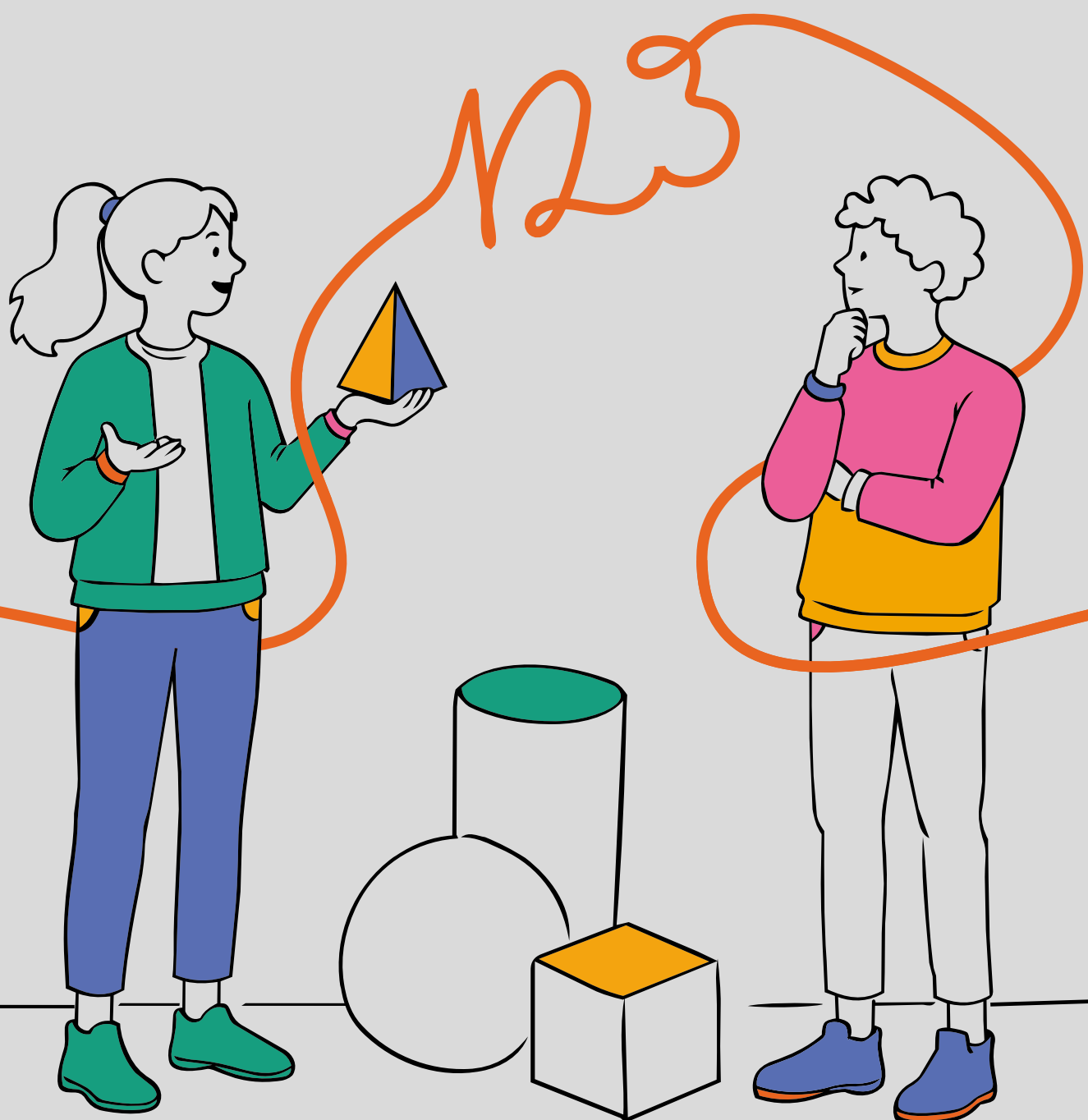


Matematyka w szkole podstawowej

Komentarz dydaktyczny do podstawy programowej



Autorzy: Marcin Karpiński, Małgorzata Bieńkowska, Sylwia Chmura, Konstanty Kostrzewski, Agata Markowicz-Narękwicz, Piotr Piskorski, Andrzej Rychlewicz, Katarzyna Rylska

Redakcja merytoryczna: Katarzyna Olejnik, Beata Ordakowska-Szumaska

Redakcja językowa: Michał Pranke

Projekt okładki: Michalina Walusiak

Rysunek na okładce: Zuzanna Gułaj, Michalina Walusiak

Skład: Wojciech Maciejczyk

Wydawca:

Instytut Badań Edukacyjnych – Państwowy Instytut Badawczy
ul. Górczewska 8, 01-180 Warszawa
tel. (22) 241 71 00; www.ibe.edu.pl



INSTYTUT BADAŃ
EDUKACYJNYCH
Państwowy Instytut Badawczy

Copyright© Instytut Badań Edukacyjnych – Państwowy Instytut Badawczy

Wzór cytowania:

Karpiński, M., Bieńkowska, M., Chmura, S., Kostrzewski, K., Markowicz-Narękwicz, A., Piskorski, P., Rychlewicz, A., Rylska, K. (2026). *Matematyka w szkole podstawowej. Komentarz dydaktyczny do podstawy programowej*. Instytut Badań Edukacyjnych – Państwowy Instytut Badawczy.

Materiał przygotowany przez Instytut Badań Edukacyjnych – Państwowy Instytut Badawczy w ramach zadania: „Tworzenie, aktualizacja i monitoring podstaw programowych oraz innych kluczowych regulacji systemu oświaty”, finansowanego ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej na podstawie umowy nr MEN/2025/DIR/89 z dnia 30 stycznia 2025 roku.

Warszawa 2026

Egzemplarz bezpłatny

Spis treści

Wstęp	5
1. Główne założenia i cele nauczania matematyki	6
2. Struktura wymagań szczegółowych	8
3. Rozwój kompetencji fundamentalnych	9
4. Rozwój kompetencji przekrojowych	15
5. Rozwój sprawczości uczniów	17
6. Doświadczenia edukacyjne	19
7. Rekomendowane strategie, metody i techniki w nauczaniu matematyki	26
7.1. Modele dydaktyczne wspierające aktywne uczenie się i rozwijanie kompetencji poznawczych uczniów	26
7.1.1. Model 5E (<i>engage, explore, explain, elaborate, evaluate</i>)	26
7.1.2. Model 4U (<i>understand, use, uncover, upgrade</i>)	28
7.1.3. Model 3A (aktywuj, absorbuj, aplikuj)	30
7.1.4. Cykl Kolba (doświadczenie, refleksja, teoria, zastosowanie)	31
7.1.5. Podsumowanie	32
7.2. Podejście STEAM	33
8. Najważniejsze wyzwania dydaktyczne w pracy nauczyciela matematyki	35
8.1. Klasy IV–VI	36
8.1.1. Dział 1: Liczby	36
8.1.2. Dział 2: Miary	44
8.1.3. Dział 3: Algebra	49
8.1.4. Dział 4: Figury	54
8.1.5. Dział 5: Dane	58
8.2. Klasy VII–VIII	60
8.2.1. Dział 1: Liczby	60
8.2.2. Dział 2: Algebra	64
8.2.3. Dział 3: Figury	67
8.2.4. Dział 4: Dane i zdarzenia losowe	71

9. Sposoby organizowania środowisk uczenia się określone w części ogólnej podstawy programowej a nauczanie matematyki	74
9.1. Aktywizacja i motywacja uczniów na lekcji matematyki	75
9.2. Zróżnicowany poziom uczniów i edukacja włączająca na lekcjach matematyki	76
9.2.1. Praca z uczniem zdolnym	77
10. Ocenianie w matematyce wspierające realizację celów przedmiotu	81
11. Korelacje międzyprzedmiotowe	84
12. Moduł ekonomiczno-finansowy	88
Rekomendowana literatura i źródła do wykorzystania w nauczaniu	90

Wstęp

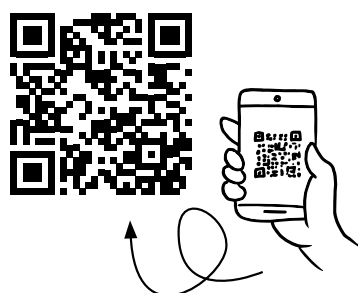
Oddajemy w Państwa ręce komentarz dydaktyczny do podstawy programowej określonej w Rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 11 marca 2026 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym (Dz.U. 2026 poz. 378).

O ile sama podstawa programowa określa, czego uczniowie uczą się w szkole, z jaką wiedzą i z jakimi umiejętnościami kończą dany etap edukacji, o tyle sposób osiągnięcia opisanych wymagań pozostaje w gestii nauczyciela. Komentarz przygotowany przez autorów podstawy programowej ma pomóc nauczycielom i nauczycielkom w przełożeniu jej na praktykę. Może być także przydatny dla osób przygotowujących programy nauczania czy podręczniki. Komentarz wyjaśnia założenia podstawy programowej, precyzuje niektóre jej zapisy i podpowiada, w jaki sposób można je realizować z uczniami.

Realizacja nowych podstaw programowych w każdym z przedmiotów powinna opierać się na ustaleniach współczesnej psychologii poznawczej, pedagogiki, psychologii rozwojowej i kognitywistyki oraz wykorzystywać strategie faktycznie wspierające proces uczenia się. Szczególny nacisk kładziemy na konieczność stosowania metod dydaktycznych o potwierdzonej skuteczności, w tym takich, które rozwijają u uczniów strategie metapoznawcze i samoregulację – jedne z najlepiej udokumentowanych i najskuteczniejszych interwencji edukacyjnych.

Zachęcamy nauczycieli i nauczycielki do korzystania z metod, które charakteryzują się wysoką efektywnością, takich jak umiejętnie udzielana informacja zwrotna, przywoływanie z pamięci (*retrieval practice*), przeplatanie (*interleaving*) czy uczenie się w odpowiednich odstępach czasu (*spaced practice*). Ich systematyczne stosowanie znacząco zwiększa trwałość i jakość przyswajanej wiedzy.

Ważnym uzupełnieniem komentarzy jest *Przewodnik po strategiach edukacyjnych*, który porządkuje i w przystępny sposób przedstawia najskuteczniejsze, oparte na dowodach rozwiązania dydaktyczne. Zachęcamy do korzystania z *Przewodnika*:



Zespół IBE PIB

1. Główne założenia i cele nauczania matematyki

Kompetencje matematyczne to jedne z czterech wyróżnionych w podstawie programowej kompetencji fundamentalnych. Ich rozwój stanowi podstawę skutecznego funkcjonowania w życiu codziennym ucznia i ma wpływ na zdobywanie wiedzy i umiejętności przedmiotowych. Matematyka dostarcza języka i narzędzi potrzebnych do opisywania zjawisk przyrodniczych i społecznych, kształtuje umiejętność argumentacji i krytycznej analizy informacji. Tak rozumiane kompetencje matematyczne są niezbędne uczniom także do funkcjonowania w życiu zawodowym już po zakończeniu edukacji.

Opisane w podstawie programowej cele kształcenia matematyki dla obu etapów – klas IV–VI oraz klas VII–VIII – można ująć w sześciu punktach, są to:

1. Wykonywanie obliczeń.
2. Odczytywanie i tworzenie informacji.
3. Stosowanie matematyki.
4. Rozwiązywanie problemów matematycznych.
5. Rozumowanie i argumentacja.

Na każdym z dwóch etapów nauczania pełne opisy tych sześciu punktów różnią się. Wyjątkiem jest cel pierwszy – zapis jest taki sam dla uczniów klas IV–VI i klas VII–VIII, ale w tym wypadku różnica osiągnięć wynika z dużo szerszego zasobu narzędzi matematycznych, którymi powinni posługiwać się uczniowie klas VII–VIII.

Warto podkreślić, że cele nauczania matematyki nie sprowadzają się wyłącznie do opanowania treści matematycznych. Obejmują także szeroki zakres kompetencji związanych ze współpracą, krytycznym myśleniem czy sprawczością. Cele nauczania matematyki powinny być brane pod uwagę nie tylko przy planowaniu całego procesu nauczania matematyki, w trakcie konstruowania programu nauczania, podręcznika czy egzaminu końcowego. Mogą się okazać przydatne także przy planowaniu lekcji. Obejmują one bowiem szeroki zakres umiejętności, z których każda powinna być rozwijana niemal na każdej lekcji, niezależnie od aktualnie omawianych treści matematycznych.

Tabela 1

Zmiany w podstawie programowej matematyki dla szkoły podstawowej od 1 września 2026 roku

JAK BYŁO?	JAK JEST?
Sformułowano cele kształcenia przewidziane na koniec szkoły podstawowej	Cele kształcenia są sformułowane osobno dla klas IV–VI oraz VII–VIII, co umożliwiło opisanie kolejnych etapów osiągnięcia celów przewidzianych na koniec szkoły podstawowej
Nacisk przede wszystkim na poprawność wykonywanych operacji matematycznych	Większy nacisk na rozumienie wykonywanych operacji matematycznych oraz zachęcanie do tworzenia własnych poprawnych strategii obliczeń i sposobów rozwiązywania problemów; ograniczenie stopnia złożoności rachunków arytmetycznych i algebraicznych
Przewaga matematyki narzędziowej w zapisach wymagań szczegółowych	W dziale „Myślenie matematyczne” wymagania dotyczące: • stosowania ogólnych metod rozwiązywania problemów • wyjaśniania swojego sposobu myślenia przy rozwiązywaniu problemu matematycznego • prowadzenia rozumowań matematycznych
Umiejętność dowodzenia przypisana do zagadnień geometrycznych	Stopniowe budowanie umiejętności uzasadniania (wymagania szczegółowe dotyczące rozumowania i wyjaśniania jego kolejnych kroków)
Niejasny zakres stosowania kalkulatorów i aplikacji komputerowych	Precyzyjne zapisy określające sytuacje, w których rekomenduje się posługiwanie się przez uczniów technologiami cyfrowymi
Pomijany aspekt umiejętności komunikacyjnych i umiejętności zespołowego rozwiązywania problemów	Wprowadzenie większej liczby zapisów podkreślających znaczenie komunikacji matematycznej, argumentowania oraz współpracy uczniów

Źródło: oprac. własne.

2. Struktura wymagań szczegółowych

Wymagania szczegółowe zostały opisane w podziale na sześć (klasy IV–VI) lub pięć działów (klasy VII–VIII).

KLASY IV–VI

Liczby	Miary	Algebra	Figury	Dane
Myślenie matematyczne				

KLASY VII–VIII

Liczby	Algebra	Figury	Dane i zdarzenia losowe
Myślenie matematyczne			

Kolejność pojawiania się w podstawie programowej tych działów i kolejność wymagań szczegółowych opisanych wewnątrz nich nie jest wiążąca. Wymagania szczegółowe nie narzucają też metod nauczania prowadzących do ich osiągnięcia. To nauczyciel decyduje, w jakiej kolejności i w jaki sposób będzie realizować poszczególne tematy.

Dział „Myślenie matematyczne” opisuje umiejętności, które nie są przypisane do konkretnych treści matematycznych. Opisane tu wymagania szczegółowe są powiązane niemal z każdym wymaganiem z innych działów i są niezbędne do sprawnego posługiwania się matematyką.

Budowanie tych umiejętności jest procesem długotrwałym – uczniowie zdobywają je stopniowo, a zrealizowanie wymagań opisanych w tym dziale nie jest możliwe w ciągu kilku lekcji. Wymaga to systematycznej pracy przez cały okres nauki.

3. Rozwój kompetencji fundamentalnych

Rozwój kompetencji fundamentalnych w edukacji matematycznej obejmuje wiele wymiarów, wśród których szczególne znaczenie mają kompetencje językowe i cyfrowe. Oba te elementy zostały wprost wskazane w podstawie programowej jako nieodłączna część procesu uczenia się matematyki – są niezbędne dla pełnego rozwoju ucznia. Matematyka, będąc jednocześnie nauką ścisłą i uniwersalnym językiem opisu rzeczywistości, stwarza wyjątkowe warunki do równoczesnego kształcenia tych kompetencji – od precyzyjnego formułowania myśli, argumentów i uzasadnień, po świadome i krytyczne korzystanie z technologii cyfrowych wspierających analizę danych i rozwiązywanie problemów.

Rozwijanie kompetencji językowych i cyfrowych w edukacji matematycznej w klasach IV–VIII stanowi jedno z kluczowych zadań szkoły i zostało podkreślone w podstawie programowej matematyki. W części ogólnej podstawy programowej zaznaczono, że uczeń, oprócz opanowania rachunków i algorytmów, powinien rozwijać umiejętność precyzyjnego formułowania myśli, logicznego argumentowania oraz uzasadniania własnych decyzji, a także świadomie wykorzystywać technologie cyfrowe w procesie analizy danych i rozwiązywania problemów. Matematyka staje się zatem przestrzenią, w której język i technologia spotykają się, by kształtować umiejętności niezbędne do dalszej edukacji i życia w społeczeństwie informacyjnym.

Kompetencje językowe w nauczaniu matematyki stanowią fundament świadomego uczenia się i są rozwijane na każdym etapie edukacyjnym, także w klasach IV–VIII. Nie sprowadzają się one jedynie do umiejętności odczytywania poleceń, ale obejmują szerszy zakres: od rozumienia i interpretacji treści zadań, przez przekształcanie języka potocznego na język matematyczny, aż po formułowanie własnych wniosków, uzasadnianie rozumowania i udział w dyskusji opartej na dowodach. Podstawa programowa wprost wskazuje, że uczeń na II etapie edukacyjnym „opisuje sposób swojego rozumowania i podaje przynajmniej jeden matematyczny argument uzasadniający jego poprawność”. Każde zadanie matematyczne staje się więc okazją nie tylko do wykonania obliczeń, ale także do doskonalenia precyzyjnego i logicznego języka.

Już w klasach IV–V uczniowie uczą się, że poprawne rozwiązanie zadania zaczyna się od właściwego zrozumienia jego treści. Przykładem może być zadanie: „W sklepie kupiono 3 kg jabłek po 5 zł za kilogram i 2 kg gruszek po 6 zł za kilogram. Ile wynosi łączny koszt zakupu?”. Zanim uczeń przystąpi do obliczeń, powinien własnymi słowami opowiedzieć treść i sens zadania: „Kupujemy owoce – jabłka i gruszki. Znamy cenę jednego kilograma i wagę owoców. Musimy policzyć, ile zapłacono razem”. Taka parafraza rozwija umiejętność

odróżniania danych istotnych od zbędnych i uczy przechodzenia od języka potocznego do matematycznego.

W starszych klasach (VI–VII) coraz częściej pojawiają się zadania otwarte i problemowe, które dopuszczają wiele dróg dojścia do wyniku. Uczniowie, rozwiązując takie zadania, np. dotyczące obliczania pola równoległoboku, mogą zastosować różne metody: podział figury na trójkąty, wykorzystanie wysokości albo przekształcenie równoległoboku w prostokąt. Każda z metod prowadzi do tego samego wyniku, lecz wymaga innego sposobu rozumowania. Dyskusja o zaletach i wadach poszczególnych metod uczy porównywania rozwiązań, oceny ich efektywności i wskazywania, które z nich są bardziej uniwersalne. Dzięki temu uczniowie rozwijają umiejętność argumentowania i krytycznego myślenia, a matematyka staje się dla nich przestrzenią świadomego wyboru i refleksji.

Cennym doświadczeniem edukacyjnym są debaty matematyczne wokół pytań typu „Czy zawsze...?”. Pytania takie zmuszają do głębszej analizy i prowadzą do odkrywania wyjątków oraz kontrprzykładów. Mogą to być przykładowo: „Czy suma dwóch liczb parzystych zawsze jest liczbą parzystą?”, „Czy każdy prostokąt jest równoległobokiem?”, „Czy każda liczba naturalna większa od 2 jest liczbą złożoną?”. Uczniowie przygotowują argumenty „za” i „przeciw”, wyszukują kontrprzykłady i prezentują swoje stanowisko przed klasą. Dzięki temu uczą się jasnego formułowania myśli, precyzyjnego stosowania pojęć matematycznych i prowadzenia dyskusji opartej na dowodach. Warto zauważyć, że debata tego typu rozwija także kompetencje społeczne – uczy słuchania innych, reagowania na kontrargumenty i budowania własnego stanowiska na podstawie logicznych przesłanek.

Rozwój kompetencji językowych wspiera również analiza błędów. Nauczyciel może zaprezentować rozwiązanie zawierające celowy błąd, np. sytuację, w której uczeń pomnożył ułamki, zamiast je sprowadzić do wspólnego mianownika przy dodawaniu. Zadaniem klasy jest wskazanie błędu, wyjaśnienie, dlaczego rozumowanie jest niepoprawne, oraz zapisanie poprawnego rozwiązania. Ćwiczenie to wymaga od uczniów formułowania spójnych i logicznych wypowiedzi, rozwija zdolność krytycznej analizy i kształci precyzję języka matematycznego.

Równie wartościowe są zadania wymagające pisemnych uzasadnień. Uczniowie mogą np. odpowiedzieć na pytania: „Uzasadnij, że liczba $\frac{2}{3}$ jest mniejsza od $\frac{3}{4}$ ”, „Wyjaśnij, dlaczego $0,999... = 1$ ” czy „Uzasadnij, że przekątne kwadratu są prostopadłe”. Zadania tego typu kształcą jasny i logiczny sposób komunikowania się oraz przygotowują do dalszej edukacji, w której pisemne formułowanie wniosków i uzasadnień matematycznych staje się standardem.

W praktyce szkolnej coraz częściej stosuje się także prowadzenie przez uczniów dzienników matematycznych. Uczniowie zapisują w nich własne strategie rozwiązywania zadań, refleksje nad trudnościami czy objaśnienia pojęć. Mogą np. zanotować: „Dzisiaj nauczyliśmy się o procentach. Najłatwiej zrozumiałem to, wyobrażając sobie, że 10% to jedna dziesiąta tabliczki czekolady”. Taka forma pracy rozwija kompetencje językowe, sprzyja autorefleksji i pokazuje, że matematyka jest związana z codziennym życiem.

Innym przykładem rozwijania kompetencji językowych jest praca w parach, w której jeden uczeń rozwiązuje zadanie, a drugi na bieżąco opisuje tok jego postępowania. Taka aktywność wymaga precyzyjnego wyrażania myśli i pozwala utrwalać terminologię matematyczną. Jeszcze inną metodą jest zadanie polegające na ułożeniu własnego zadania tekstowego na podstawie podanych danych liczbowych. Uczeń, konstruując treść zadania, musi zadbać o spójność, poprawność językową i jasne sformułowanie pytania.

Kompetencje językowe można rozwijać także przez prezentacje ustne i projekty edukacyjne. Uczniowie mogą przygotować plakat wyjaśniający własności wielokątów foremnych albo prezentację multimedialną o zastosowaniu ułamków w życiu codziennym. Przedstawiając efekty swojej pracy koleżankom i kolegom na forum zespołu klasowego, uczą się posługiwania precyzyjnym językiem, a równocześnie dbają o klarowną strukturę wypowiedzi i dostosowanie jej do odbiorcy.

W klasach VII–VIII pojawia się także potrzeba przygotowania do nauki dowodów matematycznych, które staną się ważnym elementem kształcenia w szkole ponadpodstawowej. Ćwiczenia typu „Wykaż, że...”, np. „Wykaż, że suma dwóch liczb nieparzystych jest parzysta”, wymagają od ucznia zbudowania uporządkowanej argumentacji, użycia odpowiednich pojęć i logicznego uzasadnienia. Dzięki temu uczeń rozwija umiejętność formułowania wypowiedzi w języku matematyki, która stanowi fundament dalszej edukacji na poziomie szkoły ponadpodstawowej.

