poprzedniej, skoro paseczki są tej samej długości.
Ja: *Co zrobić, aby paseczki były coraz krótsze?*
Zuzia: *Ja wiem! Drugą warstwę trzeba skrócić o 1,5 cm, a trzecią o 3 cm, kolejną o 4,5 cm. Każda od poprzedniej jest krótsza o 1,5 cm, ale od pierwszego paska to będzie kilka razy 1,5 cm.*

Po takiej wskazówce dzieci wykonały samodzielnie zadanie, a efekt końcowy (por. wyżej) mile ich zaskoczył.

2. Na lekcji matematyki rozwiązywaliśmy zadania „nietypowe".

***Zadanie 1*. Bosse kupił w sklepie 21 rybek trzech gatunków: skalary, neony i paletki. Skalarów kupił więcej niż neonów, ale dwa razy mniej niż paletek. Ile rybek każdego rodzaju kupił Bosse?**

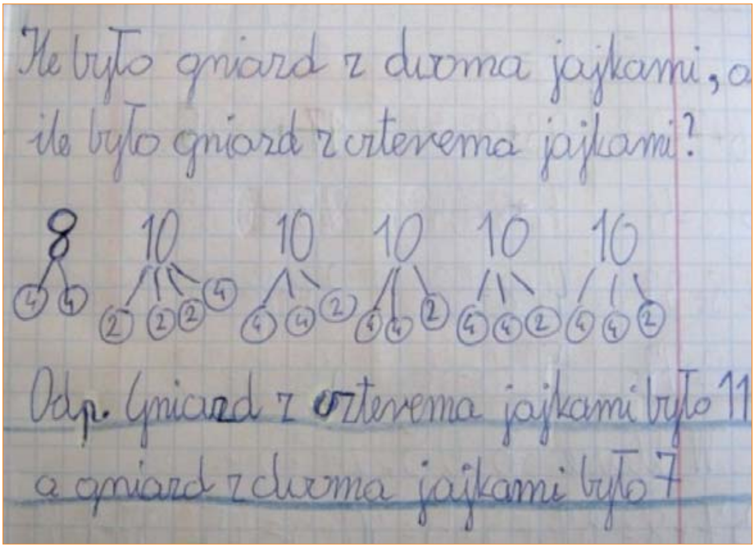

Magda: *Bo paletek jest najwięcej, skalarów jest mniej o połowę, a neonek jest najmniej. Jak paletek było 14, to skalarów było 7, połowę mniej i 0 neonów.*
Wiktoria: *To niemożliwe, bo kupił trzy gatunki rybek.*
Wiktoria: *Kupił 12 paletek, 6 skalarów i 3 neony.*
Ja: *Co zauważyliście?*
Zuzia: *Neonów było połowę mniej niż skalarów.*
Cyprian: *Neonów było cztery razy mniej niż paletek i dwa razy mniej niż skalarów.*
Ja: Jest inne rozwiązanie tego zadania?
Cyprian: *Nie ma, bo jeżeli byłoby 10 p, 5 s i 6 n, to razem ryb jest 21, ale w zadaniu podano, że skalarów było więcej niż neonów, a tu jest więcej neonów niż skalarów.*

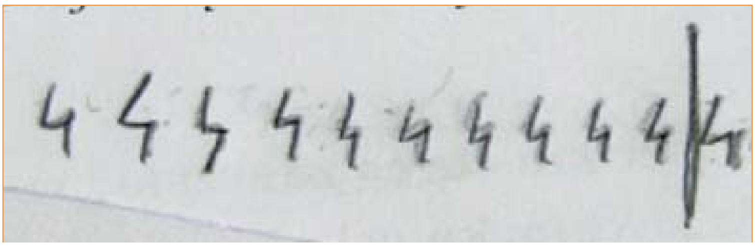
Zadanie 2. *Anna i Britta zorganizowały konkurs o świątecznych tradycjach Bożego Narodzenia na świecie. W czasie konkursu uczestnicy odpowiadali na 10 pytań. Za dobrą odpowiedź uzyskali 5 punktów, a za każdą złą tracili 4 punkty. Na ile pytań Olle odpowiedział dobrze, a na ile źle, jeśli łącznie zdobył 23 punkty?*