Podsumowując, kompetencje językowe w matematyce są kształtowane poprzez różnorodne aktywności edukacyjne – od parafrazy treści zadań, przez analizę błędów i formułowanie pisemnych uzasadnień, po udział w debatach, prowadzenie dzienników matematycznych oraz przygotowywanie prezentacji ustnych i pisemnych. Wszystkie te aktywności uczą jasnego, logicznego i precyzyjnego wyrażania myśli, które jest nie tylko podstawą uczenia się matematyki, ale także kompetencją niezbędną do życia w świecie opartym na informacji i komunikacji.

Obok kompetencji językowych równie istotnym elementem kształcenia fundamentalnego w matematyce są kompetencje cyfrowe, które pozwalają uczniowi świadomie korzystać z narzędzi technologicznych w procesie uczenia się i rozwiązywania problemów.

Kompetencje cyfrowe na II etapie edukacyjnym obejmują krytyczne korzystanie z narzędzi cyfrowych w procesie analizy danych, modelowania i wizualizacji pojęć matematycznych. Podstawa programowa matematyki wskazuje np., że uczeń „dobiera sposób przedstawienia danych ułatwiający ich analizę, posługując się odpowiednimi aplikacjami komputerowymi” (wymaganie 4.2 dla klas VII–VIII).

W praktyce oznacza to, że uczeń w klasach IV–VI może np. przygotować tabelę z danymi liczbowymi dotyczącymi liczby przeczytanych książek w ciągu roku szkolnego, a następnie sporządzić wykres słupkowy i kołowy, analizując, jak różne formy przedstawienia tych samych danych wpływają na ich odbiór. Dyskusja o tym, który wykres najlepiej oddaje proporcje, uczy krytycznego podejścia do informacji. Innym przykładem może być analiza danych pogodowych z ostatniego tygodnia – uczniowie przygotowują wykres liniowy temperatur i sprawdzają, czy widoczny jest trend wzrostowy czy spadkowy. Dzięki temu matematyka łączy się z obserwacją rzeczywistości, a narzędzia cyfrowe stają się naturalnym wsparciem w procesie uczenia się.

Symulacje komputerowe są kolejnym sposobem rozwijania kompetencji cyfrowych. W klasach VII–VIII uczniowie mogą przeprowadzić tysiąc wirtualnych rzutów kostką i porównać częstość otrzymania każdej liczby z wartością teoretyczną. Mogą także badać, jak zmienia się rozkład wyników w zależności od liczby prób. Dzięki temu uczą się odróżniać zjawiska przypadkowe od ogólnych prawidłowości. Symulacje można rozszerzyć np. na analizę losowań Lotto, sprawdzanie prawdopodobieństwa wygranej w prostych grach losowych czy badanie wpływu wielkości próby na wiarygodność statystyczną wyników. W prostszej wersji uczniowie mogą korzystać z kalkulatorów losowych dostępnych online, a w bardziej zaawansowanej – pisać własne programy w Pythonie, które generują losowe dane i tworzą histogramy.

Wykorzystanie podczas zajęć GeoGebry i innych aplikacji geometrycznych daje uczniom możliwość dynamicznego badania własności figur. Korzystając z aplikacji, uczeń może np. skonstruować trójkąt równoramienny i przesuwać jego wierzchołek, obserwując zmiany miar kątów, badać symetrię osiową i obrotową. W klasach VII–VIII można poszerzyć te działania o badanie zależności między dwiema wielkościami w układzie współrzędnych. Uczniowie mogą np. przedstawić zależność między liczbą zakupionych biletów a łącznym kosztem, między czasem a drogą przy stałej prędkości czy między długością boku kwadratu a jego polem. Dzięki wizualizacji w GeoGebrze mogą obserwować, jak zmieniają się wykresy zależności, jak odczytać wartości z osi oraz jak interpretować punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych. Takie doświadczenia wspierają rozumienie proporcjonalności prostej i pomagają dostrzec praktyczne zastosowania matematyki w życiu codziennym.

Szczególną rolę w kształtowaniu kompetencji cyfrowych odgrywa myślenie algorytmiczne i programowanie. W praktyce szkolnej oznacza to, że w klasach VI–VII można to realizować np. przez schemat blokowy obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb, opisanie algorytmu sprawdzania, czy liczba jest pierwsza, lub też zapisanie kolejnych kroków generowania ciągu Fibonacciego. W klasach VII–VIII uczniowie mogą programować w językach blokowych (np. Scratch, mBlock), tworząc proste programy do obliczania pól figur czy analizowania danych w tabelach. Na bardziej zaawansowanych zajęciach mogą wykorzystywać Python, który pozwala np. napisać program wyliczający średnią arytmetyczną dużej liczby danych czy symulujący wyniki rzutów monetą. Programowanie wprowadza uczniów w świat algorytmicznego myślenia, rozwija precyzję i logiczne planowanie, a równocześnie wzmacnia zrozumienie struktury matematycznej zadań.

Nowoczesne technologie otwierają przed edukacją matematyczną dodatkowe możliwości. Druk 3D pozwala uczniom projektować bryły geometryczne w programach do modelowania przestrzennego, a następnie drukować je jako modele fizyczne. Mogą to być np. graniastosłupy i ostrosłupy o różnych podstawach czy wielościany foremne. Uczniowie, trzymając w ręku własnoręcznie zaprojektowany i wydrukowany sześcián lub dwunastościan, mają szansę znacznie lepiej rozumieć zależności między polem powierzchni a objętością czy między siatką a gotową bryłą.

Wirtualna rzeczywistość (VR) umożliwia uczniom zanurzenie się w przestrzeni matematycznej i wizualizowanie obiektów, które w podręczniku występują tylko jako rysunki. Dzięki specjalnym goglom mogą wejść do wnętrza bryły i zobaczyć ją z różnych perspektyw, np. obejrzeć sześcián „od środka”, obrócić go i sprawdzić, jak wyglądają jego ściany, krawędzie i wierzchołki. W klasach starszych uczniowie mogą dzięki VR dostrzec, jak z siatki powstaje bryła: złożyć wirtualny graniastosłup czy ostrosłup, a następnie rozłożyć go z powrotem na płaską figurę. VR pozwala także porównywać bryły, np. porównać objętość sześciánu. Takie doświadczenia rozwijają wyobraźnię geometryczną, ułatwiają rozumienie pojęć przestrzennych i sprawiają, że uczeń uczy się matematyki przez obserwację i działanie, a nie tylko przez zapamiętywanie definicji.

Sztuczna inteligencja staje się kolejnym narzędziem wspierającym proces uczenia się matematyki. Uczeń, korzystając z aplikacji opartych na AI, może otrzymywać zadania dostosowane do swojego poziomu, analizować najczęściej popełniane błędy i uzyskiwać wskazówki dotyczące kolejnych kroków. Przykładowo system może zauważyć, że uczeń popełnia błąd przy zamianie ułamków zwykłych na dziesiętne i zaproponować dodatkowe zadania ukierunkowane na tę trudność. Dla nauczyciela narzędzia AI są wsparciem w diagnozie i monitorowaniu postępów. Jednocześnie ważne jest, aby uczeń nie traktował AI jako „maszyny

podającej wynik”, ale jako narzędzie do refleksji nad własnym rozumowaniem. Dlatego w pracy dydaktycznej warto uwzględniać również zadania typu: „Zweryfikuj wynik podany przez aplikację – sprawdź, czy rozwiązanie jest poprawne i uzasadnij swoją odpowiedź”.

Kompetencje cyfrowe można rozwijać również przez pracę zespołową w środowiskach chmurowych. Uczniowie mogą wspólnie tworzyć arkusz kalkulacyjny, wprowadzając np. dane dotyczące wzrostu członków klasy, a następnie obliczać średnią, medianę, dominantę i odchylenie standardowe. Mogą też opracować wspólną prezentację, w której przedstawiać różne sposoby rozwiązania problemu, np. obliczenia pola figury metodą podziału na części lub za pomocą wzoru. Tego typu aktywności uczą nie tylko obsługi narzędzi cyfrowych, ale także odpowiedzialnej współpracy online, planowania pracy i dostrzegania ryzyka manipulacji danymi.

Podsumowując, rozwijanie kompetencji językowych i cyfrowych w matematyce w klasach IV–VIII jest nie tylko realizacją zapisów podstawy programowej, lecz także odpowiedzią na potrzeby współczesnego ucznia. Umiejętność jasnego wyrażania myśli, argumentowania i uzasadniania rozumowania przygotowuje do dalszej edukacji i kształci logiczne myślenie. Z kolei korzystanie z narzędzi cyfrowych, od prostych arkuszy kalkulacyjnych po technologie druku 3D, VR czy sztuczną inteligencję, uczy krytycznej analizy danych, wizualizacji pojęć i twórczego podejścia do problemów. Wspólne rozwijanie obu obszarów sprawia, że matematyka staje się przestrzenią budowania kompetencji fundamentalnych, które pozwalają uczniowi funkcjonować w świecie opartym na informacji, technologii i komunikacji.

4. Rozwój kompetencji przekrojowych

Matematyka jako przedmiot o szczególnym znaczeniu w edukacji ogólnej stanowi jeden z kluczowych obszarów kształtowania kompetencji przekrojowych. Nie ogranicza się jedynie do rozwijania sprawności rachunkowych czy znajomości pojęć i definicji, ale staje się przestrzenią do systematycznego budowania kompetencji poznawczych, społecznych i osobistych. Proces nauczania matematyki obejmuje zarówno działania analityczne, wymagające planowania i uzasadniania, jak i współpracę w grupie oraz indywidualną wytrwałość w rozwiązywaniu problemów.

Kompetencje poznawcze są rozwijane m.in. przez analizę i interpretację informacji, dostrzeganie zależności, formułowanie strategii rozwiązywania zadań i uogólnianie wyników. Uczeń, mierząc się z problemem matematycznym, uczy się nie tylko wykonywania obliczeń, lecz przede wszystkim planowania kolejnych kroków, oceny sensowności wyniku oraz uzasadniania swoich wyborów. Podstawa programowa podkreśla znaczenie „myślenia matematycznego”, w którym szczególnie eksponowane są działania związane z planowaniem strategii rozwiązania, wyjaśnianiem sposobu myślenia, podawaniem kontrprzykładów i weryfikacją argumentów. Na różnych etapach kształcenia można wskazać doświadczenia edukacyjne rozwijające te kompetencje. W klasach czwartych może to być porównywanie cen produktów w różnych opakowaniach, w klasach piątych – planowanie liczby płytek potrzebnych do wyłożenia podłogi i ocena, czy obliczenia uwzględniają zapas materiału. W klasie szóstej uczniowie mogą obliczać długość bieżni składającej się z prostokąta i dwóch półokręgów, dyskutując o przybliżeniach liczby π i dokładności wyniku. W klasach starszych warto zaproponować uczniom np. porównanie kosztów przejazdu różnymi środkami transportu czy zaplanowanie jednodniowej wycieczki, gdzie oprócz rachunków podejmują decyzję, które kryteria uwzględniają w obliczeniach. W takich zadaniach matematyka przestaje być tylko ćwiczeniem rachunkowym, a staje się przestrzenią do świadomego i krytycznego myślenia.

Kompetencje społeczne kształtowane na lekcjach matematyki dotyczą przede wszystkim współpracy, komunikacji i wspólnego podejmowania decyzji. Uczniowie uczą się przedstawiania własnych sposobów rozwiązywania problemów, konfrontowania strategii, przyjmowania cudzych argumentów oraz weryfikowania ich zasadności. Dyskusja matematyczna wymaga kultury rozmowy, umiejętności wyrażania myśli za pomocą języka matematycznego, a także gotowości do przyjęcia krytyki i poprawy własnych błędów. Praca w grupach nad zadaniami projektowymi, takimi jak przygotowanie budżetu klasowej wycieczki, opracowanie wyników

ankiety środowiskowej dotyczącej dojazdów do szkoły czy porównywanie różnych metod rozwiązania tego samego problemu geometrycznego, sprzyja budowaniu odpowiedzialności i postawy współpracy. Uczniowie uczą się przyjmowania określonych ról w zespole, a następnie prezentują efekty swojej pracy na forum, co rozwija zarówno ich kompetencje komunikacyjne, jak i świadomość, że sukces grupy zależy od zaangażowania wszystkich jej członków.

Kompetencje osobiste obejmują m.in. wytrwałość, samodyscyplinę, konsekwencję i odwagę intelektualną. Matematyka stwarza uczniom okazję do pracy z błędem, który traktowany jest nie jako porażka, lecz jako naturalny i wartościowy element procesu uczenia się. Doświadczenie trudności i stopniowe dochodzenie do poprawnego rozwiązania sprzyja rozwijaniu wytrwałości i samodyscypliny. Każde rozumowanie wymagające kilku etapów jest okazją do kształtowania postawy systematyczności i cierpliwości. Przykładem może być uzasadnianie własności figur geometrycznych, wykonywanie konstrukcji przy użyciu cyrkla i linijki czy też stopniowe przeprowadzanie obliczeń w zadaniach tekstowych wymagających kilku działań. Podczas rozwijania kompetencji osobistych istotne jest również prezentowanie wyników prac opartych na danych empirycznych, na przykład wyników badań ankietowych prowadzonych w klasie. W takich sytuacjach uczniowie uczą się jasno formułować przyjęte założenia i krytycznie oceniać poprawność obliczeń, sposób interpretacji danych i trafność wyciąganych wniosków.

Podstawa programowa wskazuje, że matematyka ma służyć kształceniu myślenia matematycznego, pracy na danych, formułowaniu argumentów i ocenie rozwiązań. Warunki realizacji akcentują spiralny charakter nauczania i konieczność równoczesnego rozwijania rozumienia instrumentalnego i relacyjnego. Wszystkie te elementy wspierają budowanie kompetencji poznawczych, społecznych i osobistych, które są niezbędne nie tylko w dalszej nauce, ale i w codziennym funkcjonowaniu ucznia.

Rozwijanie kompetencji przekrojowych na zajęciach matematyki jest procesem, w którym uczeń stopniowo odkrywa, że wiedza i doświadczenie wzajemnie się uzupełniają. Matematyka staje się wówczas nie tylko narzędziem do rozwiązywania zadań, ale przede wszystkim przestrzenią, w której kształtują się kompetencje krytycznego myślenia, współpracy i odpowiedzialnego podejmowania decyzji. Dzięki temu przygotowuje ona ucznia zarówno do dalszej nauki, jak i do świadomego funkcjonowania w dynamicznie zmieniającym się świecie.

5. Rozwój sprawczości uczniów

Rozwój sprawczości uczniów jest jednym z kluczowych celów nowej podstawy programowej. Sprawczość oznacza, że uczeń nie tylko zdobywa wiedzę, ale również doświadcza sytuacji, w których jego decyzje, działania i refleksje mają realny wpływ na przebieg nauki i na podejmowane wybory. Matematyka jako przedmiot stwarza do tego szczególnie dobre warunki – jej istotą jest bowiem rozwiązywanie problemów, planowanie strategii, analizowanie konsekwencji i poszukiwanie zależności. Dzięki temu uczeń, uczestnicząc w zajęciach matematyki, może rozwijać poczucie wpływu, odpowiedzialności i skuteczności działania.

Rozwijaniu sprawczości w edukacji matematycznej ma służyć tworzenie takich sytuacji dydaktycznych, w których uczeń nie działa jedynie według podanego schematu, ale ma możliwość samodzielnego planowania i wyboru drogi postępowania. Nauczyciel stawia wówczas ucznia w roli poszukiwacza i badacza, który formułuje hipotezy, sprawdza ich poprawność, dokonuje oceny rezultatów i – co szczególnie istotne – potrafi uzasadnić swoje decyzje. Proces ten wzmacnia zarówno indywidualną odpowiedzialność ucznia, jak i poczucie współodpowiedzialności w grupie. Wspólne rozwiązywanie zadań, dyskusje nad różnymi strategiami czy analiza błędów innych osób sprzyjają budowaniu poczucia przynależności do wspólnoty uczącej się, w której każdy głos jest ważny.

Efektem tak rozumianego podejścia jest stopniowe rozwijanie u uczniów czterech podstawowych obszarów związanych ze sprawczością. Po pierwsze, uczeń uczy się współpracy i współodpowiedzialności – rozumie, że praca grupowa wymaga podziału ról, uwzględniania różnych opinii i wspólnego poszukiwania rozwiązań. Po drugie, kształtuje nastawienie na rozwój – traktuje błąd jako element procesu uczenia się, a nie jako porażkę. Po trzecie, buduje przekonanie o własnej skuteczności – doświadcza, że jego wysiłek i pomysły mogą prowadzić do sukcesu. Po czwarte, rozwija samoregulację – planuje własne działania, monitoruje ich przebieg i ocenia rezultaty.

Szczególną rolę w kształtowaniu sprawczości odgrywają **doświadczenia edukacyjne**, po raz pierwszy wyraźnie wpisane do podstawy programowej. Są to zaplanowane, nierutynowe sytuacje uczenia się – projekty, badania, eksperymenty, zadania problemowe – które angażują ucznia w pełny cykl działania: od sformułowania problemu, przez planowanie kroków, po realizację, prezentację i refleksję. Doświadczenia edukacyjne różnią się od zwykłych zadań ćwiczeniowych tym, że mają charakter bardziej otwarty, wymagają podejmowania decyzji i pozwalają na wybór różnorodnych sposobów ich rozwiązania.

W klasach IV–VI powinny one opierać się na kontekstach bliskich uczniowi i ukazywać praktyczny wymiar matematyki. Może to być wspólne planowanie kosztów wyjazdu klasowego, w którym uczniowie analizują oferty transportu i żywienia, a następnie podejmują decyzję, która opcja jest najkorzystniejsza. Innym przykładem jest badanie czasu i odległości – porównywanie tras do szkoły i wybór najdogodniejszej drogi. Rozwijaniu sprawczości służy również konstruowanie modeli brył i porównywanie ich własności, a także sytuacje, w których uczniowie samodzielnie przygotowują zadania i zagadki dla rówieśników, a następnie wspólnie analizują poprawność rozwiązań.

W starszych klasach VII–VIII doświadczenia edukacyjne powinny przyjmować bardziej złożoną formę projektów i badań, w których matematyka łączy się z innymi dziedzinami i decyzjami bliskimi dorosłemu życiu. Mogą to być analizy finansowe, takie jak porównywanie ofert kredytowych czy obliczanie kosztów całkowitych zakupu przy różnych formach płatności. Innym przykładem jest badanie architektury – pomiary budynków, analiza symetrii i proporcji, obliczanie powierzchni i przygotowanie prezentacji wyników. Ważnym doświadczeniem jest także analiza strategii w grach logicznych i planszowych, która uczy przewidywania konsekwencji decyzji i argumentowania ich skuteczności. Szczególnie wartościowe są również zadania związane z krytycznym myśleniem, np. porównywanie wykresów przedstawiających te same dane i dyskusja nad tym, jak sposób wizualizacji może prowadzić do różnych wniosków.

Wspieraniu sprawczości sprzyja także refleksja nad własnym procesem uczenia się. Można ją rozwijać przez krótkie notatki podsumowujące lekcję, mapy postępów, ilustrujące, które umiejętności uczeń już opanował, a które wymagają dalszej pracy, czy portfolio zawierające wykonane zadania i projekty. Ważnym elementem jest również tworzenie wspólnych przestrzeni, takich jak klasowa tablica odkryć, na której uczniowie dzielą się spostrzeżeniami i pomysłami.

Wszystkie te działania pokazują, jak matematyka może stać się narzędziem rozwijania sprawczości. Kluczowe jest, by nauczyciel nie sprowadzał lekcji wyłącznie do odtwarzania schematów, ale konsekwentnie tworzył sytuacje, w których uczniowie działają samodzielnie, podejmują decyzje, argumentują, współpracują i dokonują refleksji nad własnymi doświadczeniami. W ten sposób matematyka przestaje być jedynie dziedziną wiedzy i rachunku, a staje się przestrzenią, w której uczeń buduje poczucie wpływu, odpowiedzialności i podmiotowości, co jest kluczowe w dalszej edukacji i w dorosłym życiu.

6. Doświadczenia edukacyjne

Doświadczenia edukacyjne w nauczaniu matematyki mają kluczowe znaczenie, ponieważ przekształcają bierne przyswajanie wiedzy w aktywny, angażujący proces uczenia się, który wspiera głębokie zrozumienie i trwały rozwój kompetencji. Przez doświadczenia edukacyjne rozumiemy wszelkie sytuacje dydaktyczne, w których uczeń aktywnie uczestniczy w procesie zdobywania wiedzy, wykorzystując swoje zmysły, zdolności poznawcze, emocje oraz wcześniej nabyte umiejętności. Doświadczenia edukacyjne – jak manipulowanie obiektami, modelowanie czy wizualizacje – pozwalają uczniom na zbudowanie głębszego zrozumienia pojęć abstrakcyjnych, a oparte na realnych sytuacjach uczą, jak analizować dane, wybierać strategie, testować rozwiązania i wyciągać wnioski – czyli stosować matematykę w praktyce.

Uczenie się przez działanie i odkrywanie sprawia, że matematyka staje się bardziej interesująca i znacząca. Uczniowie chętniej się uczą, gdy widzą sens w swoim działaniu, co wzmacnia ich motywację i wpływa na wzrost zaangażowania. Doświadczenia edukacyjne uczą krytycznego myślenia i samodzielnego dochodzenia do wniosków. Uczniowie nie tylko odtwarzają znane procedury, ale też tworzą własne strategie i analizują ich skuteczność. W konsekwencji doświadczenia edukacyjne sprawiają, że uczeń nie tylko „zna matematykę”, ale także zaczyna ją rozumieć, stosować i cenić jako narzędzie poznawania świata.

Nauczyciel, który wykorzystuje doświadczenia edukacyjne w nauczaniu, odgrywa nieco inną rolę niż w tradycyjnym modelu „przekazywania wiedzy”. Taki nauczyciel staje się raczej przewodnikiem i organizatorem procesu uczenia się, a nie tylko wykładowcą. Jego zadania polegają na planowaniu i organizacji doświadczeń, w tym na doborze metod, materiałów i sytuacji dydaktycznych, które umożliwiają uczniom aktywne poznawanie. Stwarza także bezpieczne środowisko uczenia się, aby uczniowie mogli eksperymentować bez obaw przed porażką. Nauczyciel wykorzystujący doświadczenia edukacyjne uczy przez działanie, dając uczniom przestrzeń do samodzielnego odkrywania; łącząc teorię z praktyką, pokazuje, jak poznane umiejętności i wiedzę może stosować w życiu codziennym. Zachęcanie do współpracy, dyskusji, zadawania pytań i formułowania własnych hipotez zwiększa autonomię uczniów, co wpływa pozytywnie na indywidualizację pracy, a tym samym wzmacnia poczucie sprawczości.

W codziennej praktyce szkolnej doświadczenia edukacyjne można realizować, wykorzystując różne metody i techniki, takie jak eksperymenty matematyczne, obserwacje, lekcje w terenie, zadania projektowe, gry dydaktyczne, budowanie modeli, zadania wykorzystujące aplikacje i narzędzia cyfrowe czy zadania z zastosowania matematyki w życiu codziennym. Dzięki nim uczniowie nie tylko uczą się matematyki, ale także rozwijają kompetencje fundamentalne

i pozytywne nastawienie do przedmiotu. Pracując w parach czy grupach, uczniowie komunikują się, dyskutują i negocjują rozwiązania. Przez współdziałanie ćwiczą posługiwanie się językiem matematycznym, opisując zachodzące procesy, tłumacząc swoje strategie rozwiązywania problemów, co w znaczący sposób wpływa na rozwój ich kompetencji językowych. Uczniowie, rozwiązując problemy w działaniu, wzmacniają rozumienie pojęć, a nie tylko zapamiętywanie procedur. Dzięki manipulacjom (np. układanie figur, korzystanie z miar, obliczenia w kontekście) uczniowie lepiej rozumieją abstrakcyjne pojęcia, jak ułamki, procenty czy proporcje. Praca na konkretach i doświadczeniach pomaga rozwijać logiczne myślenie, umiejętność argumentowania, szacowania i wnioskowania, co z kolei pozytywnie wpływa na rozwój kompetencji matematycznych. Do wykonywania doświadczeń czy zadań projektowych uczniowie mogą korzystać z narzędzi cyfrowych (kalkulatory, aplikacje, programy do wizualizacji, tablice interaktywne, GeoGebra). Wykorzystując narzędzia cyfrowe, uczą się wyszukiwać informacje, analizować dane, tworzyć wykresy i symulacje. Zyskują umiejętność pracy z technologią w sposób celowy i świadomy – traktując ją nie tylko jako „ułatwienie”, ale też jako narzędzie analizy i prezentacji danych, co znacząco podnosi ich kompetencje cyfrowe.

Aby zaprojektować doświadczenie edukacyjne na lekcję matematyki, należy przejść przez kilka etapów planowania dydaktycznego, z zachowaniem zasad celowości, adekwatności metodycznej oraz aktywizacji ucznia. Proces ten powinien prowadzić do samodzielnego odkrywania wiedzy przez uczniów przez działanie, obserwację i refleksję. Podstawowym etapem projektowania doświadczenia edukacyjnego jest określenie jasno zdefiniowanego celu nauczania, zgodnego z wymaganiem szczegółowym oraz poziomem rozwoju poznawczego uczniów. Cel powinien być mierzalny i obserwowalny, ukierunkowany na rozwój konkretnych kompetencji matematycznych, takich jak rozumowanie, modelowanie, argumentowanie czy posługiwanie się narzędziami matematycznymi. Projektując doświadczenie, należy uwzględnić aktualny poziom wiedzy uczniów oraz ich indywidualne potrzeby. Istotne jest zapewnienie dostępności zadań dla wszystkich uczestników danego doświadczenia, również tych ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi. Doświadczenie powinno być zaprojektowane w taki sposób, aby umożliwiała uczniom samodzielne odkrywanie zależności matematycznych. Wymaga to stworzenia sytuacji problemowej, w której uczniowie będą mogli:

- dokonywać obserwacji,
- przeprowadzać pomiary i obliczenia,
- analizować wyniki,
- wyciągać wnioski.

Konieczne jest zaplanowanie i przygotowanie niezbędnych materiałów edukacyjnych (np. przyrządów pomiarowych, kart pracy, narzędzi cyfrowych) oraz odpowiednie zorganizowanie przestrzeni edukacyjnej, sprzyjającej pracy indywidualnej i zespołowej. Kluczowym elementem doświadczenia edukacyjnego jest faza refleksji, w której uczniowie, na podstawie zgromadzonych danych i obserwacji, formułują wnioski prowadzące do zrozumienia pojęć matematycznych. Nauczyciel odgrywa w tym procesie rolę moderatora, zadającego pytania kierunkujące i wspierającego proces myślenia uczniów. Po zakończeniu doświadczenia uczniowie powinni mieć możliwość zastosowania nabytej wiedzy w nowych kontekstach.

Tabela 2

Cele doświadczeń edukacyjnych wraz z rekomendacjami dotyczącymi ich realizacji – klasy IV–VI

Doświadczenie edukacyjne	Cel doświadczenia	Rekomendacje dla nauczyciela
Uczeń indywidualnie lub w grupie opracowuje zestaw danych liczbowych związanych z aktualnym zagadnieniem społecznym lub środowiskowym, oblicza średnie arytmetyczne, interpretuje dane i przedstawia wnioski.	Uczeń rozwija umiejętności: ● samodzielnego pozyskiwania i opracowywania danych, ● stosowania pojęcia średniej arytmetycznej w praktyce, ● interpretowania wyników i wyciągania wniosków, ● prezentowania efektów swojej pracy.	Zachęcaj uczniów do samodzielności, ale oferuj wsparcie przy poszukiwaniu wiarygodnych źródeł danych. Zaproponuj lub pomóż uczniom wybrać aktualny i interesujący temat, np. zanieczyszczenie powietrza, marnowanie żywności, bezrobocie, ceny żywności itp. Zachęcaj, by temat nawiązywał do kontekstu lokalnego, co sprzyja większemu zaangażowaniu uczniów.
Uczeń w grupie przygotowuje symulację kosztów wybranego przedsięwzięcia (np. remontu, wycieczki klasowej) zbiera oferty cenowe, tworzy budżet, analizuje opłacalność różnych wariantów, przedstawia i uzasadnia propozycję najlepszego rozwiązania.	Uczeń rozwija umiejętności: ● analizy opłacalności i efektywności różnych wariantów wydatków, ● tworzenia budżetu z uwzględnieniem ograniczeń finansowych, ● lepszego rozumienia, jak planuje się wydatki w realnym życiu. Uczeń uświadamia sobie wartości pieniądza i kosztów życia. Uczeń kształtuje postawę odpowiedzialnego konsumenta.	Wyjaśnij uczniom, czym jest budżet i dlaczego planowanie finansów jest ważne w życiu codziennym. Zachęć uczniów do wyszukiwania ofert cenowych online lub kontaktowania się z firmami (np. biurami podróży, sklepami budowlanymi). Wprowadź uczniów w korzystanie z arkusza kalkulacyjnego do zestawienia i obliczeń.

Doświadczenie edukacyjne	Cel doświadczenia	Rekomendacje dla nauczyciela
Uczeń w grupie na podstawie własnych pomiarów wybranych przez siebie pomieszczeń lub fragmentów terenu sporządza ich plan w wybranej skali albo jego model przestrzenny – rzeczywisty lub w aplikacji cyfrowej.	Uczeń rozwija umiejętności: ● zrozumienia zależności między wymiarami w rzeczywistości a ich reprezentacją, ● planowania pracy, dzielenia się obowiązkami (pomiar, rysunek, modelowanie). Uczeń przygotowuje się do zadań praktycznych w zawodach technicznych, budowlanych, projektowych.	Zachęć uczniów do wyboru pomieszczenia lub fragmentu terenu, który mogą samodzielnie zmierzyć – np. sala lekcyjna, boisko, ogród szkolny, korytarz. Podziel uczniów na grupy i ustal role w zespole: mierzący, notujący dane, przeliczający skalę, projektujący plan/model, dokumentujący pracę (zdjęcia, opis procesu). Zapewnij uczniom miarki, taśmy miernicze, zeszyty, kalkulatory lub dostęp do aplikacji pomiarowych (np. w smartfonach).
Uczeń w toku realizacji wymagań szczegółowych każdego z działów, indywidualnie lub w grupie, rozwiązuje interdyscyplinarny problem z życia codziennego, który wymaga zastosowania wiedzy i umiejętności matematycznych z tego działu oraz z dotychczasowego toku nauki, problem definiuje sam lub z pomocą nauczyciela, prezentuje wyniki swojej pracy.	Uczeń rozwija umiejętności: ● dobierania odpowiednich narzędzi matematycznych do rozwiązania zadania, ● tworzenia rozwiązań opartych na logicznym myśleniu i analizie sytuacji, ● szerszego spojrzenia na zastosowanie nauki w codziennych sytuacjach.	Wprowadź pojęcie „problemu interdyscyplinarnego” – jako zadania, które łączy różne dziedziny życia i nauki, i którego rozwiązanie wymaga zastosowania matematyki. Pozwól uczniom samodzielnie zidentyfikować problem – indywidualnie lub w grupach, a dla uczniów mniej samodzielnych przygotuj listę możliwych tematów lub formuł pomocniczych. Pomóż uczniom jasno sformułować pytanie badawcze lub cel projektu.

Źródło: oprac. własne.

Tabela 3

Cele doświadczeń edukacyjnych wraz z rekomendacjami dotyczącymi ich realizacji – klasy VII–VIII

Doświadczenie edukacyjne	Cel doświadczenia	Rekomendacje dla nauczyciela
Uczeń podejmuje próbę opisu i analizy wybranego elementu architektury lub innego dzieła sztuki, wykorzystując język matematyki, dokonując obliczeń pozwalających na opis obiektu i analizę jego właściwości, prezentuje wyniki swojej pracy.	Uczeń rozwija umiejętność analizowania dzieła sztuki nie tylko pod kątem artystycznym, ale też konstrukcyjnym i matematycznym. Uczeń rozumie, w jaki sposób matematyka wspiera projektowanie i estetykę (np. symetria osiowa, fraktale, proporcje klasyczne).	Przedstaw uczniom przykłady, gdzie matematyka łączy się ze sztuką lub architekturą (proporcje, symetrie, kształty geometryczne w budowlach, mozaiki, wzory, fraktale). Pokaż konkretne dzieła lub elementy architektury. Zadbaj, aby obiekt umożliwiał dokonywanie pomiarów, obliczeń lub analizy geometrycznej.
Uczeń, pracując w grupie, zbiera informacje na temat wybranego typu produktu lub wybranej usługi finansowej oferowanej przez różne podmioty, wykorzystuje obliczenia matematyczne oraz narzędzia cyfrowe do porównania tych produktów lub usług, wyciąga wnioski i prezentuje je.	Uczeń rozwija umiejętności: • podejmowania decyzji finansowej na podstawie danych, a nie emocji czy reklamy, • rozpoznawania i analizy różnych produktów finansowych i ofert rynkowych. Uczeń kształtuje postawę świadomego konsumenta i użytkownika usług finansowych.	Wprowadź uczniów w temat produktów i usług finansowych, wyjaśnij podstawowe pojęcia: np. konto osobiste, kredyt, lokata, ubezpieczenie, karta kredytowa, leasing. Zaproponuj uczniom wybór konkretnego typu produktu lub usługi do analizy, np. konta bankowe dla młodzieży, oferty kredytów gotówkowych. Wskaż uczniom wiarygodne źródła informacji, np.: oficjalne strony banków i instytucji finansowych, porównywarki internetowe.

Doświadczenie edukacyjne	Cel doświadczenia	Rekomendacje dla nauczyciela
Uczeń, pracując w grupie, analizuje nieskomplikowaną grę strategiczną, opisuje możliwe strategie, sprawdza, czy gra ma strategię wygrywającą, opisuje w języku matematycznym, która decyzja ruchu w grze daje większe szanse wygranej.	Uczeń rozwija umiejętności: ● analizy możliwych strategii i scenariuszy w grze, ● przewidywania skutków konkretnych ruchów i decyzji, ● wnioskowania, która decyzja daje największe szanse wygranej (np. oparta na maksymalizacji zysku lub minimalizacji straty).	Przedstaw uczniom, czym jest gra strategiczna i czym różni się od gier losowych – podkreśl, że: wynik gry zależy od decyzji graczy, a nie przypadku, każdy ruch może wpływać na przyszłe decyzje przeciwnika.
Uczeń indywidualnie lub w grupie bada wpływ sposobu przedstawiania danych na ich interpretację, wyszukując lub samodzielnie przygotowując kilka różnych wykresów lub diagramów ilustrujących ten sam zestaw danych, oraz formułuje wnioski na temat możliwej manipulacji wizualnej i jej konsekwencji.	Uczeń rozwija umiejętności: ● formułowania świadomych wniosków dotyczących rzetelności prezentacji danych, ● tworzenia estetycznych i czytelnych prezentacji danych, Uczeń zyskuje świadomość konsekwencji nieetycznego przedstawiania danych, np. w reklamie, polityce, mediach.	Pokaż uczniom konkretne przykłady z mediów, reklam, polityki, gdzie wizualizacja danych może być zmanipulowana – nawet subtelnie. Przedstaw uczniom rolę wykresów i diagramów w prezentowaniu danych: pomagają zobaczyć trendy, porównania, proporcje.

Doświadczenie edukacyjne	Cel doświadczenia	Rekomendacje dla nauczyciela
Uczeń w toku realizacji wymagań szczegółowych każdego z działów, indywidualnie lub w grupie, rozwiązuje interdyscyplinarny problem z życia codziennego, który wymaga zastosowania wiedzy i umiejętności matematycznych z tego działu oraz dotychczasowego toku nauki, problem definiuje sam lub z pomocą nauczyciela, prezentuje wyniki swojej pracy.	Uczeń rozwija umiejętność: • dobierania odpowiednich narzędzi matematycznych do rozwiązania zadania, • tworzenia rozwiązań opartych na logicznym myśleniu i analizie sytuacji, • szerszego spojrzenia na zastosowanie nauki w codziennych sytuacjach.	Przypomnij pojęcie „problemu interdyscyplinarnego” – jako zadania, które łączy różne dziedziny życia i nauki, i którego rozwiązanie wymaga zastosowania matematyki. Pozwól uczniom samodzielnie zidentyfikować problem – indywidualnie lub w grupach, a dla uczniów mniej samodzielnych przygotuj listę możliwych tematów lub formuł pomocniczych. Pomóż uczniom jasno sformułować pytanie badawcze lub cel projektu. Wykorzystaj narzędzia z zakresu nauk przyrodniczych poznane przez ucznia na przedmiotach wprowadzonych od klasy VII (biologia, chemia, fizyka, geografia).

Źródło: oprac. własne.

7. Rekomendowane strategie, metody i techniki w nauczaniu matematyki

Tradycyjne sposoby uczenia matematyki, oparte na solidnych podstawach i doświadczeniach wielu pokoleń nauczycieli, wciąż mają swoją wartość i miejsce na lekcjach przedmiotu. Jednocześnie coraz wyraźniej widać potrzebę poszukiwania nowych dróg – takich, które pełniej angażują uczniów, rozwijają ich samodzielność, ciekawość i poczucie sensu uczenia się.

Warto zwrócić uwagę na pewne aspekty konstruktywizmu, czyli teorii uczenia się, według której wiedza nie trafia do ucznia w gotowej formie, lecz jest budowana przy pomocy narzędzi dostarczonych przez nauczyciela (odpowiedni zasób informacji i właściwie dobrane metody) oraz na bazie wcześniejszych doświadczeń, aktywności i refleksji ucznia. Kluczowe staje się środowisko nauczania – bogate w bodźce, wyzwania, współpracę i możliwość samodzielnego dochodzenia do wiedzy. W praktyce konstruktywizm oznacza przesunięcie akcentu z „nauczania” na „uczenie się”. Nauczyciel odgrywa rolę przewodnika, moderatora i projektanta doświadczeń edukacyjnych, a uczeń staje się aktywnym uczestnikiem procesu poznawczego.

Wprowadzenie opisanych poniżej modeli nauczania matematyki to nie tylko zmiana metod dydaktycznych, ale przede wszystkim fundamentalna zmiana myślenia o roli ucznia. Dzięki aktywnemu, refleksyjnemu i zróżnicowanemu uczeniu się możliwe jest jednocześnie rozwijanie wiedzy matematycznej oraz kompetencji przekrojowych, które są niezbędne w XXI wieku. Uczniowie nie tylko uczą się matematyki – uczą się myśleć, współpracować, planować, dbać o siebie i innych, rozumieć swoje możliwości i granice, a przede wszystkim – wierzyć w siebie i w to, że ich działania mają znaczenie. Tak przygotowana szkoła realnie wspiera młodych ludzi w odpowiedzialnym, satysfakcjonującym życiu w szybko zmieniającym się świecie.

7.1. Modele dydaktyczne wspierające aktywne uczenie się i rozwijanie kompetencji poznawczych uczniów

7.1.1. Model 5E (*engage, explore, explain, elaborate, evaluate*)

Model ten świetnie sprawdza się na lekcjach matematyki, pozwalając uczniom samodzielnie dochodzić do zrozumienia pojęć matematycznych, a nie jedynie powielać wzory. Składa się z 5 etapów:

- *Engage* – zaangażuj – wzbudzenie ciekawości, odwołanie się do wcześniejszej wiedzy.
- *Explore* – badaj – eksploracja nowych pojęć przez doświadczenia.
- *Explain* – wyjaśnij – wspólne formułowanie wniosków i pojęć.
- *Elaborate* – rozszerz – pogłębienie i zastosowanie wiedzy w nowych sytuacjach.
- *Evaluate* – oceń – refleksja, ewaluacja postępów uczniów.

Przykładowe zastosowanie

Temat lekcji: Czworokąty wokół nas – powtórzenie (klasy IV–VI)

Cel ogólny: Utrwalenie znajomości rodzajów czworokątów, ich własności oraz umiejętności ich rozpoznawania w realnym świecie.

Etap 1: *Engage* (zaangażuj)

Lekcję rozpoczynamy od minizagadki geometrycznej. Nauczyciel pokazuje fragmenty obiektów w szkole (np. dach, okno, boisko) i pyta: „Jaki kształt geometryczny tu się kryje? Ile boków i kątów ma ta figura?”.

Alternatywnie można wprowadzić wyzwanie detektywa geometrii: „Waszym zadaniem jest znaleźć jak najwięcej czworokątów wokół szkoły – w oknach, na dachach, na chodniku. Kto znajdzie najciekawsze figury?”.

Etap 2: *Explore* (badaj)

Uczniowie pracują w parach i wychodzą na krótki spacer wokół szkoły. Mają za zadanie odnaleźć i sfotografować różne przykłady czworokątów, np.:

- okna i drzwi – prostokąty, kwadraty,
- płytki chodnikowe i boisko – prostokąty, kwadraty,
- ławki, ogrodzenia – prostokąty,
- dachy budynków – trapezy, równoległoboki.

Etap 3: *Explain* (wyjaśnij)

Po powrocie do klasy uczniowie prezentują swoje zdjęcia. Dyskusja: Dlaczego dachy często mają kształt trapezu? Co daje prostokątny kształt okna?

Nauczyciel porządkuje wiedzę – wspólne przypomnienie definicji i własności poszczególnych czworokątów (kwadrat, prostokąt, równoległobok, romb, trapez).

Etap 4: *Elaborate* (rozszerz)

Uczniowie tworzą plakat „Czworokąty wokół szkoły”. Umieszczają zdjęcia obiektów, podpisują rodzaje czworokątów i ich cechy. Dodają krótkie notatki o praktycznym zastosowaniu kształtów (np. trapezowy dach – łatwiejszy spływ wody deszczowej).

Etap 5: *Evaluate* (ocień)

Każdy z uczniów w zeszycie rysuje dwa wybrane obiekty z wycieczki i opisuje, jaki to czworokąt, jakie ma własności, dlaczego należy do tej grupy.

Nauczyciel sprawdza poprawność i umiejętność uzasadniania.

Efekt: Uczniowie utrwalają znajomość czworokątów przez aktywną obserwację i praktyczne zastosowanie wiedzy w najbliższym otoczeniu. Lekcja łączy teorię z realnym doświadczeniem, rozwija spostrzegawczość i umiejętność klasyfikowania figur.

7.1.2. Model 4U (*understand, use, uncover, upgrade*)

Model 4U jest oparty na czterech etapach, które odzwierciedlają proces efektywnego uczenia się i rozwoju kompetencji:

- *Understand* – zrozum – zdobywanie nowych informacji i budowanie zrozumienia pojęć oraz problemów matematycznych.
- *Use* – użyj, zastosuj – stosowanie wiedzy w praktycznych kontekstach i rozwiązywanie zadań.
- *Uncover* – odkryj, uświadom sobie – refleksja nad wiedzą ukrytą, analiza głębszego sensu i wzorców, które wcześniej mogły nie być oczywiste.
- *Upgrade* – udoskonal – rozwijanie i pogłębianie wiedzy, poprawa rozumowania oraz wzrost kompetencji dzięki nowym wyzwaniom.

Model stawia ucznia w centrum procesu uczenia się i zachęca do krytycznego myślenia oraz samooceny.

Przykładowe zastosowanie

Temat lekcji: Wyrażenia algebraiczne (klasy VII–VIII)

Cel: Utrwalenie i zastosowanie wiedzy o wyrażeniach algebraicznych, rozwijanie umiejętności upraszczania, przekształcania i stosowania ich w zadaniach praktycznych.

Etap 1: *Understand* (zrozum)

Przypomnienie definicji: wyrażenie algebraiczne, zmienna, współczynnik, wyraz podobny.

Przykłady: $3x + 5$, $2a - b + 7$.

Uczniowie analizują przykłady w parach, rozpoznają wyrazy podobne i różne typy operacji matematycznych.

Etap 2: *Use* (użyj, zastosuj)

Upraszczenie wyrażeń algebraicznych: łączenie wyrazów podobnych, porządkowanie składników.

Przykłady zadań:

$$3x + 5x - 2 = ?$$

$$2a + 3b - a + 4b = ?$$

Uczniowie rozwiązują zadania w parach i wymieniają się strategiami przekształcania wyrażeń.

Etap 3: *Uncover* (odkryj, uświadom sobie)

Dyskusja: Jak zmiana kolejności wyrazów wpływa na wynik? Czy możemy przewidzieć wynik przed przekształceniem?

Odkrywanie wzorców przy dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu wyrażeń algebraicznych.

Uczniowie mogą stworzyć minitabelę: wyrazy podobne → wynik, aby zobaczyć reguły i powtarzalne schematy.

Etap 4: *Upgrade* (udoskonal)

Zadania bardziej zaawansowane:

- Upraszczenie i przekształcanie wyrażeń z nawiasami: $(2x + 3) + (4x - 5)$, $(3a + 2b) - (a - b)$.
- Tworzenie własnych wyrażeń algebraicznych i ich upraszczanie w grupach.
- Rozwiązywanie zadań tekstowych z zastosowaniem wyrażeń algebraicznych.

Efekt: Uczniowie potrafią rozpoznawać, upraszczać i przekształcać wyrażenia algebraiczne, odkrywają wzorce w działaniach algebraicznych i rozwijają umiejętność stosowania wiedzy w nowych sytuacjach matematycznych.

7.1.3. Model 3A (aktywuj, absorbuj, aplikuj)

Ten model wzmacnia pamięć długotrwałą i umożliwia głębsze zrozumienie, ponieważ angażuje uczniów w proces odkrywania, a następnie łączy umiejętności matematyczne z praktyką:

- Aktywuj – odwołanie się do wcześniejszych doświadczeń uczniów, sformułowanie problemu, wzbudzenie ciekawości.
- Absorbuj – zdobywanie nowej wiedzy przez obserwację, analizę, eksperymentowanie i pracę z modelem.
- Aplikuj – zastosowanie wiedzy w praktyce, rozwiązywanie problemów, tworzenie własnych rozwiązań.

Przykładowe zastosowanie

Temat lekcji: Twierdzenie Pitagorasa (klasy VII–VIII)

Cel: Utrwalenie i praktyczne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa, rozwijanie umiejętności rozwiązywania zadań geometrycznych z wykorzystaniem zależności między bokami trójkąta prostokątnego.

Etap1: Aktywuj

Nauczyciel pokazuje przykłady trójkątów prostokątnych z życia codziennego, np. drabina oparta o ścianę, nachylenie dachu, długość przekątnej prostokątnej tablicy.

Pytania dla uczniów: „Jak możemy obliczyć długość przekątnej prostokąta? Co łączy dwa krótsze boki z przekątną?”

Uczniowie w parach próbują odkryć zależność, przypominając sobie właściwości trójkątów prostokątnych.

Etap 2: Absorbuj

Nauczyciel wprowadza twierdzenie Pitagorasa.