Ja: *Jak rozwiązaliście to zadanie?*
Magda: *Jeżeli dobrze odpowiedział na pięć pytań to otrzymał 25 punktów, więcej niż 23, więc próbowałam zmniejszać wynik o 4 i zwiększać o 5 tak długo, aż otrzymałam wynik 23. Następnie policzyłam, ile jest piątek i czwórek.*
Zuzia: *Szukałam takich dwóch liczb, żeby po odjęciu dały wynik 23.*
Igor: *23 jest także różnicą 50 – 27, 27 nie da się podzielić przez 4.*
Zuzia: *Tak, ale gdyby odpowiedział dobrze na wszystkie pytania i dostałby 50 punktów, to znaczy, że nie otrzymał żadnych punktów karnych, a Olle zdobył tylko 23 punkty, na niektóre pytania odpowiedział dobrze, a na inne źle.*
Wiktor: *Skąd te liczby 35 i 12?*
Zuzia: *Próbowałam, jak odpowiedział na dwa dobrze i na jedno źle, to różnica wynosiła 6, próbowałam dalej, jeszcze raz to samo, czyli już cztery dobrze i dwa źle i jeszcze raz to sześć, czyli razem sześć dobrze i trzy źle, to razem 18 punktów i jeszcze pięć, aż doszłam do liczby 23. Dobrze odpowiedział na siedem pytań, a na trzy odpowiedział źle.*

Zadanie 3. *W Bullerbyn 18 ptasich rodzin zbudowało gniazda. W kilku z nich były po dwa jajka, a w reszcie po 4 jajka. Łącznie w gniazdach było 58 jaj. Ile było gniazd z dwoma jajkami i gniazd z czterema jajkami?*

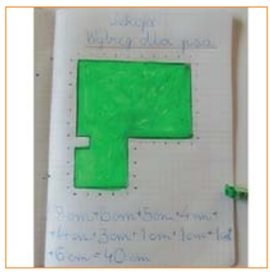
Ja: *Jak to rozwiązałyście?*
Ola: *Było 58 jajek, a 58 to pięć dziesiątek i osiem jedności. Osiem jajek można włożyć do dwóch gniazd po 4 jajka. 10 jajek można włożyć do dwóch gniazd po 4 jajka i jednego gniazda z dwoma jajkami. Gdyby każde z dziesięciu jajek rozłożyć na dwa gniazda, w których są po cztery jajka i jedno po 2 jajka, to razem byłoby 15 gniazd i jeszcze 2 gniazda po cztery jajka z tych ośmiu na początku, to razem byłoby 17 gniazd. A ma być 18 gniazd. Dlatego jedno gniazdo z czterema jajkami trzeba zamienić na dwa gniazda z dwoma jajkami i wtedy będzie 18 gniazd.*
Krzyś: *Narysowaliśmy 18 gniazd, a następnie w każdym z nich umieszczaliśmy (rysowaliśmy) po jednym jajku. Kiedy w gniazdach umieściliśmy już 58 jajek, okazało się, że są gniazda z czterema i trzema jajkami. Z gniazd, w których były trzy jajka, zabraliśmy (wymazaliśmy) jedno jajko i dokładaliśmy (dorysowaliśmy) do innego gniazda, w którym były trzy jajka. Robiliśmy to tak długo, aż w gniazdach były tylko 2 lub 4 jajka.*
Igor: *Zacząłem od 10 gniazd po cztery jajka w każdym gnieździe. Miałem już 40 jajek. Potem dodałem jeszcze cztery i pomyślałem, że będzie za mało jajek na pozostałe gniazda i zacząłem dodawać po dwa jajka tak długo, aż doszedłem do 58.*





3. Na lekcji techniki projektowaliśmy wybieg dla Svippa. Po rozmowie na temat opieki nad zwierzętami, projektowaliśmy na planszy „Prostokąty" wybieg dla psa i liczyliśmy jego obwód.