Przykłady obliczeń:

- Znalezienie długości przeciwprostokątnej, jeśli dane są długości przyprostokątnych.
- Znalezienie długości przyprostokątnej, jeśli dana jest przeciwprostokątna i druga przyprostokątna.

Uczniowie wykonują kilka prostych zadań w zeszytach lub na tablicy, utrwalając wzór.

Etap 3: Aplikuj

Uczniowie w parach lub grupach rozwiązują zadania praktyczne, np.:

- Obliczanie wysokości drabiny opartej o ścianę.
- Obliczanie długości przekątnej prostokątnej boiska lub prostokątnego stołu.

Uczniowie mogą też wymyślać własne przykłady z życia codziennego do zastosowania twierdzenia Pitagorasa.

Efekt: Uczniowie potrafią stosować twierdzenie Pitagorasa w różnych zadaniach geometrycznych i praktycznych, rozumieją zależność między bokami trójkąta prostokątnego i potrafią samodzielnie tworzyć zadania wykorzystujące tę zależność.

7.1.4. Cykl Kolba (doświadczenie, refleksja, teoria, zastosowanie)

Cykl Kolba doskonale oddaje dynamikę uczenia się przez doświadczenie i sprawia, że matematyka staje się praktyczna i zrozumiała:

- Doświadczenie – uczestnictwo w sytuacji problemowej.
- Refleksja – analiza doświadczenia i jego efektów.
- Teoria – formułowanie uogólnień i reguł.
- Zastosowanie – wykorzystanie zdobytej wiedzy w nowym kontekście.

Przykładowe zastosowanie

Temat lekcji: Graniastosłupy w naszym otoczeniu (klasy IV–VI)

Cel: Uczniowie poznają cechy graniastosłupów, potrafią je rozpoznawać w otoczeniu i obliczać ich pole powierzchni oraz objętość.

Etap 1: Doświadczenie

Uczniowie odbywają krótki spacer po sali, na korytarzu lub wokół szkoły. Mają za zadanie odnaleźć i naszkicować przedmioty przypominające graniastosłupy: skrzynki, kartony, pojemniki, elementy budynków. Uczniowie manipulują przedmiotami, próbując odgadnąć wymiary i kształty.

Etap 2: Refleksja

Po zakończeniu spaceru uczniowie w grupach omawiają swoje obserwacje: Co zauważyli? Jakie przedmioty przypominają graniastosłupy? Jak różnią się od siebie wysokością,

kształtem podstawy, kształtem ścian bocznych? Dyskusja pozwala uczniom uświadomić sobie różnorodność graniastosłupów w otoczeniu.

Etap 3: Teoria

Nauczyciel wspólnie z uczniami omawia klasyfikację graniastosłupów, przypomina wzory na pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupa. Uczniowie obliczają pole powierzchni i objętości w zeszytach lub na tablicy.

Etap 4: Eksperyment/ zastosowanie

Uczniowie wybierają jeden obiekt i obliczają pole powierzchni bocznej, całkowitej i objętość.

Zadania dodatkowe: porównanie wielkości różnych graniastosłupów i zastosowanie ich w praktyce (np. który pojemnik pomieści więcej wody).

Uczniowie mogą też wymyślać własne zadania i prezentować je klasie.

Efekt: Uczniowie potrafią rozpoznawać graniastosłupy w otoczeniu, obliczać ich pole i objętość, rozumieją różnorodność kształtów przestrzennych oraz umieją zastosować wiedzę w praktyce.

7.1.5. Podsumowanie

Zastosowanie omówionych powyżej modeli planowania lekcji i nauczania w edukacji matematycznej przynosi liczne korzyści:

- rozwój myślenia matematycznego i kompetencji rozwiązywania problemów,
- większa motywacja uczniów dzięki aktywności i współpracy,
- lepsze zrozumienie pojęć matematycznych,
- indywidualizacja procesu uczenia się,
- lepsze przygotowanie uczniów do realnych sytuacji życiowych.

Modele te umożliwiają uczniom aktywne odkrywanie wiedzy, doświadczenia praktyczne, refleksję i samodzielne wyciąganie wniosków. Ponadto skutecznie angażują uczniów, rozbudzają myślenie krytyczne i umożliwiają zastosowanie teorii w praktyce.

Metoda projektu jest naturalnym uzupełnieniem tych podejść. Uczniowie samodzielnie wybierają temat lub problem, planują działania, przeprowadzają eksperymenty, analizują wyniki i prezentują efekty swojej pracy. Projekt edukacyjny pozwala na wdrożenie kompleksowej, samodzielnej i kreatywnej pracy badawczej, w której matematyka staje się narzędziem do opisu świata.

W tym samym duchu warto wprowadzić **grywalizację**, która wzbogaca proces uczenia się dzięki mechanizmom typowym dla gier dla gier: punkty, poziomy, wyzwania, rywalizację i nagrody. Grywalizacja nie tylko zwiększa motywację i zaangażowanie uczniów, ale pozwala też natychmiast weryfikować postępy, wspierać współpracę zespołową i utrwalać wiedzę matematyczną w atrakcyjnej formie.

Synergia omówionych podejść:

- Modele 5E, 4U, 3A, cykl Kolba uczą aktywnego odkrywania wiedzy, refleksji i zastosowania w praktyce.
- Projekty edukacyjne umożliwiają uczniom realizację kompleksowych zadań badawczych, planowanie i prezentację wyników.
- Grywalizacja wprowadza element zabawy, rywalizacji i natychmiastowej informacji zwrotnej, co dodatkowo wzmacnia zaangażowanie i motywację.

W efekcie uczniowie doświadczają matematyki jako praktycznego, kreatywnego i angażującego narzędzia do rozwiązywania realnych problemów, co sprawia, że nauka staje się pełniejsza i bardziej efektywna.

7.2. Podejście STEAM

Autorzy podstawy postulują przejście od izolowanych lekcji matematyki ku zintegrowanemu modelowi STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics*). Rezygnacja ze schematycznych, jednostronnych metod nauczania na rzecz podejścia interdyscyplinarnego sprzyja rozwijaniu u uczniów kompetencji krytycznego myślenia oraz stosowania matematyki w realnych sytuacjach. Aby jednak osiągnąć pełną integrację tych obszarów, niezbędna jest wnikliwa analiza elementów składających się na model STEAM oraz ich powiązań z matematycznymi podstawami. W podejściu STEAM matematyka (M) nie jest tylko jednym z równorzędnych elementów – pełni funkcję łącznika oraz uniwersalnego języka, który opisuje pozostałe dziedziny. To dzięki niej możliwe jest zarówno sprawdzanie hipotez naukowych, jak i usprawnianie rozwiązań inżynierskich.

Analiza wpływu poszczególnych obszarów na nauczanie matematyki pokazuje wyraźne zależności:

- **Science (nauka):** eksplorowanie zjawisk przyrodniczych nadaje matematyce konkretny, doświadczalny kontekst. Uczeń nie operuje już abstrakcyjnymi liczbami, lecz wykorzystuje funkcje, statystykę czy rachunek prawdopodobieństwa do opisu rzeczywistych procesów.

- **Technology (technologia):** narzędzia cyfrowe przestają być jedynie pomocą wizualną, a zaczynają wspierać myślenie komputacyjne. Programy do geometrii dynamicznej czy modelowania algorytmicznego umożliwiają testowanie zależności i ukazują matematykę jako fundament współczesnych technologii.
- **Engineering (inżynieria):** zadania konstrukcyjne wymagają praktycznego zastosowania geometrii i trygonometrii. Matematyka staje się tu narzędziem działania, a poprawność obliczeń warunkuje funkcjonowanie stworzonego rozwiązania.
- **Arts (sztuka):** wprowadzenie elementów estetyki i kreatywności rozwija wyobraźnię przestrzenną i sprzyja nieszablonowemu myśleniu. Uczniowie zaczynają dostrzegać matematyczne struktury w świecie – od symetrii po fraktale – co wspiera intuicję potrzebną przy rozwiązywaniu złożonych problemów.

Wszystkie te obszary wzajemnie się uzupełniają, tworząc efekt synergii, który zmienia naukę matematyki z odtwarzania schematów w proces odkrywania zależności. Z perspektywy psychologii poznawczej interdyscyplinarność STEAM wzmacnia motywację wewnętrzną, ponieważ nadaje nauce wyraźny sens praktyczny.

8. Najważniejsze wyzwania dydaktyczne w pracy nauczyciela matematyki

W tym rozdziale przedstawiono uwagi do wybranych wymagań szczegółowych, ilustrując je niekiedy przykładami, które pomogą wyjaśnić zakres opisanego wymagania, a także wskazując metody nauczania, które mogą być pomocne dla jego osiągnięcia. Wymagania uporządkowane są tak samo, jak w zapisach podstawy programowej. Osobno zatem omówiono wymagania dla klas IV–VI i dla klas VII–VIII. Wyjątkiem jest dział *Myślenie matematyczne*, który omawiany jest jako pierwszy.

W dziale tym wymagania szczegółowe opisane są w takich samych trzech punktach dla obu poziomów, a różnice tkwią w poziomie umiejętności osiąganych przez dzieci młodsze i starsze w obrębie tych punktów. Różnice te łatwo dostrzec, gdy porówna się zapisy dla obu poziomów nauczania. Zestawienie przedstawiono poniżej.

Tabela 4

Zestawienie wymagań szczegółowych z podstawy programowej matematyki – dział „Myślenie matematyczne”

Klasy IV–VI	Klasy VII–VIII
1) Uczeń stosuje ogólne metody rozwiązywania problemów matematycznych, w tym: a) zapisuje związki między danymi w zadaniu (np. za pomocą rysunku, diagramu lub innego skrótowego sposobu przedstawiania danych), b) tworzy strategię rozwiązania problemu przez dzielenie rozwiązania na etapy, c) ocenia sensowność rozwiązania (np. przez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku).	1) Uczeń stosuje ogólne metody rozwiązywania problemów matematycznych, w tym: a) zapisuje związki między danymi występującymi w zadaniu w sposób ułatwiający analizę problemu, b) analizuje swoje rozwiązanie problemu i – jeśli to możliwe – upraszcza rozwiązanie, c) stawia dodatkowe pytania wynikające z otrzymanego rozwiązania, d) dostrzega podobieństwa między metodami rozwiązywania różnych problemów matematycznych.

Klasy IV–VI	Klasy VII–VIII
2) Uczeń wyjaśnia swój sposób myślenia przy rozwiązywaniu problemu matematycznego, w tym: a) opowiada o swoim sposobie rozwiązania zadania, b) podaje argumenty uzasadniające kolejne kroki rozwiązania.	2) Uczeń wyjaśnia swój sposób myślenia przy rozwiązywaniu problemu matematycznego przez: a) podawanie argumentów matematycznych uzasadniających kolejne kroki rozumowania, b) budowanie uzasadnienia odwołującego się tylko do niezbędnych argumentów, c) formułowanie wniosków wynikających z rozumowania.
3) Uczeń prowadzi rozumowania matematyczne, w tym: a) podaje przykłady obiektów matematycznych spełniających dane warunki oraz obiektów ich niespełniających, b) stosuje metodę prób i poprawek, c) rozważa wszystkie przypadki, d) używa rozumowania proporcjonalnego, także jako metody ułatwiającej mnożenie i dzielenie.	3) Uczeń prowadzi rozumowania matematyczne, wykazując przy tym umiejętność: a) odróżniania twierdzenia od twierdzenia odwrotnego, b) stosowania nieskomplikowanych, jednokrokowych rozumowań nie wprost, c) uogólniania zaobserwowanych przypadków szczególnych, d) uzasadniania, np. przez podanie kontrprzykładu, że dana własność nie zachodzi.

Źródło: oprac. na podstawie [Dz.U. 2026 poz. 378](#).

8.1. Klasy IV–VI

8.1.1. Dział 1: Liczby

Dział ten obejmuje pojęcia i umiejętności związane z rachunkami i własnościami liczb. Dla budowania sprawczości uczniów warto stosować takie metody nauczania, które dadzą im szansę na tworzenie własnych strategii obliczeń. Równie ważne jest tworzenie sytuacji, w których uczeń może swobodnie opowiedzieć o wybranym sposobie liczenia i uzasadnić swój wybór.

Wymaganie 1.3)

Uczeń rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10.

Uczniowie powinni umieć nie tylko wprost korzystać z wymienionych tu cech podzielności, ale także wyciągać z nich wnioski.

Przykłady pytań

- Jakie liczby parzyste podzielne są przez 5?
- Jak bez wykonywania dzielenia można sprawdzić, czy liczba jest podzielna przez 6?
- Podaj przykład liczby podzielnej przez 3, która nie jest podzielna przez 9.

Wyzwania

- Mylenie cech podzielności i trudność z ich wykorzystaniem w rozumowaniach.

Warunki realizacji

- Graficzna ilustracja wielokrotności na karcie 100 liczb.
- Wykorzystanie cech podzielności „wstecz” – uczeń podaje przykłady liczb podzielnych np. przez 3 albo przez 4.
- Łączenie cech podzielności – uczeń sprawdza, czy liczba jest podzielna przez 2 i przez 3 (czyli czy jest podzielna przez 6).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń stosuje cechy podzielności w odpowiedzi na samodzielnie postawione przez siebie pytania.

Wymagania 1.4) i 1.5)

- Uczeń zna pojęcie liczby pierwszej i rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika wskazuje cecha podzielności.
- Uczeń rozkłada liczby jedno- lub dwucyfrowe na czynniki pierwsze.

Uczniowie powinni przede wszystkim rozumieć, na czym polega rozkład liczby na czynniki pierwsze, a do tego nie są konieczne ćwiczenia w rozkładaniu liczb wielocyfrowych. Wystarczy rozkładanie liczb dwucyfrowych.

Wyzwania

- Brak zrozumienia definicji liczby pierwszej, traktowanie wszystkich liczb parzystych, w tym 2, jako liczb złożonych.
- Niedostrzeganie związku rozkładu na czynniki pierwsze z podzielnością.

Warunki realizacji

- Poszukiwanie liczb pierwszych na karcie 100 liczb.
- Korzystanie z cech podzielności przy poszukiwaniu czynników pierwszych.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń stosuje rozkład na czynniki pierwsze, np. dla uproszczenia mnożenia liczb naturalnych.

Wymaganie 1.6)

Uczeń znajduje wspólne dzielniki i wspólne wielokrotności dwóch liczb jedno- lub dwucyfrowych, w tym największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność.

Warto zwrócić uwagę, że do zrealizowania tego wymagania nie jest konieczna umiejętność korzystania z tradycyjnie używanych w szkole algorytmów znajdowania NWW (najmniejszej wspólnej wielokrotności) i NWD (największego wspólnego dzielnika). Wystarczy umiejętność rozkładania liczb na czynniki pierwsze i porównanie rozkładów liczb, których NWW lub NWD chcemy wyznaczyć. Zatem nauczyciel może wprowadzać te algorytmy, ale nie musi tego robić. Nauczyciel może też wprowadzić algorytm Euklidesa, jeśli uzna, że uczniowie są na to gotowi i że będzie to z pożytkiem dla nich. Algorytm ten opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli dwie liczby mają wspólny dzielnik, to jest to też dzielnik różnicy tych liczb. Przy omawianiu podzielności odpowiednio pokierowani uczniowie sami mogą to dostrzec. Z algorytmem Euklidesa uczniowie mogą się spotkać na lekcjach informatyki w starszych klasach.

Wyzwania

- Mechaniczne korzystanie z algorytmów obliczania wspólnych dzielników i wielokrotności.
- Mylenie algorytmu obliczania NWW z algorytmem obliczania NWD.

Warunki realizacji

- Obliczanie wspólnych dzielników i wspólnych wielokrotności wprost z rozkładu liczby na czynniki.
- Zadania z kontekstem praktycznym, w których pojawia się NWW lub NWD.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Powiązanie umiejętności z różnych tematów w wyniku samodzielnych rozumowań ucznia (liczby pierwsze z podzielnością).

Wymaganie 1.8)

Uczeń określa liczebność zbioru liczb z pewnego niewielkiego zakresu, opisanego za pomocą pewnych warunków.

Chodzi tutaj o określanie liczebności zbiorów metodami, które uczeń już zna, a trudność może sprawiać jedynie zastosowanie ich w nietypowym kontekście.

Przykłady pytań

- Ile jest liczb naturalnych większych od 32, ale mniejszych od 75?
- Na osi liczbowej zaznaczono liczby 137 i 182. Ile liczb naturalnych leży na osi liczbowej między tymi punktami?
- Ile jest trzycyfrowych liczb parzystych?
- Ile jest takich liczb dwucyfrowych, w których każda cyfra jest inna?

Wyzwania

- Błędne obliczanie liczby naturalnych liczb leżących między np. 11 a 17 za pomocą różnicy $17 - 11$.

Warunki realizacji

- Modelowanie przykładów zliczania liczb za pomocą klocków lub innych przedmiotów, rysunków.
- Zadania z kontekstem wziętym z otoczenia ucznia.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń buduje własne interpretacje problemu i strategię jego rozwiązania.

Wymagania 1.9), 1.10), 1.11 i 1.12)

- Uczeń dodaje i odejmuje liczby naturalne w pamięci lub z zapisem obliczeń pośrednich.
- Uczeń mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową w pamięci lub z zapisem obliczeń pośrednich.
- Uczeń interpretuje dzielenie liczb naturalnych jako podział oraz jako mieszczanie.
- Uczeń wykonuje działania na liczbach naturalnych, stosując wygodne dla siebie strategie ułatwiające obliczenia, w tym własności przemienności i łączności dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia i dzielenia względem dodawania i odejmowania.

Tutaj i w następnych wymaganiach sformułowanie „z zapisem obliczeń pośrednich” należy rozumieć jako możliwość skorzystania przez ucznia z algorytmu działań pisemnych, jeśli go poznał, lub jako stosowanie rachunku pamięciowego, w którym uczeń zapisuje wyniki tylko niektórych kroków. Ważne, by uczeń miał okazję do stosowania własnych strategii obliczeń, nawet wtedy gdy nie są one optymalne. Warto wówczas dać mu szansę wyjaśnienia, na czym

polegał jego sposób liczenia. W tym postępowaniu chodzi nie tylko o osiągnięcie poprawnego wyniku, ale także o umiejętność budowania wypowiedzi przedstawiającej sposób rozumowania ucznia. Ta umiejętność jest niezbędna do pozytywnej, wspólnej z uczniem pracy nad popełnianymi błędami.

Wśród strategii wykorzystujących własności działań warto pielęgnować na przykład takie:

- przy dodawaniu wynik się nie zmienia, gdy od jednego składnika odejmiemy jakąś liczbę i dodamy ją do drugiego składnika,
- przy odejmowaniu wynik się nie zmienia, gdy odjemną i odjemnik pomniejszymy lub powiększymy o tę samą liczbę,
- przy dzieleniu wynik się nie zmienia, gdy dzielną i dzielnik podzielimy lub pomnożymy przez tę samą liczbę dodatnią (rozumowanie proporcjonalne), np. $72 : 12 = 36 : 6$,
- przy mnożeniu i dzieleniu możemy stosować prawo rozdzielności, np. $568 : 8 = (560 + 8) : 8 = 560 : 8 + 8 : 8 = 70 + 1$.

Wyzwania

- Niepewność rachunkowa uczniów, wybieranie nieoptymalnych metod rachunku, uciekanie do algorytmów działań pisemnych lub kalkulatora nawet w najprostszych przykładach.
- Brak analizy sensowności otrzymanego wyniku.

Warunki realizacji

- Rozmowy o sposobach liczenia, uzasadnianie przez ucznia poprawności wybranej przez niego metody.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń posługuje się własnymi sposobami liczenia.

Wymaganie 1.18)

Uczeń interpretuje ułamek jako iloraz liczb naturalnych.

Punkt ten obejmuje interpretację w obie strony, to znaczy uczeń powinien także umieć zapisać dzielenie w postaci ułamka.

Wyzwania

- Mechaniczne zamienianie kreski ułamkowej na znak dzielenia i odwrotnie, co bywa przyczyną błędów w wielodziałaniowych przykładach rachunkowych typu $4 : \frac{1}{2}$.

Warunki realizacji

- Modelowanie pojęcia dzielenia z użyciem ułamków.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń samodzielnie wybiera matematyczną interpretację sytuacji opisanej w zadaniu tekstowym.

Wymaganie 1.24)

Uczeń zapisuje ułamki zwykłe, których mianowniki nie są dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd., w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego w przypadkach niewymagających skomplikowanych rachunków.

Opisane tu umiejętności służą przede wszystkim zrozumieniu pojęcia okresu i ułamków okresowych. Warto przy tej okazji przedyskutować z uczniami, przy jakich mianownikach ułamki będą miały rozwinięcia dziesiętne skończone.

Wyzwania

- Niepewność rachunkowa uczniów, wybieranie nieoptymalnych metod rachunku, uciekanie do algorytmów działań pisemnych lub kalkulatora nawet w najprostszych przykładach.
- Brak analizy sensowności otrzymanego wyniku.

Warunki realizacji

- Rozmowy o sposobach liczenia, uzasadnianie przez ucznia poprawności wybranej przez niego metody.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń odkrywa regularności występowania cyfr w ułamkach okresowych.

Wymaganie 1.27)

Uczeń dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- i dwucyfrowych.

W wymienionych tu umiejętnościach działań na ułamkach zwykłych nie pojawia się pojęcie liczby mieszanej. Uczniowie potrafią zamienić liczbę mieszaną na ułamek (wymaganie 1.20), więc przy konieczności takich działań mogą sobie poradzić właśnie przez zamianę. Mogą też tworzyć

własne strategie obliczeń na liczbach mieszanych. Nie ma jednak potrzeby poświęcać zbyt dużo czasu na osiągnięcie biegłości i optymalizację sposobów wykonywania obliczeń na liczbach mieszanych – tym bardziej że na poziomie szkół ponadpodstawowych w obliczeniach, zwłaszcza algebraicznych, liczby mieszane właściwie nie są używane.

Wyzwania

- Uczeń popełnia typowe błędy w dodawaniu ułamków – dodaje liczniki i dodaje mianowniki.
- Uczeń niepoprawnie sprowadza ułamki do wspólnego mianownika – rozszerzając, zapomina o liczniku.

Warunki realizacji

- Modelowanie działań na ułamkach za pomocą kół lub listew ułamkowych.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera swoją strategię obliczeń.

Wymaganie 1.29)

Uczeń oblicza potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich ułamków zwykłych i dziesiętnych, także za pomocą kalkulatora.

Uczeń poznaje pojęcie potęgowania i wie, jak powinno się liczyć potęgi o dowolnych naturalnych dodatnich wykładnikach. Nie ma konieczności wprowadzania w klasach IV–VI potęgi o wykładniku 0 – pojawi się ona w klasach VII–VIII. Skomplikowane rachunki można pozwolić uczniom wykonywać za pomocą kalkulatora. Przydatne to będzie np. wtedy, gdy uczniowie będą mieli obliczyć objętość bryły sześciiennej, której krawędź sami mierzą. Wynik pomiaru może się przecież okazać liczbą niewygodną w rachunkach.

Wyzwania

- Błędy w mnożeniu ułamków.
- Błędy przy wpisywaniu liczb do kalkulatora, a następnie bezkrytyczne przyjmowanie uzyskanego wyniku.

Warunki realizacji

- Szacowanie możliwych wyników potęgowania przed wykonaniem rachunku.
- Analizowanie, kiedy wynik potęgowania będzie większy, a kiedy mniejszy od liczby potęgowanej.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń korzysta z umiejętności potęgowania, np. przy zamianie jednostek.

Wymaganie 1.32)

Uczeń wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują liczby wymierne.

Poziom skomplikowania rachunków nauczyciel może oczywiście dostosować do możliwości swoich uczniów. Przez nieskomplikowane rachunki rozumieć można takie, które pozwalają poznać najważniejsze własności działań na liczbach wymiernych, ale nie piętrzą trudności w jednym przykładzie.

Wyzwania

- Zamiana wszystkich ułamków na ułamki zwykłe (albo odwrotnie – na dziesiętne), niezależnie od rodzaju wykonywanych rachunków.
- Brak analizy sensowności otrzymanego wyniku.

Warunki realizacji

- Analizowanie sposobu obliczeń ucznia, analizowanie innych wariantów.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń dobiera strategię obliczeń do rozwiązywanego przykładu.

Wymagania 1.33) i 1.34)

- Uczeń interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną część tej wielkości.
- Uczeń oblicza procent danej wielkości w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym.

Nauka wykonywania obliczeń procentowych jest rozpisana w podstawie zgodnie z zasadą spiralności. W klasach IV–VI są wprowadzane samo pojęcie procentu i proste obliczenia, które sugeruje się wykonywać za pomocą rozumowań proporcjonalnych. Bardziej złożone rachunki procentowe pojawiają się w klasach VII–VIII.

Wyzwania

- Błędy w obliczeniach na ułamkach.

- Powielanie schematów bez rozumienia ich działania (mnożenie przez 100%).

Warunki realizacji

- Modelowanie obliczeń procentowych w sposób znany uczniowi z nauki o ułamkach.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń dostrzega zastosowania matematyki w życiu codziennym.

Wymaganie 1.38)

Uczeń używa kalkulatora w zadaniach, w których obliczenia są złożone, a ich wykonywanie nie jest głównym celem zadania, na przykład w problemach opartych na rzeczywistych danych.

Kalkulatora w klasach IV–VI należy używać bardzo rozważnie, dbając o to, aby nie zastępował on uczniom rachunków pamięciowych ani obliczeń wykonywanych z wykorzystaniem zapisów pisemnych, które służą zrozumieniu własności działań.

Wyzwania

- Niestaranne wpisywanie liczb do kalkulatora.
- Brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku.

Warunki realizacji

- Kalkulatory dostępne tylko w niektórych zadaniach.
- Obliczenia na kalkulatorze wykonywane w parach, by sprawdzić każde obliczenie kalkulatorowe.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń decyduje, kiedy potrzebuje wsparcia technologii.

8.1.2. Dział 2: Miary

Wymagania 2.1) i 2.2)

- Uczeń mierzy odcinki z dokładnością do 1 mm i szacuje ich długości w sytuacjach praktycznych.
- Uczeń posługuje się jednostkami długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr i kilometr, w sytuacjach praktycznych przelicza te jednostki z jednej na drugą.

W wymaganiu chodzi nie tylko długości narysowanych odcinków, ale także o szacowanie odległości i wymiarów liniowych obiektów znajdujących się w otoczeniu ucznia. Mogą to być np. wymiary pomieszczenia, boiska czy odległość od pewnego obiektu. Uczeń powinien przy tym posługiwać się różnymi jednostkami wymienionymi w opisie wymagania 2.2).

Wyzwania

- Nieprawidłowe przyłożenie linijki (rozpoczynanie pomiaru od jej końca zamiast od zera).
- Trudność z oszacowaniem długości „na oko”, gdy nie można posłużyć się narzędziem.
- Brak doświadczeń porównawczych, przez co trudno uczniom powiązać pomiar z praktyką życia codziennego.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne z mierzeniem różnych obiektów w klasie i na korytarzu (zeszyt, stół, tablica), a także na świeżym powietrzu (np. długość bieżni).
- Zadania łączące szacowanie i faktyczny pomiar („Zgadnij, a potem sprawdź”).
- Praca w parach, by uczniowie mogli wzajemnie korygować swoje błędy.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera narzędzie i sposób pomiaru, porównuje swój wynik z szacunkiem i samodzielnie ocenia poprawność.
- Uczeń rozwija orientację przestrzenną, krytyczne myślenie („Czy to możliwe, że książka ma 1 m długości?”), współpracę (mierzenie w parach) oraz komunikację (opisywanie, jak przeprowadził pomiar).

Wymaganie 2.3)

Uczeń mierzy kąty mniejsze niż 180° z dokładnością do jednego stopnia oraz rysuje dowolne kąty, gdy ich miara jest podana w pełnych stopniach.

W szkole podstawowej rozważamy kąty o miarach od 0 do 360 stopni, zatem uczeń powinien umieć zmierzyć i narysować także kąty o miarach większych niż 180 stopni. Warto dać uczniowi szansę na odkrycie sposobu pomiaru tego typu kątów.

Wyzwania

- Niepoprawne ustawienie środka kątomierza oraz mylenie skali (np. odczyt 40° zamiast 140°).
- Postrzeganie kątów jako abstrakcji, której uczniowie nie łączą z codziennością.

Warunki realizacji

- Systematyczne ćwiczenia z użyciem kątomierza, rysowanie kątów w zeszycie i na tablicy.
- Pokazywanie przykładów z otoczenia: kąt otwarcia drzwi, nachylenie dachu, ramiona zegara.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam decyduje, jak ustawić kątomierz i jak sprawdzić poprawność wyniku.
- Uczeń rozwija dokładność, cierpliwość, krytyczne myślenie („Czy kąt prosty naprawdę ma 90°?”), a także komunikację (opis sposobu pomiaru i rysowania).

Wymagania 2.4), 2.5), 2.6) i 2.7)

- Uczeń stosuje jednostki pola: mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 , km^2 , ar, hektar.
- Uczeń stosuje jednostki objętości i pojemności: cm^3 , dm^3 , m^3 , mililitr, litr.
- Uczeń przelicza jednostki pola i jednostki objętości w kontekstach praktycznych.
- Uczeń stosuje, w tym przelicza, jednostki masy w kontekstach praktycznych: gram, dekagram, kilogram, tona.

Przeliczanie jednostek powinno skupiać się na przykładach mających sens praktyczny. Może się w praktyce zdarzyć konieczność przeliczenia powierzchni wyrażonej w arach na metry kwadratowe lub odwrotnie. Nie ma jednak w praktyce potrzeby przeliczania powierzchni wyrażonej w milimetrach kwadratowych na kilometry kwadratowe lub hektary.

Wyzwania

- Mylenie jednostek liniowych z kwadratowymi i brak zrozumienia, dlaczego pole ma jednostkę „do kwadratu”.
- Trudności z wyobrażeniem sobie litra czy kilograma.
- Częste mylenie objętości z polem lub wagi z pojemnością.

Warunki realizacji

- Rysowanie siatek kwadratowych, mierzenie pól pomieszczeń i obiektów szkolnych, korzystanie z map i planów.
- Porównywanie jednostek w praktyce: ile cm^2 ma kartka formatu A4, a ile m^2 ma boisko szkolne.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam wybiera jednostkę i interpretuje wynik w kontekście praktycznym.

Wymagania 2.8) i 2.9)

- Uczeń wykonuje proste obliczenia kalendarzowe w dniach, tygodniach, miesiącach i latach.
- Uczeń wykonuje proste obliczenia zegarowe w godzinach, minutach i sekundach.

Przez proste obliczenia kalendarzowe i zegarowe należy rozumieć takie, w których główna trudność polega na rozumieniu związków między tymi jednostkami czasu, a nie na złożoności obliczeń.

Wyzwania

- Trudności z zapamiętaniem liczby dni w miesiącach, zrozumieniem roku przestępnego, przeliczaniem jednostek czasu – godzin, minut i sekund.

Warunki realizacji

- Praca z kalendarzami papierowymi i cyfrowymi.
- Zadania praktyczne z planem lekcji, rozkładem jazdy czy planowaniem wycieczki.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń samodzielnie planuje działania w czasie, oblicza daty i godziny.
- Uczeń rozwija organizację pracy, punktualność, odpowiedzialność, umiejętność planowania i współdziałania (np. wspólne ustalanie terminu projektu).

Wymagania 2.10) i 2.11)

- Uczeń zamienia wyrażenia dwumianowane na ułamki dziesiętne, a ułamki dziesiętne na wyrażenia dwumianowane.
- Uczeń oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali, oraz oblicza długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość.

Z wyrażeniami dwumianowanymi uczniowie spotkali się już w klasach I–III. Warto więc sprawdzić, w jakim stopniu można skorzystać z tych umiejętności. Pojęcie skali pojawia się też na lekcjach przyrody. Przyda się więc konsultacja z nauczycielem tego przedmiotu.

Wyzwania

- Trudności w interpretacji zapisu dwumianowanego (1 m 25 cm).
- Brak rozumienia istoty skali i jej zastosowania.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne: zapisywanie długości w różnych formach, np. jako liczby dwumianowanej lub w jednej jednostce.
- Praca z mapami i planami.
- Tworzenie własnych rysunków w skali.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera zapis, który jest wygodniejszy w danej sytuacji, korzysta ze skali przy interpretacji map.
- Uczeń rozwija orientację przestrzenną, wiedzę i umiejętności geograficzne, elastyczność matematyczną i krytyczne myślenie.

Wymaganie 2.12)

Uczeń w kontekście praktycznym oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h oraz m/s.

Obliczenia związane z prędkością są dobrą okazją do posługiwania się rozumowaniem proporcjonalnym. Samo pojęcie prędkości i jednostek prędkości budowane jest na pojęciu proporcji. Nie ma więc konieczności wprowadzania na tak wczesnym etapie przekształcania wzorów. Uczniowie mogą używać jednostki prędkości na lekcjach przyrody, np. przy odczytywaniu prędkości wiatru. Wrócą również do obliczeń związanych z prędkością na lekcjach fizyki w klasach VII–VIII.

Wyzwania

- Mylenie jednostek i trudność w interpretowaniu zależności między trzema wielkościami (prędkość, droga, czas).

Warunki realizacji

- Zadania praktyczne: mierzenie czasu marszu, jazdy rowerem, analiza rozkładów jazdy.
- Dyskusja nad realnością wyników.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam planuje trasę i czas podróży, wybiera jednostki i sprawdza wyniki.
- Uczeń rozwija umiejętności praktyczne, krytyczne myślenie i sprawność w korzystaniu z narzędzi cyfrowych (np. aplikacje do pomiaru prędkości).

Wymaganie 2.14)

Uczeń stosuje proste aplikacje i narzędzia cyfrowe do rozwiązywania problemów związanych z pomiarami i przeliczaniem jednostek.

Podobnie jak przy innych tematach, także przy pomiarach i przeliczaniu jednostek aplikacje i narzędzia cyfrowe są na lekcjach matematyki tylko narzędziem służącym rozwiązaniu problemu. Sam problem nie powinien zatem ograniczać się wyłącznie do kwestii przeliczeń. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że umiejętność zaplanowania obliczeń koniecznych do rozwiązania problemu mieści się w ramach tego wymagania szczegółowego.

Wyzwania

- Ryzyko bezrefleksyjnego korzystania z kalkulatora i aplikacji – uczeń ufa wynikowi, nie sprawdzając jego sensowności.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia z kalkulatorem, arkuszem kalkulacyjnym, aplikacjami do przeliczania jednostek.
- Nacisk na analizę sensowności wyniku i porównanie go z wynikiem szacowania.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam wybiera narzędzie cyfrowe, wprowadza dane i interpretuje wynik.
- Uczeń rozwija kompetencje cyfrowe, krytyczne myślenie, samodzielność i kreatywność w użyciu technologii.

8.1.3. Dział 3: Algebra

W klasach IV–VI budowane są początkowe intuicje związane z algebraiczną metodą prowadzenia rozumowań. Główne akcenty powinny być więc położone na budowanie pojęć i podstawowych umiejętności związanych z używaniem zapisu algebraicznego. Chodzi tu m.in. o rozumienie, w jaki sposób można opisać regularności za pomocą wyrażeń algebraicznych, jaki jest związek między zmienną a wartością wyrażenia i jak można opisać warunki, które powinno spełniać rozwiązanie problemu za pomocą równania.

Wymaganie 3.1)

Uczeń opisuje wielkości oraz zależności między wielkościami za pomocą wyrażeń algebraicznych na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym.

Uczniowie powinni umieć skorzystać z zapisu algebraicznego do opisania dostrzeganej przez nich reguły.

Przykład zadania

Z jednakowych patyczków układamy kwadraty.

Kwadrat 1: każdy bok zbudowany jest z 1 patyczka.

Kwadrat 2: każdy bok zbudowany jest z 2 patyczków.

Kwadrat 3: każdy bok zbudowany jest z 3 patyczków.

I tak dalej.

Z ilu patyczków zbudowany jest dziesiąty kwadrat, a z ilu kwadrat o numerze n ?

Wyzwania

- Trudność z przechodzeniem od języka naturalnego do zapisu algebraicznego.
- Trudność ze wskazaniem, które informacje w treści zadania są istotne.
- Postrzeganie symbolu literowego jako zjawiska abstrakcyjnego i trudnego.

Warunki realizacji

- Zadania kontekstowe (np. koszt kilku batonów, droga i czas przejazdu).
- Praca z tabelami i schematami graficznymi.
- Metoda „od słów do symboli”.
- Stosowanie aplikacji do wizualizacji zależności.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam decyduje, które wielkości są istotne i jak je zapisać w postaci algebraicznej.
- Uczeń rozwija krytyczne myślenie (selekcja danych), komunikację (wyjaśnienie sposobu zapisu), kreatywność (różne formy przedstawienia zależności), a także kompetencje cyfrowe (praca z aplikacjami).

Wymaganie 3.2)

Uczeń oblicza wartości prostych wyrażeń algebraicznych w sytuacjach niewymagających skomplikowanych rachunków oraz porównuje, analizuje i interpretuje otrzymane wyniki.

Opisana tutaj umiejętność powinna umożliwić uczniom posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Wyrażenia te nie muszą być bardziej skomplikowane od tych, których uczniowie będą używać na lekcjach geometrii, przyrody czy – w starszych klasach – na lekcjach fizyki. Samo obliczanie wartości wyrażeń algebraicznych nie może być wyłącznie pretekstem do ćwiczeń rachunkowych – powinno służyć głównie zrozumieniu samego pojęcia wartości wyrażenia. Interpretacja otrzymanych wyników może obejmować także wnioski wynikające z obserwacji, jak zmienia się wartość wyrażenia przy zmianie wartości zmiennych występujących w wyrażeniu. Przy budowaniu pogłębionego rozumienia wartości wyrażenia algebraicznego można rozważać też przykłady typu:

Jeśli $x + y = 12$, to ile jest równe $\frac{x+y}{2}$?

Jeśli $18ab = 24$, to ile jest równe $3ab$?

Wyzwania

- Skupienie się na samych rachunkach, ignorowanie sensu wyniku.
- Błędy w kolejności działań oraz trudności z interpretacją liczbowych rezultatów w praktyce.

Warunki realizacji

- Zadania z życia codziennego wymagające interpretacji (np. porównanie kosztów zakupu różnych ilości towaru).
- Możliwość korzystania z kalkulatora i arkusza kalkulacyjnego, aby skoncentrować się na analizie sensu wyniku.
- Praca w parach – wspólne sprawdzanie poprawności i dyskusja o sensowności wyniku.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera metodę obliczeń, sprawdza i porównuje wyniki.
- Uczeń rozwija krytyczne myślenie, umiejętność analizy danych, logicznego wnioskowania, a także kompetencje cyfrowe i komunikacyjne (tłumaczenie koleżance lub koledze swojego sposobu rozwiązania).

Wymaganie 3.3)

Uczeń korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe.

Korzystanie ze wzorów obejmuje nie tylko narzędziową umiejętność obliczenia opisanej wzorem wielkości, ale także mniej standardowe korzystanie ze wzoru, wymagające rozumienia związków opisywanych wzorem i umiejętności prowadzenia prostego rozumowania. Uczeń powinien więc umieć obliczyć pole trójkąta ze wzoru $P = \frac{1}{2} ah$, gdy zna a oraz h , ale też powinien umieć obliczyć, jaka jest wartość h , gdy zna pole trójkąta oraz a .

Wyzwania

- Zrozumienie, że litera może oznaczać dowolną zmienną, a nie tylko „ x ”.
- Błędy w podstawianiu wartości liczbowych.
- Trudność w przenoszeniu wyćwiczonej umiejętności na inne przedmioty, np. fizykę.

Warunki realizacji

- Zadania praktyczne: obliczanie pola prostokąta, powierzchni pokoju, zużycia materiałów.
- Korzystanie z kart wzorów i uczenie wyszukiwania informacji.
- Projekty interdyscyplinarne (np. obliczenie powierzchni i objętości brył w zadaniach z techniki), transfer wiedzy międzyprzedmiotowej (fizyka ↔ matematyka ↔ technika).

Sprawczość

- Uczeń sam wybiera wzór i stosuje go w praktyce.
- Uczeń rozwija umiejętność uczenia się (poszukiwanie wzorów), umiejętność współdziałania przy projektach, krytycznego myślenia (sprawdzenie, czy wynik pasuje do rzeczywistości).

Wymaganie 3.4)

Uczeń układa równania na podstawie informacji podanych w zadaniu.

Układanie równań może dotyczyć także zadań, w których będzie potrzebne użycie więcej niż jednej niewiadomej, jak na przykład w zadaniu: „Pewien prostokąt ma boki o długościach a oraz b . Jakie pole ma prostokąt, którego boki są trzy razy dłuższe?”.

Wyzwania

- Bariera psychiczna wobec równań, które wydają się uczniom trudne i abstrakcyjne.
- Stworzenie modelu matematycznego z opisu słownego.

Warunki realizacji

- Stopniowanie trudności – od prostych przykładów (np. „Mama ma o 5 zł więcej niż syn”) do zadań bardziej złożonych.

- Metoda głośnego myślenia nauczyciela – pokazywanie krok po kroku, jak powstaje równanie.
- Praca w parach i grupach – wspólne ustalanie modeli, korzystanie z tabel i schematów.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń staje się autorem równania – to on konstruuje model problemu.
- Uczeń rozwija kreatywność (różne możliwe zapisy), komunikację (uzasadnianie swojego wyboru), współpracę (wspólne rozwiązywanie w grupie), krytyczne myślenie (ocena poprawności modelu).

Wymaganie 3.5)

Uczeń rozwiązuje proste równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania.

Uczeń powinien umieć rozwiązywać równania, w których niewiadoma występuje tylko po jednej stronie. Jednak warto już teraz wprowadzać początkowe intuicje związane z prostą redukcją wyrażeń typu $x + 2x$, czy $7a - 4a$, zanim w starszych klasach uczniowie powrócą do tego już bardziej formalnie.

Wyzwania

- Mechaniczne stosowanie reguły „przerzucania liczby na drugą stronę”, bez zrozumienia istoty przekształceń.
- Brak sprawdzania poprawności rozwiązania i refleksji nad jego sensem.

Warunki realizacji

- Zadania osadzone w kontekście praktycznym (np. planowanie budżetu, czas przejazdu).
- Wykorzystanie wizualizacji równania jako „wagi szalkowej” – równowaga obu stron.
- Uczenie sprawdzania rozwiązania przez podstawienie.
- Wsparcie aplikacjami edukacyjnymi (np. GeoGebra).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera metodę rozwiązania (równowaga, próby, podstawienie).
- Uczeń rozwija krytyczne myślenie (kontrola poprawności), samoocenę (ocena własnego rozwiązania), kompetencje cyfrowe (korzystanie z narzędzi online) i odpowiedzialność za proces rozwiązywania.

8.1.4. Dział 4: Figury

Geometria nauczana w szkole nie jest w pełni sformalizowaną nauką opartą na aksjomatach. Duża część pojęć geometrycznych i figur nie jest ściśle definiowana. Pojęcia te są budowane w nieustannym odwoływaniu się do konkretnych przykładów i operacji na modelach figur płaskich i przestrzennych. Taka nieformalna geometria daje możliwość prowadzenia wystarczająco ścisłych rozumowań i budowania uzasadnień, ale warto zdawać sobie sprawę z tego, że uczniowie mogą mieć trudności z ustaleniem, które fakty wymagają uzasadnienia, a z których mogą korzystać przy jego budowaniu.

Wymaganie 4.1)

Uczeń rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek.

Wymaganie to obejmuje rysowanie odręczne lub za pomocą przyrządów geometrycznych wymienionych figur oraz różne sposoby ich oznaczania. Część z tych figur uczniowie poznali już w młodszych klasach. Ważne jest, by w rysunkach rozważanych przez uczniów pojawiały się proste, półproste i odcinki, które nie są równoległe do brzegów kartki.

Wyzwania

- Abstrakcyjność pojęć geometrycznych.
- Nieodróżnianie prostych od półprostych.

Warunki realizacji

- Praca na rysunkach, tablicy.
- Układanie przykładów z życia codziennego.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam wskazuje przykłady z otoczenia.
- Uczeń rozwija precyzję językową, krytyczne myślenie (analiza różnic między obiektami).

Wymaganie 4.2)

Uczeń rozpoznaje, nazywa i rysuje kąty; rozróżnia kąt ostry, prosty, rozwarty, półpełny, pełny, wklęsły i wypukły, wskazuje wierzchołek i ramiona kąta.

Nie ma potrzeby podawania uczniom ścisłych definicji figury wypukłej i figury wklęsłej, by uczniowie rozpoznawali kąty wypukłe i wklęsłe. Jak zwykle w matematyce szkolnej w młodszych

klasach, wystarczy budowanie tych pojęć przez rozważanie rozmaitych przykładów, podobnie jak to było w przypadku pojęcia sześcianu.

Wyzwania

- Mylenie nazw kątów.
- Brak rozwiniętej intuicji geometrycznej.

Warunki realizacji

- Praktyczne rysunki w zeszycie i na tablicy.
- Przykłady z otoczenia (kąt otwarcia drzwi, kąt między wskazówkami zegara).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam kategoryzuje kąty.
- Uczeń rozwija myślenie geometryczne, komunikację matematyczną i umiejętność obserwacji.

Wymaganie 4.3)

Uczeń rozpoznaje oraz rysuje proste i odcinki prostopadłe i równoległe, także na kartce w kratkę.

Proste i odcinki równoległe nie muszą być równoległe do boków kartki. Rozpoznając odcinki prostopadłe i równoległe narysowane na kartce w kratkę, uczeń może odwoływać się do własności kątów przyległych, odpowiadających i naprzemianległych.

Wyzwania

- Mylenie pojęć.
- Trudności w rysowaniu odcinków równoległych na kartce w kratkę innych niż pokrywających się z liniami kretek.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne z ekierką.
- Zadania na kartce w kratkę.
- Obserwacje w otoczeniu (np. ściany, okna, podłogi).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń samodzielnie wyszukuje przykłady w świecie rzeczywistym.
- Uczeń rozwija orientację przestrzenną, uczy się stosowania narzędzi geometrycznych.

Wymaganie 4.4)

Uczeń rozpoznaje kąty przyległe, wierzchołkowe, odpowiadające i naprzemianległe oraz stosuje ich własności.

Gdy dwie proste równoległe przecięte są trzecią prostą, uczeń powinien rozpoznawać kąty o takich samych miarach. Nazwy tych par kątów uczeń powinien znać po to, by ułatwiona była komunikacja, gdy trzeba będzie przedstawić rozumowanie związane z miarami tych kątów. Nie ma więc potrzeby wprowadzania rozróżnienia na kąty naprzemianległe wewnętrzne i zewnętrzne.

Wyzwania

- Trudności z rozróżnianiem rodzajów kątów oraz ze zrozumieniem zależności między nimi.