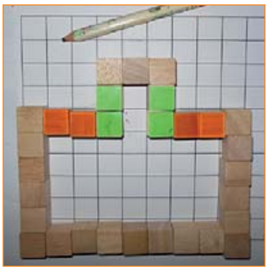




Kolejnym etapem było wykonanie makiety wybiegu dla Svippa. Agnieszka uznała, że potrzebne jest ogrodzenie, gdyż Svipp może uciec i postawiła na działce murek.
Agnieszka: *Jaki ten wybieg jest teraz mały, lepiej byłoby, gdybym postawiła płot, Svipp miałby więcej miejsca do biegania.*


Doświadczenie Agnieszki pokazało, że powierzchnia użytkowa działki różni się teraz od powierzchni samej działki. Ważne doświadczenie na przyszłość związane z planowaniem przestrzennym.

Zuzia bez przeliczania zauważyła, że te zagrody zbudowane są z tej samej liczby klocków.



Zuzia: *Bo, jakby przełożyć te dwa zielone klocki obok tych sześciu i jeszcze te dwa zielone położyć obok tych sześciu po drugiej stronie, to będzie taki sam układ klocków. A te pomarańczowe ułożone są tak samo jak te na dole i jak je przesunąć w górę, to będzie ich tyle samo.*

Przytoczone przykłady pokazują, że nauczyciele mają wiele możliwości i okazji do aranżowania środowiska edukacyjnego uczniów, aby pomóc dziecku budować własne struktury poznawcze. Przygoda z „Bydgoskim Bąblem" wpłynęła na zmianę mojego stylu pracy. Częściej zwracam uwagę na to, co mówią i robią dzieci, zachęcam je do zadawania pytań, do wyjaśniania strategii działania, daję im czas na poszukiwanie, nie wyręczam w myśleniu, nie daję gotowych rozwiązań, czekam na propozycje. Szukam też okazji do rozwijania myślenia matematycznego przy okazji realizacji innych treści edukacyjnych. Dzieci stały się uważniejsze, dostrzegają w otaczającej je rzeczywistości różne prawidłowości, słuchają siebie nawzajem, dyskutują, pytają, poszukują własnych rozwiązań, dokładniej analizują zadania matematyczne, współpracują ze sobą, wymieniają się pomysłami, są zaangażowane emocjonalnie, mają motywację do działania.

Moje pozytywne doświadczenia w pracy z trzecioklasistami, w nowym roku szkolnym wykorzystam w pracy z dziećmi sześcioletnimi w klasie pierwszej.

Katarzyna Szcząchor
nauczycielka edukacji wczesnoszkolnej. Pracująca w Szkole Podstawowej nr 63 w Bydgoszczy, w zawodzie ponad 20 lat.
W roku szkolnym 2012/2013 uczyła w klasie trzeciej i brała udział w projekcie IBE „Bydgoski Bąbel"

Instytut Badań Edukacyjnych

Głównym zadaniem Instytutu jest prowadzenie badań, analiz i prac przydatnych w rozwoju polityki i praktyki edukacyjnej.

Instytut zatrudnia ponad 150 badaczy zajmujących się edukacją – pedagogów, socjologów, psychologów, ekonomistów, politologów i przedstawicieli innych dyscyplin naukowych – wybitnych specjalistów w swoich dziedzinach, o różnorakich doświadczeniach zawodowych, które obejmują, oprócz badań naukowych, także pracę dydaktyczną, doświadczenie w administracji publicznej czy działalność w organizacjach pozarządowych.

Instytut w Polsce uczestniczy w realizacji międzynarodowych projektów badawczych w tym PIAAC, PISA, TALIS, ESLC, SHARE, TIMSS i PIRLS oraz projektów systemowych współfinansowanych przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego.

Instytut Badań Edukacyjnych

ul. Górczewska 8, 01-180 Warszawa | tel. +48 22 241 71 00
ibe@ibe.edu.pl | **www.ibe.edu.pl**

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.