Warunki realizacji

- Rysowanie wielu przykładów.
- Ćwiczenia z kolorami i schematami.
- Użycie programów typu GeoGebra.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń bada i odkrywa własności kątów samodzielnie.
- Uczeń rozwija krytyczne myślenie, umiejętność uogólniania i współdziałania w analizie rysunków.

Wymaganie 4.5)

Uczeń rozpoznaje, nazywa i rysuje wielokąty, wskazuje ich wierzchołki i kąty wewnętrzne, boki, przekątne.

Dobrze by było, aby wśród wielokątów, które uczeń zobaczy lub narysuje, znajdowały się też wielokąty niewypukłe. Będą to pouczające przykłady wielokątów, w których przynajmniej jedna z przekątnych leży na zewnątrz wielokąta (nie licząc oczywiście jej końców).

Wyzwania

- Mylenie pojęć „wierzchołek” i „przekątna”.
- Brak umiejętności rysowania wielokątów foremnych.

Warunki realizacji

- Praca z patyczkami, sznurkami.
- Rysowanie wielokątów na kratce.
- Korzystanie z aplikacji do rysowania.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń sam tworzy wielokąty, uczy się rozpoznawać i nazywać elementy.
- Uczeń rozwija wyobraźnię przestrzenną i komunikację.

Wymaganie 4.11)

Uczeń rozpoznaje, nazywa, rysuje kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez, w tym trapez równoramienny i prostokątny, oraz stosuje ich własności.

Własności wymienionych czworokątów to nie tylko te, które je definiują, ale także własności kątów i przekątnych.

Wyzwania

- Mylenie nazw czworokątów.
- Trudności w korzystaniu z własności czworokątów.

Warunki realizacji

- Rysunki na kartce w kratkę.
- Sprawdzanie własności kątów i przekątnych na wyciętych z papieru modelach czworokątów.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń samodzielnie bada własności czworokątów na ich modelach.

Wymaganie 4.13)

Uczeń rozpoznaje i rysuje wysokości w trójkącie, równoległoboku, trapezie.

Uczeń powinien umieć narysować wysokości wymienionych figur, także w sytuacji, gdy wysokości te poprowadzone są do boku nierównoległego do brzegu kartki.

Wyzwania

- Mylenie wysokości z innymi odcinkami.

- Trudności z rysowaniem wysokości w trójkątach rozwartokątnych.

Warunki realizacji

- Praca na modelach trójkątów, równoległoboków i trapezów, które można obracać tak, by wysokość można było wygodnie rysować.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń samodzielnie eksperymentuje z modelami i samodzielnie dobiera sposób zaznaczenia wysokości (ekierka, zginanie papierowego modelu).

Wymaganie 4.14)

Uczeń oblicza pole trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu oraz pola figur, które można z nich zbudować.

Figury, których pola uczeń powinien umieć obliczyć, mogą być budowane przez sklejenie kilku podanych figur lub wycięcie z figury innych figur.

Wyzwania

- Trudności z interpretacją wzorów na pola.
- Błędy rachunkowe.

Warunki realizacji

- Praca na schematach i modelach.
- Zadania praktyczne (np. obliczanie pola powierzchni pomieszczenia, działki).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wybiera sposób obliczeń, samodzielnie sprawdza ich poprawność.
- Uczeń rozwija umiejętności praktyczne, finansowe (koszt malowania).

8.1.5. Dział 5: Dane

Wymaganie 5.1)

Uczeń interpretuje dane przedstawione w tekście oraz za pomocą tabel, diagramów i wykresów, w tym wykresów wykonanych za pomocą linii ciągłej, w szczególności porównuje ceny, koszty i wydatki przedstawione w tabelach, na wykresach lub paragonach – moduł ekonomiczno-finansowy.

Interpretowanie danych obejmuje także ich odczytywanie, porównywanie i wyciąganie wniosków z podanych informacji. Umiejętność interpretowania danych za pomocą linii ciągłej będzie wykorzystywana przez uczniów na lekcjach przyrody, a już od początku klasy VII – także na lekcjach fizyki. Taki sposób prezentacji danych rozwija intuicje związane z układem współrzędnych oraz rozumieniem zależności funkcyjnych.

Wyzwania

- Niedostrzeganie wszystkich informacji.
- Trudności z interpretacją danych w układzie współrzędnych (wykresy liniowe).

Warunki realizacji

- Korzystanie z rzeczywistych danych dotyczących zjawisk, które interesują uczniów.
- Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego do przedstawiania tych samych danych w różnych formach.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wyciąga wnioski z informacji, które sam wyszukał.

Wymaganie 5.2)

Uczeń przeprowadza proste badania statystyczne: zbiera dane, zapisuje je w uporządkowanej formie i przedstawia wnioski wynikające z zebranych informacji.

Uczniowie mogą sami zaproponować temat badania. Przy porządkowaniu danych i wyciąganiu wniosków warto przedyskutować z uczniami, jaki wpływ na wnioskowanie ma forma przedstawienia danych.

Wyzwania

- Posługiwanie się tylko jedną, sugerowaną przez aplikację formą przedstawienia danych.
- Projektowanie badania ze zbyt małą ilością danych, by ich interpretacja miała sens.

Warunki realizacji

- Interpretowanie danych i form ich przedstawiania w dostępnych publikowanych badaniach profesjonalnych instytucji badawczych, np. GUS.
- Posługiwanie się aplikacją komputerową do wizualizacji danych.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń wyciąga wnioski z dostępnych informacji.

Wymaganie 5.3) i 5.4)

- Uczeń oblicza średnią arytmetyczną przy opisie zjawisk z życia codziennego.
- Uczeń interpretuje dane dotyczące wydatków, oblicza ich średnią wartość oraz formułuje wnioski dotyczące opłacalności różnych rozwiązań – moduł ekonomiczno-finansowy.

Uczniowie powinni zrozumieć nie tylko to, jak liczy się średnią, ale także jak ta zmienia się wraz ze zmianą wielkości, których średnią liczymy, oraz zmianą liczby tych wielkości. Gdy już to opanują, można pozwolić im na liczenie średniej z autentycznych danych także za pomocą kalkulatora czy komputera, wówczas samo liczenie średniej nie jest celem rozwiązywanych zadań, a staje się nim wyciąganie wniosków z wyników obliczeń.

Wyzwania

- Liczenie średniej trzech i więcej liczb tak, jak w przypadku dwóch: dzielenie sumy tych liczb przez 2.

Warunki realizacji

- Rozważanie różnych zestawów liczb o tej samej sumie.
- Analizowanie, jakie zmiany danych nie spowodują zmiany średniej.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń używa średniej arytmetycznej do wyciągania własnych wniosków z dostępnych danych.

8.2. Klasy VII–VIII

8.2.1. Dział 1: Liczby

Wymagania 1.1) i 1.2)

- Uczeń prowadzi obliczenia i rozumowania, w których korzysta z zapisu procentowego [...].
- Uczeń stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym finansowym, takie jak obliczanie: cen po podwyżce lub przed jej podwyżką albo obniżką, odsetek dla rocznej lokaty, kosztów kredytu, wysokości podatków – moduł ekonomiczno-finansowy.

Opanowanie podstawowych typów obliczeń procentowych wystarcza do rozwiązywania także bardziej złożonych problemów, takich jak podwyżki lub obniżki o dany procent czy stężenia procentowe. Koszty kredytów i obliczenia podatkowe uczniowie będą mogli obliczyć tylko w takich przykładach, do których wystarcza opisany wyżej zakres obliczeń procentowych.

Wyzwania

- Trudność w interpretacji wyniku i przeniesieniu go na sytuacje życiowe mimo mechanicznego opanowania algorytmu obliczania procentu.
- Abstrakcyjność zadań finansowych – uczniowie potrzebują kontekstu bliskiego ich doświadczeniom (np. zakupy, kieszonkowe, rabaty).

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne z użyciem paragonów, cenników, ofert promocyjnych.
- Projekty edukacyjne (np. symulacja budżetu domowego, planowanie wycieczki).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń świadomie wybiera metodę obliczeń (pisemnie, w pamięci, kalkulatorem).
- Uczeń rozwija umiejętność podejmowania decyzji finansowych, krytyczne myślenie i odpowiedzialność ekonomiczną.

Wymagania 1.3), 1.4), 1.5) i 1.6)

- Uczeń oblicza potęgi liczb wymiernych o wykładnikach naturalnych.
- Uczeń zamienia potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym na odpowiednie potęgi o wykładnikach naturalnych.
- Uczeń stosuje własności działań na potęgach o podstawach naturalnych i wykładnikach całkowitych [...].
- Uczeń zapisuje liczby w notacji wykładniczej i porównuje liczby zapisane w ten sposób.

Uczniowie obliczają potęgi dowolnych liczb wymiernych, ale wystarczy, że własności działań na potęgach będą stosować tylko do podstaw naturalnych. Chodzi bowiem o to, by zrozumieli te własności na nieskomplikowanych rachunkowo przykładach potęg o podstawie naturalnej i wykładniku całkowitym. Przy obliczaniu potęg liczb wymiernych uczniowie mogą zaobserwować, że kolejne potęgi liczb dodatnich większych od 1 szybko rosną, a kolejne potęgi liczb dodatnich mniejszych od 1 – maleją. Obserwacje te mogą podeprzeć obliczeniami wykonywanymi na kalkulatorze lub komputerze.

Wystarczy, gdy uczniowie potrafią określić, która z dwóch liczb zapisanych w notacji wykładniczej jest większa oraz ile razy jest większa – z dokładnością do rzędu wielkości.

Wyzwania

- Zrozumienie abstrakcyjnej idei potęg z ujemnym wykładnikiem i notacji naukowej.
- Mechaniczne stosowanie wzorów bez zrozumienia ich sensu (np. „podnoszenie potęgi do potęgi”).

Warunki realizacji

- Ćwiczenia z użyciem kalkulatora naukowego, programów komputerowych i sytuacji praktycznych (np. zapisywanie odległości kosmicznych, mas cząsteczek).
- Stopniowe przechodzenie od prostych potęg do bardziej złożonych działań.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń dobiera odpowiednią reprezentację liczby w danym kontekście (rozwój elastyczności matematycznej).
- Uczeń rozwija myślenie naukowe i kompetencje cyfrowe.

Wymagania 1.7), 1.8) i 1.9)

- Uczeń oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych, a przybliżone wartości pierwiastków z innych liczb oblicza za pomocą kalkulatora.
- Uczeń szacuje wartość prostego wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki.
- Uczeń stosuje własności działań na pierwiastkach dla pierwiastków kwadratowych i sześciennych [...].

Intuicji związanych z obliczaniem pierwiastków uczniowie powinni nabyć już w klasach IV–VI, gdy rozwiązywali zadania typu: „Jaką długość ma bok kwadratu o polu 25 centymetrów kwadratowych?”

Wyzwania

- Trudność w przechodzeniu od intuicyjnego rozumienia pierwiastka (jako „odwrotności potęgi”) do działań algebraicznych.
- Problem z rozróżnianiem pierwiastków dokładnych i przybliżonych, a także z korzystaniem z kalkulatora w świadomy sposób.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne: obliczanie długości przekątnych w prostokątach oraz długości boków w trójkątach prostokątnych.
- Nauka krytycznego korzystania z kalkulatora – kiedy daje wartość dokładną, a kiedy przybliżenie.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija umiejętność szacowania i krytycznego interpretowania wyniku.
- Uczeń świadomie korzysta z technologii.

Wymaganie 1.11)

Uczeń stosuje regułę mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach wymagających dwukrotnego wyboru.

Regułę mnożenia dobrze jest wprowadzać na przykładach problemów osadzonych w kontekście praktycznym (kolorowanie flag, dobór dwóch elementów stroju, zestawy obiadowe z dwóch dań, dwuliterowe kody itp.). Oczywiście wszystkie te problemy uczniowie mogą rozwiązywać bez używania zasady mnożenia. Pozwala im to rozwijać intuicję kombinatoryczną, dlatego nie należy im tego zabraniać.

Wyzwania

- Liczenie przypadków chaotycznie, bez uporządkowania.
- Trudność w dostrzeżeniu schematu i przeniesieniu go na sytuacje praktyczne.

Warunki realizacji

- Zadania z życia: kombinacje strojów, menu obiadowego, planów dnia.
- Wprowadzenie graficznych metod zliczania (drzewa możliwości, tabele).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija logiczne myślenie, umiejętności planowania i systematyczność.
- Uczeń uczy się prezentować rozwiązania w przejrzystej formie.

Wymaganie 1.12)

Uczeń używa kalkulatora i aplikacji komputerowych do wykonywania obliczeń przy rozwiązywaniu problemów osadzonych w kontekście praktycznym.

Z kalkulatora i aplikacji komputerowych warto korzystać nie tylko do wykonania końcowych obliczeń, ale także do analizowania samej treści problemu. Rozważanie rozmaitych wariantów danych może pomóc uczniowi głębiej zrozumieć zależności opisywane w zadaniu.

Wyzwania

- Nadmierne poleganie na kalkulatorze, bez refleksji nad wynikiem.
- Brak krytycznej oceny poprawności obliczeń (uczeń wierzy w „nieomylny wynik”).

Warunki realizacji

- Nauka świadomego wyboru narzędzia: kalkulatora, aplikacji komputerowej, rachunku w pamięci.
- Porównywanie wyników obliczeń manualnych i cyfrowych.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija umiejętność krytycznego korzystania z technologii.
- Uczeń samodzielnie wybiera metodę rozwiązania.

8.2.2. Dział 2: Algebra

Algebra stanowi dla niektórych uczniów trudny do przekroczenia próg, zwłaszcza że pojawia się wiele nowych pojęć i narzędzi rachunku algebraicznego, które kuszą do stosowania ich wyłącznie na poziomie mechanicznych przekształceń. Na początku nauki algebry warto, by uczniowie mogli kontrolować sens i poprawność wykonywanych przez siebie operacji i by łatwo mogli znaleźć wynikającą z nieznamomości zasad algebry przyczynę pojawiających się błędów. Dlatego w wymaganiach szczegółowych tego działu pojawia się sporo ograniczeń poziomu skomplikowania rachunków algebraicznych. Ograniczenia te mają na celu uproszczenie obliczeń – dotyczą sytuacji, w których współczynniki liczbowe są całkowite, a sumy algebraiczne składają się z kilku wyrazów.

Wymagania 2.2) i 2.3)

- Uczeń oblicza wartość liczbową wyrażenia algebraicznego będącego sumą co najwyżej trzech jednomianów dla podanych całkowitych wartości zmiennych.
- Uczeń porządkuje jednomiany i redukuje wyrazy podobne w sumach algebraicznych.

Wartości prostych wyrażeń algebraicznych, które nie są sumą jednomianów, uczniowie obliczali już w młodszych klasach – wymaganie 3.2) dla klas IV–VI. Na tym etapie uczniowie mają poznać zasady obliczania wartości sum algebraicznych, koncentrując się na rozumieniu pojęcia wartości wyrażenia, a nie na dodatkowych obliczeniach rachunkowych.

Jednomiany, o których mowa w wymaganiu 2.3), mogą zawierać jedną lub więcej zmiennych, być pierwszego lub wyższego stopnia, a ich współczynniki mogą być dowolnymi liczbami.

Uczniowie jeszcze w szkole podstawowej będą używać równań pierwszego stopnia do rozwiązywania różnego typu problemów. Powinni więc umieć rozwiązywać równania z dowolnymi współczynnikami liczbowymi, co wiąże się z koniecznością opanowania umiejętności redukowania wyrazów podobnych o dowolnych współczynnikach.

Wyzwania

- Mechaniczne wykonywanie działań bez rozumienia pojęcia „wyrazy podobne”.
- Trudność w porządkowaniu wyrazów i systematycznym zapisie rachunku.

Warunki realizacji

- Kolorowanie wyrazów podobnych, użycie fiszek z jednomianami.
- Zadania stopniowane: od prostych przykładów do zadań z kontekstem (np. koszt kilku produktów).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń uczy się analizować i systematyzować dane, co rozwija umiejętność porządkowania informacji.
- Uczeń doskonali precyzję i czytelność zapisu matematycznego.

Wymagania 2.4), 2.5), 2.6) i 2.7)

- Uczeń dodaje i odejmuje sumy algebraiczne składające się z kilku jednomianów o współczynnikach całkowitych.
- Uczeń mnoży jednomian przez sumę algebraiczną co najwyżej trzech jednomianów o współczynnikach całkowitych.
- Uczeń wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej złożonej z dwóch jednomianów o współczynnikach całkowitych.
- Uczeń mnoży przez siebie dwa dwumiany o współczynnikach całkowitych.

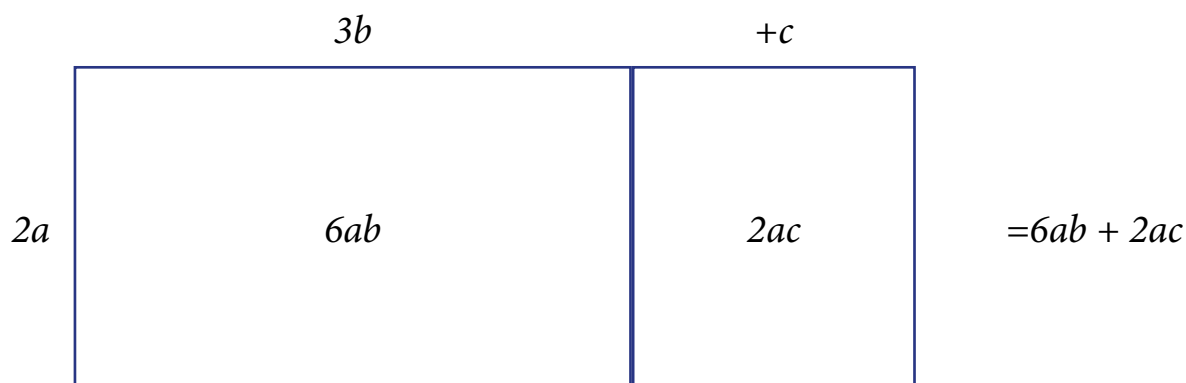
W tych punktach chodzi o działania na sumach algebraicznych, nie tylko na jednomianach. Dla zrozumienia własności tych działań i nabycia biegłości niezbędnej w dalszym toku nauki wystarczy, że uczniowie skupią się na przykładach sum o współczynnikach całkowitych.

Wyzwania

- Trudność w dostrzeżeniu, że wyłączenie czynnika poza nawias i stosowanie rozdzielności mnożenia względem dodawania stanowią dwa równoważne sposoby wykorzystania tego samego prawa.
- Częste błędy w stosowaniu znaków plus i minus.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia wizualne, łączące mnożenie przez sumę z zadaniami geometrycznymi (pole prostokąta). Na przykład:



Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija logiczne myślenie i umiejętność dostrzegania struktur.
- Uczeń praktykuje elastyczne podejście do rozwiązywania problemów algebraicznych.

Wymaganie 2.12)

Uczeń rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą lub dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi, które dają się w prosty sposób sprowadzić do jednego równania pierwszego stopnia.

W niektórych zadaniach tekstowych uczniom może być łatwiej opisać warunki zadania za pomocą dwóch niewiadomych. Taki zapis uczniowie mogą sprowadzić do równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą w drodze prostego rozumowania. Nie ma więc potrzeby wprowadzania całej teorii równań dwóch zmiennych, układów równań i ich rodzajów czy ogólnych metod ich rozwiązywania.

Przykład

Chleb jest droższy od bułki o 7 zł. Za jeden chleb i pięć bułek Julian zapłacił 10 zł. Ile kosztowała jedna bułka?

Zależności opisane w zadaniu uczeń może od razu opisać za pomocą równania pierwszego stopnia. Ale może też rozumować nieco inaczej:

x – cena chleba y – cena bułki

Chleb jest droższy o 7 zł: $x = y + 7$

Chleb i 5 bułek kosztują 10 zł: $x + 5y = 10$

W tym ostatnim równaniu cenę chleba, czyli x można zastąpić $y + 7$, bo to jest ta sama kwota.

Otrzymujemy $y + 7 + 5y = 10$, stąd $6y = 3$, czyli $y = 0,5$. Bułka kosztowała 50 groszy.

Wyzwania

- Najtrudniejszy etap: przejście od opisu słownego do równania.
- Problem z wyborem odpowiedniej niewiadomej i interpretacją wyniku.

Warunki realizacji

- Stopniowanie trudności: od prostych historii liczbowych po zadania z dwiema niewiadomymi.
- Użycie ról i odgrywanie scenek, np. kupowanie biletów na autobus i tramwaj.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija kompetencje rozwiązywania problemów w praktyce, logicznego myślenia, komunikacji i współpracy.

8.2.3. Dział 3: Figury

Wymaganie 3.3)

Uczeń oblicza miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego.

Ten zapis domyślnie wskazuje, że uczeń powinien znać pojęcie wielokąta foremnego.

Umiejętność obliczania miary kąta wewnętrznego w połączeniu z umiejętnością prowadzenia rozumowań matematycznych (wymaganie 5.3) oznacza, że uczeń powinien umieć policzyć także

np. sumę miar wszystkich kątów wielokąta foremnego oraz umieć rozstrzygnąć, czy istnieje wielokąt foremny o kącie 100 stopni.

Wyzwania

- Mylenie wzoru na sumę miar kątów wielokąta z miarą kąta w wielokącie foremnym.

Warunki realizacji

- Stopniowe odkrywanie wzoru przez rysowanie i dzielenie wielokąta na trójkąty.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija umiejętności uogólniania i dostrzegania wzorów.

Wymaganie 3.7)

Uczeń oblicza długość okręgu i pole koła.

Jak we wszystkich tego typu umiejętnościach, uczeń powinien umieć stosować własności i wzory nie tylko bezpośrednio i w typowych sytuacjach. Dlatego powinien umieć obliczyć pole koła i długość okręgu przy danym promieniu, ale także odwrotnie – promień przy danym polu koła lub długości okręgu. Powinien także umieć wykonać wszystkie te obliczenia, gdy w zadaniu zamiast promienia pojawi się średnica.

Wyzwania

- Mylenie obwodu z polem, trudność w interpretacji odwrotnej (obliczanie promienia, gdy znane jest pole).

Warunki realizacji

- Zadania praktyczne: obliczanie powierzchni boiska, stołu, kół rowerowych.
- Ćwiczenia z przybliżonymi wartościami π .

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija umiejętności praktyczne i technologiczne.

Wymaganie 3.8)

Uczeń dzieli wielokąty na części lub dostrzega figury jako części innej figury w celu obliczania, porównywania lub szacowania pól oraz dostrzegania innych zależności.

Dostrzeganie danej figury jako części innej figury może polegać na tym, że uczeń do danej figury dorysowuje trójkąt lub czworokąt, aby otrzymać figurę, której pole potrafi obliczyć.

Wyzwania

- Trudności w „rozcinaniu” i „składaniu” figur.
- Brak elastyczności w stosowaniu różnych strategii.

Warunki realizacji

- Zadania na układanki geometryczne (tangram, pentomino).
- Ćwiczenia z kolorowaniem fragmentów figur.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija wyobraźnię przestrzenną i elastyczność poznawczą.

Wymaganie 3.9)

Uczeń rozwiązuje problemy dotyczące rzeczywistych obiektów, które dają się przedstawić za pomocą modelu geometrycznego, również w sytuacji wymagającej koniecznych uproszczeń.

W tego typu praktycznych zagadnieniach same rachunki nie są podstawową trudnością zadania. Można więc pozwolić uczniom wykonać obliczenia za pomocą kalkulatora.

Wyzwania

- Trudność w dokonywaniu niezbędnych uproszczeń.
- Mylenie modelu z rzeczywistością.

Warunki realizacji

- Praca projektowa: modelowanie klasy, boiska, budynku.
- Wykorzystanie aplikacji.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija zdolności techniczne i umiejętność pracy projektowej.

Wymagania 3.10) i 3.11)

- Uczeń rysuje w układzie współrzędnych wielokąty o wierzchołkach w punktach kratowych.
- Uczeń oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów o wierzchołkach w punktach kratowych.

Ograniczenie do wielokątów o wierzchołkach w punktach kratowych ma na celu to, aby uczniowie skupili się na geometrycznych, a nie rachunkowych trudnościach w rozwiązywaniu tego typu problemów.

Wyzwania

- Trudności w łączeniu geometrii z rachunkiem.
- Błędy w odczytywaniu współrzędnych.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia praktyczne: rysowanie wielokątów na papierze milimetrowym.
- Obliczanie pól metodą geometryczną (np. przez dzielenie figury na prostsze kształty).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija kompetencje cyfrowe (np. w programach graficznych).

Wymagania 3.12), 3.13 i 3.14)

- Uczeń rozpoznaje graniastosłupy proste i prawidłowe oraz ostrosłupy prawidłowe.
- Uczeń wskazuje wysokość ścian bocznych i wysokość ostrosłupa.
- Uczeń oblicza pola powierzchni i objętości graniastosłupów prostych oraz ostrosłupów prawidłowych.

Aby uczeń mógł rozpoznać ostrosłup prawidłowy, musi sprawdzić, czy bryła jest ostrosłupem. Tak więc uczniowie muszą wiedzieć, czym ostrosłupy różnią się od nieostrosłupów, czyli muszą umieć rozpoznać ostrosłup wśród innych brył.

Wyzwania

- Trudność w rysowaniu brył i wyobrażeniu sobie bryły na podstawie siatki.
- Problemy w rozróżnianiu wysokości bryły od krawędzi bocznej, a w wypadku ostrosłupów także od wysokości ściany bocznej.

Warunki realizacji

- Ćwiczenia w rysowaniu na kartce w kratkę podstawowych rodzajów graniastosłupów i ostrosłupów.
- Modele 3D z papieru, druk 3D, aplikacje do wizualizacji.
- Zadania praktyczne: obliczanie objętości pudełek, pojemników.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija wyobraźnię przestrzenną i umiejętności techniczne.

8.2.4. Dział 4: Dane i zdarzenia losowe

Wymagania 4.1) i 4.2)

- Uczeń pozyskuje i selekcjonuje dane z różnych źródeł, porządkuje je i ocenia ich wiarygodność.
- Uczeń dobiera sposób przedstawienia danych ułatwiający ich analizę, posługując się odpowiednimi aplikacjami komputerowymi.

Ocenianie wiarygodności danych obejmuje zarówno wiarygodność źródeł uzyskanych informacji, jak i krytyczną analizę samego zestawu danych.

W wymaganiu 4.2) chodzi nie tylko o przejrzystą wizualizację danych, ale także o taką umiejętność ich przedstawienia, by łatwo było dostrzec wynikające z nich wnioski.

Wyzwania

- Akceptowanie danych bez krytycznej analizy źródła.
- Trudności w wyborze właściwej formy prezentacji (tabela, wykres).

Warunki realizacji

- Praca na danych z życia: cenach produktów, danych pogodowych, statystykach sportowych.
- Użycie arkusza kalkulacyjnego i aplikacji wizualizacyjnych.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń rozwija kompetencje cyfrowe i krytyczne myślenie.

Wymaganie 4.3)

Uczeń interpretuje zależność między dwiema wielkościami opisaną za pomocą wykresu, przykładowo zmianę pewnej wielkości w czasie, w tym: przebyta droga, wysokość wynagrodzeń, koszty życia, inflacja – moduł ekonomiczno-finansowy.

Zapisy podstawy nie wymagają formalnego wprowadzenia pojęcia funkcji. Analiza zależności między dwiema wielkościami opisanej za pomocą wykresu jest wystarczającym na tym etapie wprowadzeniem do funkcji. Interpretując tę zależność, uczniowie mogą wyciągać wnioski,

posługując się takimi sformułowaniami jak: „w kwietniu wartość wynosiła 230 i była większa o 25 od wartości w styczniu”, „w 15 sekundzie pojazd osiągnął największą prędkość i wynosiła ona 96 km/h”, „między 15 a 30 minutą odległość rosła, a potem malała”.

Wyzwania

- Odczytywanie pojedynczych punktów bez dostrzegania trendu.

Warunki realizacji

- Analiza wykresów z ekonomii i życia codziennego (np. inflacja, ceny biletów).

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń uczy się interpretować dane w kontekście społecznym i gospodarczym.

Wymaganie 4.6)

Uczeń przeprowadza proste doświadczenia losowe polegające przykładowo na jednokrotnym lub dwukrotnym rzucie monetą lub kostką do gry oraz na losowaniu kuli spośród zestawu kul, analizuje doświadczenia losowe i określa, jakie jest prawdopodobieństwo rozważanych zdarzeń.

Aby zbudować u uczniów intuicje probabilistyczne, trzeba dać im możliwość obserwowania i analizowania sytuacji losowych. Najprostsze tego typu doświadczenia, rzuty monetą czy kostką, losowania z pewnej liczby różnorodnych przedmiotów, uczeń powinien wykonywać samodzielnie. Pożytecznym doświadczeniem jest wykonanie przez ucznia wielokrotnych rzutów monetą i obserwowanie nie tylko częstości wypadnięcia orła, ale też długości sekwencji poszczególnych wyników. Takie obserwacje pozwalają uniknąć typowych błędnych przekonań o własnościach zdarzeń losowych.

Przy obliczaniu prawdopodobieństw zdarzeń w doświadczeniach polegających na dwukrotnym powtarzaniu losowania wygodne bywa zilustrowanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia za pomocą tabeli.

Wyzwania

- Trudności w przejściu od eksperymentu do teorii.
- Błędy w interpretacji prawdopodobieństwa („na pewno wypadnie reszka”).

Warunki realizacji

- Rzuty kostką, monetą, losowanie kul.
- Łączenie doświadczeń praktycznych z rachunkiem prawdopodobieństwa.

Rozwijanie kompetencji i sprawczości

- Uczeń uczy się analizy ryzyka i podejmowania decyzji.

9. Sposoby organizowania środowisk uczenia się określone w części ogólnej podstawy programowej a nauczanie matematyki

Najważniejsze wyzwanie dydaktyczne w pracy nauczyciela matematyki to nie tylko realizacja treści programowych, ale przede wszystkim takie prowadzenie zajęć, aby uczniowie stawali się aktywnymi uczestnikami procesu uczenia się. Dzisiejsza szkoła to przestrzeń, gdzie uczniowie powinni gromadzić różnorodne doświadczenia, podejmować decyzje, rozwiązywać problemy i stopniowo brać odpowiedzialność za własny rozwój. Właśnie tutaj pojawia się kluczowe zadanie: rozwijanie sprawczości uczniów oraz kompetencji przekrojowych – takich jak krytyczne i twórcze myślenie, współpraca, komunikacja czy samodzielność. Zadanie to zostało wskazane zarówno w części ogólnej podstawy programowej, jak i w warunkach i sposobie realizacji przedmiotu matematyka.

Opisując najważniejsze wyzwania, należy podkreślić kilka szczególnie istotnych obszarów. Pierwszym z nich jest aktywizacja uczniów, czyli stosowanie takich metod, które angażują, wymagają refleksji i działania. Drugim – indywidualizacja procesu nauczania. Każdy uczeń uczy się inaczej, ma inne tempo, predyspozycje i motywacje, dlatego zadaniem nauczyciela jest takie organizowanie pracy, aby każdy mógł osiągać sukces na miarę swoich możliwości. Trzecim wyzwaniem jest integrowanie wiedzy przedmiotowej z umiejętnościami ponadprzedmiotowymi – uczeń powinien nie tylko znać fakty, lecz także umieć je analizować, interpretować i wykorzystywać w praktyce. Wreszcie, dużym wyzwaniem pozostaje budowanie odpowiedzialności za proces uczenia się, czyli stopniowe przenoszenie akcentu z nauczyciela jako głównego źródła wiedzy na ucznia jako osobę zdolną do samodzielnego działania i autorefleksji.

Aby sprostać tym wyzwaniom, konieczne jest stosowanie różnorodnych strategii dydaktycznych. Szczególnie skuteczne okazują się metody aktywizujące, praca projektowa, metody problemowe i naukowe, dyskusje, debaty. Ważną rolę odgrywa również uczenie przez działanie – powierzanie uczniom zadań bliskich realnym wyzwaniom społecznym czy zawodowym, dzięki czemu mają poczucie sensu i sprawczości. Istotne jest także wspieranie samodzielności, np. przez stosowanie portfolio, samooceny czy oceny koleżeńskej, które uczą refleksji nad własnym rozwojem. Nie można też pominąć znaczenia pracy zespołowej – zarówno w obrębie jednego przedmiotu, jak i w projektach międzyprzedmiotowych – która rozwija kompetencje komunikacyjne i uczy odpowiedzialności za wspólny rezultat.

9.1. Aktywizacja i motywacja uczniów na lekcji matematyki

Częstym problemem, na który zwracamy uwagę, jest brak motywacji uczniów. Nawet najlepiej przygotowana lekcja nie przyniesie efektu, jeśli uczniowie nie widzą sensu w podejmowanych działaniach. Dlatego tak ważne jest, aby aktywizacja i motywacja szły ze sobą w parze – dobrze dobrane metody angażujące mogą podtrzymywać motywację, a z kolei odpowiednio wzmocniona motywacja sprzyja większej aktywności. Planując lekcję, warto myśleć jednocześnie o tym, jak zmotywować uczniów do działania i jak ich aktywizować w trakcie zajęć. Do tego mogą się przydać poniższe wskazówki.

Nadaj sens zadaniom

Motywacja uczniów rośnie, gdy wiedzą, po co wykonują dane ćwiczenie. Warto więc pokazywać praktyczne zastosowanie materiału – np. „sprawdźmy, jak ta zasada działa w życiu codziennym” albo „zastanówmy się, jak tę wiedzę można wykorzystać w rozwiązaniu konkretnego problemu”.

Dawaj wybór i poczucie wpływu

Uczniowie chętniej angażują się w lekcję, jeśli mogą zdecydować o sposobie działania. Dobrym rozwiązaniem jest możliwość wyboru formy prezentacji (np. plakat, nagranie, prezentacja multimedialna) albo wspólne ustalenie tematu projektu. Nawet drobne decyzje wzmacniają poczucie sprawczości.

Stosuj różnorodne formy aktywności

Monotonne lekcje szybko zniechęcają. Zmieniaj formy pracy – wykorzystuj na przemian krótkie ćwiczenia w parach, zadania grupowe, elementy burzy mózgów czy quizy online. Dzięki temu uczniowie pozostają aktywni, a zmiana formy sama w sobie działa motywująco.

Doceniaj proces, nie tylko efekt

Wielu uczniów traci motywację, jeśli skupiamy się wyłącznie na ocenach za wykonane zadanie. Warto podkreślać wysiłek, zaangażowanie i pomysłowość. Krótkie komunikaty typu: „widzę, że dobrze przemyślałeś ten pomysł” czy „świetnie współpracowaliście w grupie” dają sygnał, że warto się starać.

Dopasuj poziom trudności

Zbyt łatwe zadania nudzą, a zbyt trudne zniechęcają. Dlatego dobrze jest proponować ćwiczenia o różnym stopniu trudności albo stopniować wymagania. Uczeń, który osiąga sukces na swoim poziomie, chętniej podejmuje kolejne wyzwania.

Łącz współpracę z rywalizacją

Praca zespołowa buduje kompetencje komunikacyjne i odpowiedzialność, a elementy rywalizacji (np. quiz drużynowy, konkurs na najlepsze rozwiązanie) potrafią dodatkowo zmotywować. Ważne jednak, by atmosfera rywalizacji była zdrowa i wspierała wszystkich uczniów.

9.2. Zróżnicowany poziom uczniów i edukacja włączająca na lekcjach matematyki

Częstym wyzwaniem na lekcjach matematyki jest zróżnicowany poziom uczniów w klasie. Spotykają się tu uczniowie szybko przyswajający materiał, potrzebujący dodatkowych wyzwań, a także ci, którzy mają trudności z opanowaniem podstaw, w tym uczniowie ze specjalnymi potrzebami edukacyjnymi (SPE). Bez odpowiedniego wsparcia łatwo o frustrację – zdolniejsi uczniowie mogą się nudzić, a ci z trudnościami lub ze SPE szybko tracą motywację.

W edukacji włączającej kluczowe jest, aby każdy uczeń mógł aktywnie uczestniczyć w lekcji, uczyć się na swoim poziomie i osiągać sukces. Poniżej wskazano kilka sprawdzonych sposobów, które mogą pomóc.

Stopniowanie trudności zadań

Warto przygotowywać zadania o różnym poziomie trudności – od prostych przykładów utrwalających podstawy, po bardziej złożone wyzwania dla uczniów zdolniejszych. Dzięki temu każdy uczeń może osiągnąć sukces i podjąć kolejne wyzwanie na swoim poziomie.

Praca w grupach zróżnicowanych

Wspólne rozwiązywanie zadań w grupach pozwala uczniom pomagać sobie nawzajem. Zdolniejsi uczniowie utrwalają wiedzę, tłumacząc innym, a uczniowie ze SPE mogą uczestniczyć w działaniach dostosowanych do ich umiejętności, ucząc się przez współpracę.

Indywidualizacja i różnorodność metod

Sprawdzi się korzystanie z kart pracy, tablic interaktywnych, gier matematycznych czy krótkich wyzwań online. Warto także modyfikować czas pracy i sposób prezentacji treści, tak aby każdy uczeń mógł pracować w rytmie odpowiednim dla siebie.

Dawanie uczniom wyboru

Uczniowie mogą zdecydować, w jaki sposób rozwiążą zadanie – tradycyjnie w zeszycie, za pomocą rysunku, diagramu lub cyfrowej prezentacji. Dzięki temu każdy może wykorzystać swoje mocne strony i doświadczyć sprawczości.

Docenianie starań i postępów

Na lekcjach matematyki ważne jest, aby zauważać wysiłek każdego ucznia, a nie tylko poprawne rozwiązania. Komentarze typu „świetnie, że spróbowałeś innego sposobu” czy „dobra współpraca w grupie” pokazują, że liczy się proces uczenia się.

Tworzenie atmosfery współpracy i wsparcia

Na lekcji matematyki zróżnicowane potrzeby uczniów nie muszą być przeszkodą – wręcz przeciwnie, mogą wzbogacać zajęcia. Budowanie klasy, w której uczniowie wspierają się nawzajem i doceniają różne talenty, sprzyja włączaniu wszystkich uczniów w aktywne uczenie się.

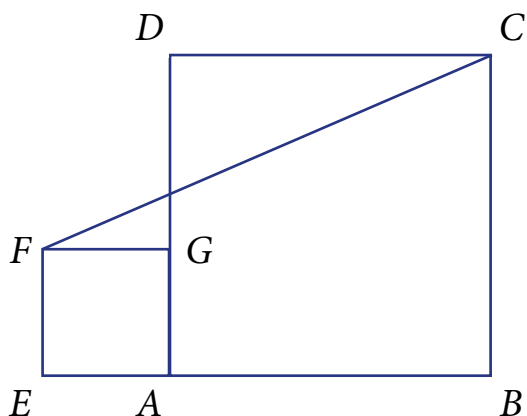
9.2.1. Praca z uczniem zdolnym

Zadaniem podstawy programowej nie jest wskazywanie modeli ani metod pracy z uczniem zdolnym, literatura poświęcona temu tematowi jest wystarczająco obszerna. Odpowiednie treści można znaleźć np. na [stronie internetowej ORE](#). Zadaniem podstawy programowej nie jest też tworzenie zbioru zadań dla uczniów zdolnych. Wiele ciekawych zadań można znaleźć na przykład na stronie internetowej [Art of Problem Solving](#).

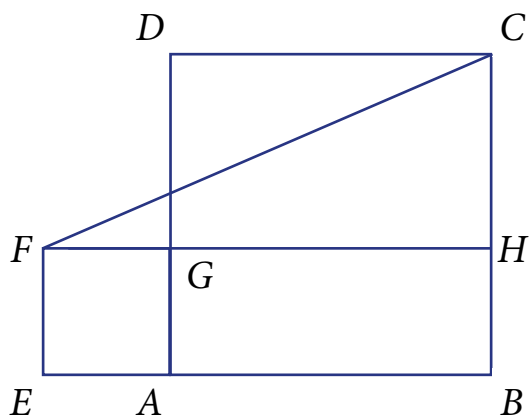
Można natomiast wskazać, że tworzona podstawa programowa daje możliwości pracy z uczniami o zróżnicowanych umiejętnościach. Poniżej podajemy kilka takich przykładów.

Rozważmy wymaganie 3.4) z klas VII–VIII: „Uczeń dostrzega trójkąty prostokątne w różnych sytuacjach geometrycznych, stosuje twierdzenie Pitagorasa”. Na podstawowym poziomie trudności daje ono możliwość rozwiązywania prostych zadań z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa, polegających np. na wyznaczeniu długości trzeciego boku trójkąta, gdy są podane długości dwóch innych jego boków. Natomiast fragment wymagania „uczeń dostrzega trójkąty prostokątne w różnych sytuacjach geometrycznych” może być punktem wyjścia do pracy z uczniem zdolnym, co zostało przedstawione na przykładzie poniższych zadań.

Zadanie 1. Kwadrat EAGF o polu 4 przylega do kwadratu ABCD. Odcinek FC ma długość 13. Oblicz pole kwadratu ABCD.

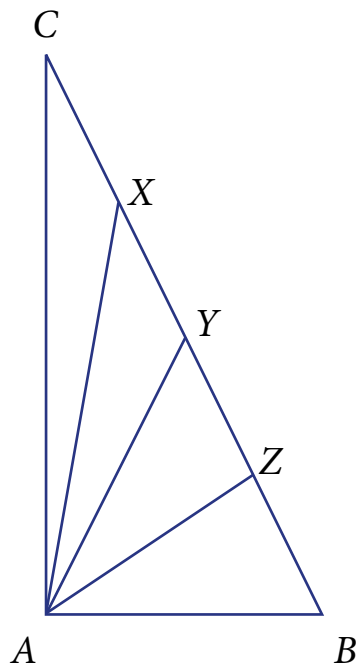


Rozwiązując to zadanie, uczeń powinien poszukać trójkąta prostokątnego, który pomoże mu rozwiązać problem. Takim trójkątem może być np. trójkąt FHC. Łatwo zauważyć, że $|FG| = |BH| = 2$. Przyjmując długość boku kwadratu jako a , możemy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisać następujące równanie: $(a + 2)^2 + (a - 2)^2 = 13^2$, a stąd otrzymujemy, że $a^2 = 80,5$. Zatem pole kwadratu ABCD jest równe 80,5.



Zadanie 2. Punkty X, Y, Z dzielą przeciwprostokątną BC długości 16 trójkąta ABC na cztery równe odcinki.

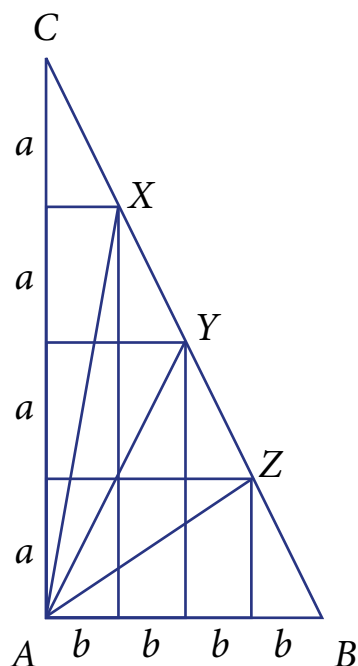
Oblicz $x^2 + y^2 + z^2$ jeśli $|AX| = x$, $|AY| = y$, $|AZ| = z$.



Zadaniem ucznia jest znalezienie odpowiednich trójkątów prostokątnych. Rozważmy sytuację taką jak na rysunku. Wtedy:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (3a)^2 + b^2 + (2a)^2 + (2b)^2 + (3b)^2 + a^2 =$$

$$14^2 + 14b^2 = 14(a^2 + b^2) = \frac{14}{16} \left((4a)^2 + (4ab)^2 \right) = \frac{14}{16} \cdot 16^2 = 14 \cdot 16 = 224$$

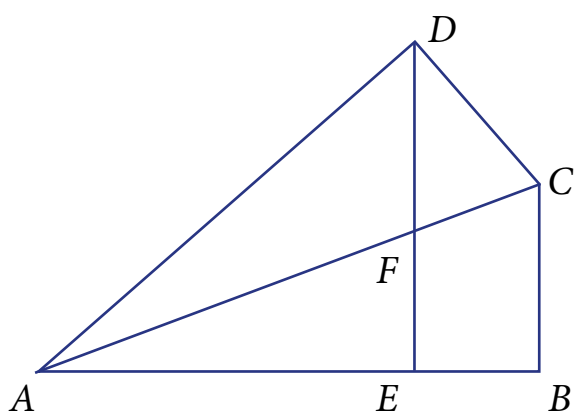


W podstawie programowej zapisano także wymaganie 3.6) dla klas VII–VIII: „Uczeń stosuje cechy przystawania trójkątów”. Zapis ten daje wiele możliwości interpretacyjnych i pozwala w pracy z uczniem zdolnym tak dobierać problemy, aby poszukiwanie odpowiednich trójkątów przystających i wykorzystanie tego faktu było niezbędnym czynnikiem rozwiązania problemu.

Zadanie 3. W czworokącie ABCD, w którym boki BC i DC są równej długości, dane są długości odcinków:

$$|AE| = 6, |EB| = 2, |DF| = 4$$

Każdy z kątów $\angle ABC$, $\angle ADC$, $\angle AED$ jest kątem prostym. Oblicz długość odcinka $|EF| = x$.



W zadaniu tym uczeń powinien zauważyć przystawanie trójkątów $\angle ABC, \angle ADC$, a następnie zastosować twierdzenie Pitagorasa do trójkąta $\angle AED$.

Wtedy $6^2 + (4 + x)^2 = 8^2$, stąd $x = 2\sqrt{7 - 4}$.

Wymaganie 1.1) dla klas IV–VI brzmi: „Uczeń stosuje dziesiętkowy system zapisu liczb naturalnych [...]”. Daje to możliwości postawienia przez uczniem zdolnym kolejnych interesujących problemów do rozwiązania.

Zadanie 4. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią o takiej własności, że po dopisaniu do tej liczby na początku i na końcu tej samej cyfry otrzymamy liczbę 23 razy większą.

Oznaczmy szukaną liczbę przez n , a dopasowaną cyfrę przez c . Wtedy utworzona liczba jest równa $m = c \cdot 10^{k+1} + 10n + c$, gdzie k jest liczbą cyfr liczby n .

Z warunków zadania $m = 23n$, a więc $13n = c \cdot (10^{k+1} + 1)$. Wynika stąd, że liczba 13 dzieli liczbę $10^{k+1} + 1$. Sprawdzamy, że najmniejsza liczba k jest równa 2.

Wtedy $n = \frac{c \cdot (10^{2+1} + 1)}{13}$. Przyjmując $c = 1$, otrzymujemy $n = 77$.

Najmniejsza szukana liczba to 77.

10. Ocenianie w matematyce wspierające realizację celów przedmiotu

Matematyka jest bardzo rozbudowanym przedmiotem, na którym uczniowie opanowują wiele umiejętności, co przekłada się na częste ocenianie. Warto zadbać o to, żeby oceny częściowe nie tylko podsumowywały dotychczasowe osiągnięcia ucznia, ale przede wszystkim wspierały jego uczenie się – powinny zatem zawierać konkretną informację dotyczącą poziomu opanowania przez ucznia danych umiejętności, a także wskazówki, w jaki sposób uczeń może je udoskonalić lub w jaki sposób może je rozwinąć, gdy osiągnęły już poziom wymagany przez podstawę programową. Nie musi to oznaczać całkowitego odejścia od stopni – dla wielu są one ważną, bo prostą informacją podsumowującą poziom opanowania danego materiału. Można je zatem stosować właśnie jako oceny podsumowujące, np. ze sprawdzianu na koniec działu. Oczywiście nawet taka ocena może, a nawet powinna być uzasadniona poprzez odniesienie się do sprawdzanych umiejętności lub kryteriów oceny rozwiązania danego zadania (więcej o tym w części o ocenianiu kryterialnym). Uczeń jest w trakcie procesu uczenia się i doskonalenia konkretnych umiejętności, dlatego warto, żeby ocena, którą otrzymuje, była kształtująca, dająca uczniowi do zrozumienia, że na tym etapie dostaje od nauczyciela wskazówki do dalszego rozwoju, a nie jest rozliczany z poziomu opanowania danych umiejętności. W takiej ocenie kładzie się nacisk na mocne strony ucznia, a popełniane błędy stają się wskazówką do dalszej pracy i nie są przedmiotem oceny. Dzięki takiemu podejściu uczeń zyskuje sprawczość – wie i rozumie, co powinien zrobić, by rozwinąć swoje kompetencje matematyczne. Ponadto podejście takie zmniejsza stres i lęk przed częstym ocenianiem i wielokrotnym wskazywaniem błędów.

Umiejętności proste i złożone (algorytmiczne)

Ocenianie kształtujące nie zawsze wiąże się z pisanem obszernego tekstu dla każdego dziecka. W wielu sytuacjach można posłużyć się tabelą, w której wierszach wypisane są umiejętności do opanowania w danym momencie. Warto przy tym zadbać, by umiejętności podzielić na możliwie proste, tak by uczeń wiedział, nad czym konkretnie powinien popracować. Jest to też jasna informacja dla nauczyciela, jakie działania warto podjąć wobec danej osoby, żeby udoskonaliła swoje umiejętności.

Przykład

Uczeń wykonał dodawanie ułamków w następujący sposób: $\frac{4}{7} + \frac{5}{8} = \frac{4}{56} + \frac{5}{56} = \frac{9}{56}$

Działanie to zostało wykonane niepoprawnie. Można by stąd wywnioskować, że uczeń nie potrafi dodawać ułamków zwykłych. Zauważmy jednak, że uczeń w swoim rozwiązaniu wykazał opanowanie następującej wiedzy i umiejętności:

- wiedział, że należy sprowadzić ułamki zwykłe do wspólnego mianownika,
- poprawnie znalazł wspólny mianownik,
- poprawnie dodał ułamki o tym samym mianowniku (dodał tylko liczniki).

To, co w jego obliczeniach jest niepoprawne, to rozszerzanie ułamków do wspólnego mianownika, a konkretnie brak rozszerzenia liczników obydwu ułamków.

Warto sobie zadać pytanie, czy uczeń nie pamięta o rozszerzaniu liczników tylko przy sprowadzaniu do wspólnego mianownika, czy też nie robi tego nawet w zadaniach sprawdzających samo rozszerzanie ułamków, np. w zadaniu: „Rozszerz ułamek do mianownika 40”. Żeby dowiedzieć się, jakiego typu błąd popełnia uczeń, warto np. podczas kartkówki z dodawania ułamków zwykłych dać zadanie, które sprawdza tylko umiejętność rozszerzania ułamków. Porównując rozwiązanie przez ucznia tego zadania oraz zadania z powyższego przykładu, możemy wyciągnąć odpowiedni wniosek i przedstawić go uczniowi w postaci informacji zwrotnej.

Dzięki takiemu wyszczególnieniu umiejętności uczeń dostrzega, że wystarczy poćwiczyć rozszerzanie ułamków (a konkretnie pamiętać o rozszerzaniu liczników), aby w pełni opanować dodawanie ułamków zwykłych. Co więcej, daje mu to poczucie, że większość umiejętności prostych już opanował – w drodze do opanowania dodawania ułamków jest już blisko mety, a nie dopiero ruszył ze startu.

W tym przypadku mieliśmy do czynienia z podziałem umiejętności złożonej (zastosowanie algorytmu dodawania ułamków zwykłych) na umiejętności proste.

Umiejętności proste możemy również oceniać wg pewnej skali, np. *jeszcze nie potrafię / potrafię, ale czasami popełniam błędy / potrafię*.

Uczeń może także dokonać samooceny lub oceny rówieśniczej na podstawie kryteriów przedstawionych uczniom przez nauczyciela. Rzetelne przygotowanie kryteriów może zatem znacząco zmniejszyć czasochłonność informacji zwrotnej.

Umiejętność rozwiązywania zadań z różnych poziomów poznawczych

Umiejętności algorytmiczne nie są jedynymi umiejętnościami, które uczeń powinien opanować. W wielu zadaniach (w szczególności zadaniach z treścią) warto skorzystać z opanowanych

umiejętności w sposób niestandardowy, czasami przeprowadzić rozumowanie typu „uzasadnij, że”. Poniżej zostały przedstawione matematyczne poziomy poznawcze wg Andrew C. Portera (2002).

Poziom 1. Zapamiętaj

Wymień podstawowe informacje – fakty, definicje, wzory.

Poziom 2. Pokaż, że rozumiesz

Wytlumacz pojęcie, użyj reprezentacji (np. wzoru), przeanalizuj dane.

Poziom 3. Zastosuj algorytm

Rozwiąż typowe zadanie.

Poziom 4. Rozwiąż niestandardowe zadanie

Stwórz strategię, zmodyfikuj algorytm, połącz różne elementy wiedzy.

Poziom 5. Postaw hipotezę, uogólnij, uzasadnij

Określ zależność, sprawdź, czy zależność zachodzi, znajdź kontrprzykład, zaproponuj dowód.

Warto zauważyć, że w zadaniach z czwartego i piątego poziomu poznawczego sprawdzane są inne umiejętności niż w zadaniach z niższych poziomów poznawczych (np. opracowanie strategii lub synteza wiedzy z różnych obszarów matematyki). Przy zadaniach tego typu informacja zwrotna powinna dotyczyć nie tylko poprawności rachunkowej, ale także umiejętności układania listy kolejnych kroków potrzebnych do rozwiązania zadania oraz jej realizacji (w aspekcie strategii rozwiązania zadania). Ważne jest, żeby uczeń nie tylko liczył, ale też rozumiał, co liczy i po co liczy, czyli rozumiał, dlaczego pokonanie jednego etapu rozwiązania jest konieczne do przejścia do kolejnego.

11. Korelacje międzyprzedmiotowe

Matematyka ogólnej pełni funkcję przedmiotu o charakterze narzędziowym, którego treści i metody przenikają do innych obszarów kształcenia. Jej uniwersalność polega na tym, że dostarcza języka i aparatu pojęciowego pozwalającego analizować, opisywać i interpretować rzeczywistość. Uczeń, zdobywając kompetencje matematyczne, równocześnie rozwija umiejętności niezbędne w naukach przyrodniczych, humanistycznych, technicznych i informatycznych. Korelacje te nie mają charakteru przypadkowego – są systemowo wpisane w konstrukcję podstaw programowych różnych przedmiotów i pozwalają na budowanie spójnego obrazu wiedzy.

Edukacja wczesnoszkolna tworzy podstawę dalszej nauki matematyki, a jednocześnie stanowi pierwszy etap korelacji międzyprzedmiotowej. Zestawienie wspólnych treści programowych w edukacji matematycznej na dwóch etapach – wczesnoszkolnym (klasy I–III) oraz w klasach IV–VI – pozwala dostrzec, jak konsekwentnie rozwijane są kluczowe kompetencje matematyczne ucznia. Wspólne obszary tematyczne stanowią fundament budowania świadomości matematycznej, umiejętności praktycznych oraz zdolności analitycznych, które są niezbędne w dalszej edukacji i codziennym życiu. Takie zestawienie może stanowić wsparcie w planowaniu dydaktyki opartej na progresji, korelacji i naturalnym rozwoju ucznia.

Dział „Liczby” stanowi podstawę matematycznego rozumowania. Uczniowie rozpoczynają naukę od prostych operacji i strategii obliczeniowych, by stopniowo przechodzić do bardziej złożonych zagadnień, takich jak ułamki, potęgi czy procenty. Wraz z rozwojem umiejętności uczą się analizować struktury liczbowe, rozpoznawać regularności i stosować logiczne reguły w rozwiązywaniu problemów.

W dziale „Miary” korelacja programowa umożliwia płynne przejście od prostych pomiarów długości, czasu czy masy do zaawansowanych przeliczeń jednostek, obliczeń kalendarzowych, zegarowych oraz zastosowań matematyki w kontekście finansowym i praktycznym. Uczniowie uczą się nie tylko mierzyć, ale także interpretować i wykorzystywać dane w codziennym życiu.

Dział „Figury” stanowi doskonały przykład tej korelacji – od intuicyjnego rozpoznawania kształtów po formalne obliczenia pól, objętości i analizę symetrii. Uczniowie przechodzą od prostych obserwacji przestrzeni do zaawansowanych konstrukcji geometrycznych i obliczeń, rozwijając przy tym orientację przestrzenną, precyzję i logiczne myślenie.

Dział „Dane” pokazuje, jak uczniowie od najmłodszych lat uczą się zbierać, porządkować i interpretować informacje. W klasach starszych rozwijają te umiejętności przez analizę

wykresów, obliczanie średnich i formułowanie wniosków, co przygotowuje ich do świadomego korzystania z danych w świecie pełnym informacji.

Wreszcie, podobnie jak w klasach IV–VI, dział „Myślenie matematyczne” stanowi fundament całej edukacji matematycznej w klasach I–III. Od prostych strategii i gier logicznych po zaawansowane metody rozwiązywania problemów, uczniowie uczą się myśleć matematycznie, argumentować, uzasadniać swoje rozwiązania i stosować wiedzę w praktyce.

Wraz z przejściem na II etap edukacyjny rozwijane wcześniej intuicje i umiejętności matematyczne zostają rozszerzone i uporządkowane, a korelacje międzyprzedmiotowe nabierają bardziej świadomego i złożonego charakteru.

W zakresie **historii** matematyka pełni funkcję narzędzia porządkowania i analizy. Kompetencje matematyczne są niezbędne w pracy z chronologią – obliczaniu odstępów czasowych, przeliczaniu wieków, ustalaniu lat panowania. Zapis rzymski liczb, pojawiający się w źródłach historycznych, wymaga odwołania do wiedzy matematycznej o systemach liczbowych. Również analiza statystyk historycznych – demograficznych, gospodarczych czy społecznych – wymaga stosowania pojęć procentu, proporcji i średniej arytmetycznej. Geometria natomiast odnajduje swoje zastosowanie w opisie architektury i sztuki, gdzie kategorie takie jak symetria, proporcje czy podobieństwo są integralnym elementem analizy źródeł kulturowych.

Informatyka rozwija się w ścisłym powiązaniu z matematyką, ponieważ obie dziedziny kształtują myślenie algorytmiczne. Algebra dostarcza pojęcia zmiennej i równania, które w informatyce zostają wykorzystane w programowaniu i w arkuszach kalkulacyjnych.

Matematyka stanowi też podstawę analizy i wizualizacji danych – wykresy, diagramy czy tabele mają charakter uniwersalny, a ich konstruowanie wymaga znajomości metod statystycznych. Geometria ma swoje zastosowanie w grafice komputerowej i programach CAD, gdzie niezbędna jest znajomość pojęć skali, symetrii, kąta i bryły. W ten sposób matematyka wyposaża uczniów w kompetencje, które w informatyce zyskują wymiar technologiczny.

Przyroda, jako zespół nauk empirycznych, wykorzystuje matematykę jako narzędzie opisu i interpretacji zjawisk. Pomiar długości, masy, czasu czy powierzchni nie istnieje bez znajomości jednostek i ich przeliczania. Algebra i równania pozwalają na zapisywanie zależności pomiędzy wielkościami fizycznymi i chemicznymi, natomiast statystyka umożliwia analizę danych z doświadczeń i obserwacji. Geometria dostrzegalna jest w strukturze świata przyrody – w symetrii organizmów, podobieństwie figur, kątach obserwacji astronomicznych czy w strukturach krystalicznych. Matematyka staje się więc językiem, w którym przyroda opisuje swoje prawa.

W zakresie przedmiotów przyrodniczych – biologii, chemii i fizyki – matematyka pełni funkcję uniwersalnego języka opisu zjawisk. W fizyce zależności między wielkościami, takimi jak droga, czas, prędkość czy siła, wyrażane są za pomocą wzorów i równań, których rozumienie wymaga umiejętności posługiwania się symbolami i zależnościami między wielkościami oraz sprawnego operowania jednostkami. W chemii matematyka znajduje zastosowanie w określaniu zależności ilościowych między substancjami, w tym w analizie ich składu i przemian, a także w opracowywaniu wyników doświadczeń. W biologii natomiast umożliwia opracowywanie i interpretowanie danych statystycznych, analizę procesów wzrostu oraz zależności w obrębie populacji. We wszystkich tych dziedzinach matematyka nie tylko wspiera wykonywanie obliczeń, lecz przede wszystkim umożliwia dostrzeganie zależności i formułowanie wniosków opartych na danych empirycznych.

Muzyka wykorzystuje matematykę w kontekście rytmu, proporcji i regularności. Podział czasu w utworze muzycznym, wyrażony poprzez wartości rytmiczne, odpowiada określonym zależnościom między częściami całości. Pojęcia takie jak takt czy metrum odwołują się do uporządkowanych schematów, które można analizować matematycznie. Również powtarzalność, symetria i struktura utworu stanowią przykład uporządkowania o charakterze matematycznym. W ten sposób matematyka wspiera rozumienie muzyki jako systemu o określonych relacjach i zależnościach.

Plastyka pozwala dostrzec matematykę w przestrzeni wizualnej i działaniach twórczych. Kompozycja, proporcje, perspektywa, symetria oraz rytm wizualny odwołują się do pojęć geometrycznych i relacji przestrzennych. Uczniowie, tworząc i analizując prace plastyczne, posługują się pojęciami kształtu, skali i zależności między elementami kompozycji. Matematyka znajduje również zastosowanie w analizie dzieł sztuki oraz w działaniach konstrukcyjnych, takich jak tworzenie wzorów, mozaik czy układów powtarzalnych. Dzięki temu wspiera rozwój wyobraźni przestrzennej oraz precyzji w działaniu.

Zajęcia praktyczno-techniczne ukazują najbardziej bezpośredni i pragmatyczny wymiar matematyki. Każdy projekt konstrukcyjny czy praktyczny wymaga od ucznia posługiwania się jednostkami miar i skalą, obliczania pól i objętości, stosowania proporcji i procentów czy korzystania z twierdzenia Pitagorasa. Uczeń, planując i realizując zadanie techniczne, posługuje się w praktyce tymi samymi pojęciami i metodami, które wcześniej opanował na lekcjach matematyki. Dzięki temu dostrzega, że matematyka nie jest tylko zbiorem abstrakcyjnych reguł, lecz rzeczywistym narzędziem działania w świecie materialnym.

Wszystkie wymienione powiązania łączy myślenie matematyczne, które kształtuje logiczne rozumowanie, dostrzeganie prawidłowości, stawianie hipotez i ich weryfikację, a także

umiejętność argumentacji i stosowania strategii heurystycznych. Te same zdolności są nieodzowne w analizie źródeł historycznych, w testowaniu algorytmów w informatyce, w formułowaniu i sprawdzaniu hipotez przyrodniczych czy w projektowaniu technicznym.

12. Moduł ekonomiczno-finansowy

Moduł ekonomiczno-finansowy w edukacji matematycznej stanowi istotny element podstawy programowej. Jego realizacja ma na celu rozwój świadomości finansowej uczniów, umożliwiając im nie tylko opanowanie zagadnień matematycznych, lecz także zdobycie praktycznych umiejętności związanych z analizą danych finansowych i podejmowaniem decyzji w kontekście rzeczywistych sytuacji życiowych. Wprowadzenie tego modułu odpowiada na rosnącą potrzebę kształcenia młodych ludzi, którzy będą w przyszłości świadomie i odpowiedzialnie zarządzać swoimi finansami, zarówno na poziomie osobistym, jak i społecznym.

Cele kształcenia i wymagania szczegółowe zawarte w podstawie programowej zakładają, że uczniowie, oprócz opanowania zagadnień matematycznych, będą umieli posługiwać się pojęciami finansowymi, takimi jak cena, koszt, budżet, oszczędności, rabat, oprocentowanie, kredyt czy inflacja. Zajęcia związane z tym modułem umożliwiają uczniom nie tylko rozwiązywanie zadań, ale także angażują ich w proces podejmowania decyzji, planowania budżetu czy porównywania ofert finansowych. Nauczyciel, realizując moduł ekonomiczno-finansowy, stwarza warunki do samodzielnego myślenia uczniów, umożliwiając im podejmowanie decyzji na podstawie przedstawionych danych finansowych oraz wyciąganie wniosków na temat opłacalności różnych rozwiązań.

Realizacja modułu ekonomiczno-finansowego w klasach IV–VI skupia się na wprowadzeniu uczniów w podstawowe zagadnienia związane z finansami, które mają bezpośredni wpływ na ich codzienne życie. W tym wieku uczniowie powinni zapoznać się z pojęciami takimi jak cena, koszt, budżet, oszczędzanie, rabat, promocja, oraz nauczyć się podstawowych umiejętności związanych z zarządzaniem finansami. Nauczyciel może realizować te zagadnienia, wykorzystując realne dane, takie jak paragony, oferty sklepowe, ulotki reklamowe, na podstawie których uczniowie porównują ceny produktów, obliczają koszty zakupów, a także planują budżet na wycieczkę klasową czy inne wydarzenie. Podczas realizacji tych działań warto wykorzystywać narzędzia cyfrowe, takie jak kalkulatory online czy arkusze kalkulacyjne – do obliczania wartości jednostkowych, rabatów czy kosztów zakupu.

Przykłady zadań dla klas IV–VI

- Obliczanie ceny jednostkowej towaru po uwzględnieniu rabatów i promocji, np. porównanie cen kilogramów owoców w różnych sklepach.
- Planowanie kosztów wyjazdu klasowego, z uwzględnieniem opcji transportu, wyżywienia, noclegów, a także dodatkowych atrakcji.

- Obliczanie oszczędności uzyskanych dzięki promocjom, np. porównanie ofert różnych sklepów i wybór najbardziej opłacalnej opcji.
- Analiza ofert rabatowych i obliczanie, ile uczniowie zaoszczędzą przy zakupie większej ilości produktów.

W klasach VII–VIII moduł ekonomiczno-finansowy staje się bardziej złożony, wprowadzając uczniów w zagadnienia związane z kredytami, oprocentowaniem, inflacją, a także bardziej zaawansowanymi obliczeniami finansowymi. Uczniowie w tym wieku powinni nauczyć się porównywać oferty finansowe, rozumieć mechanizmy kredytowe, obliczać oprocentowanie, a także zarządzać budżetem domowym. Aby to osiągnąć, nauczyciel stwarza sytuacje dydaktyczne, które pozwolą uczniom na samodzielne podejmowanie decyzji finansowych w kontekście rzeczywistym, np. analiza ofert kredytów, porównywanie kosztów różnych form płatności czy porównywanie kosztowna dużą inwestycję.

Przykłady zadań dla klas VII–VIII

- Obliczanie kosztów kredytu przy różnych stopach procentowych i okresach spłaty, porównywanie ofert kredytów hipotecznych.
- Obliczanie wartości pieniądza w czasie, np. analiza inflacji i wpływu wzrostu cen na oszczędności.
- Przygotowanie budżetu domowego na podstawie rzeczywistych danych, takich jak średnie zarobki, wydatki na życie, oszczędności.
- Praca z danymi dotyczącymi oprocentowania lokat i kredytów, obliczanie kosztu kredytu przy różnych formach płatności (raty, oprocentowanie zmienne i stałe).
- Analiza ofert finansowych (np. kredytów konsumpcyjnych) i obliczanie całkowitego kosztu pożyczki przy różnych formach oprocentowania i czasie spłaty.

Korzyści z realizacji modułu ekonomiczno-finansowego na zajęciach matematyki obejmują rozwój nie tylko umiejętności matematycznych, takich jak obliczenia procentowe, analiza danych i rozwiązywanie równań, ale także kształtowanie odpowiedzialności finansowej i krytycznego myślenia. Dzięki tym zagadnieniom uczniowie uczą się podejmować świadome decyzje finansowe, co jest niezbędne w codziennym życiu. Moduł ekonomiczno-finansowy nie tylko rozwija umiejętności matematyczne, ale także przygotowuje uczniów do uczestnictwa w życiu społecznym, w którym umiejętność zarządzania finansami odgrywa kluczową rolę.

Rekomendowana literatura i źródła do wykorzystania w nauczaniu

Podstawa programowa przedmiotu

Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych jest dostępna w [Dz.U. 2026 poz. 378](#).

Cele kształcenia oraz wymagania szczegółowe dla przedmiotu matematyka znajdują się w Załączniku nr 2 na stronach 236–252.

Literatura

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Bethan, M., Wiliam, D. (2006). *Jak oceniać, aby uczyć* (tłum. J. Dutkiewicz). Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Dirksen, J. (2017). *Projektowanie metod dydaktycznych. Efektywne strategie edukacyjne* (tłum. B. Solecki). Helion.

Humphreys, C., Parker, R. (2015). *Making number talks matter*. Stenhouse Publishers.

Hurt, K. M., Kuchermann, D. (2004). *Children understanding of mathematics: 11–16*. Antony Rowe Publishing Services.

Marzano, R. J. (2012). *Sztuka i teoria skutecznego nauczania* (tłum. J. Czernik i in.). Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Moss, C. M., Brookhart, S. M. (2012). *Cele uczenia się. Jak pomóc uczniom zrozumieć każdą lekcję*. Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Parrish, S. (2014). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Math Solutions.

Polya, G. (2012). *Jak to rozwiązać* (tłum. L. Kubik). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Porter, A. C. (2002). Measuring the content of instruction: Uses in research and practice, *Educational Researcher*, 31(7), 3–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X031007003>

Schoenfeld, A. H., Teaching for Robust Understanding Project. (2016). *An introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) framework*. Graduate School of Education. https://www.map.mathshell.org/trumath/intro_to_tru_20161223.pdf

Skemp, R. (1976). Understanding relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching*, 77, 20–30.

Sterna, D. (2014). *Uczę (się) w szkole*. Centrum Edukacji Obywatelskiej.

Szurek, M. (2006). *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*. Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.

Tomlison, C. A. (2014). *The differentiated classroom*. ASCD.

Watson, A., Jones, K., Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics*. Oxford University Press.

Wiggins, G., Mc Tighe, J. (2006). *Understanding by design*. Pearson.

Strony internetowe

Strona internetowa ORE: <https://ore.edu.pl/category/ksztalcenie-i-wychowanie/uczen-zdolny>

Strona internetowa Art of Problem Solving: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/AMC_Problems_and_Solutions

Strona internetowa NRICH University of Cambridge: <https://nrich.maths.org>